

## Ingeniería de Control I

### Tema 8

#### Análisis temporal de sistemas de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> orden

1

## 8. Análisis temporal de sistemas de primer y segundo orden.

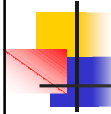
- Respuesta transitoria en sistemas de 1er orden
- Respuesta a escalón y rampa
- Respuesta en sistemas de 2<sup>o</sup> orden
- Sistemas subamortiguados
- Sistemas de orden n
- Estabilidad

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

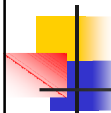


## Bibliografía

- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo
- Feedback control systems. J.V. de Vegte.

Régimen transitorio

3



## Objetivos

- Identificar el tipo de respuesta transitoria de un sistema a partir de los valores de los coeficientes o polos de su ecuación característica.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sistemas de primer orden

- ED con una sola derivada:
  - $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$

$\frac{R(s)}{r(t)}$

$G(s)$

$\frac{C(s)}{c(t)}$

- Aplicando TL
  - $TsC(s) + C(s) = KR(s)$
  - $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1+Ts}$
- K es la ganancia del sistema en lazo cerrado y T la cte. de tiempo
- Polo en  $s = -\frac{1}{T}$

Régimen transitorio 5

## Respuesta ante escalón

- $C(s) = \frac{K}{1+Ts} \frac{R_0}{s} = \frac{KR_0/T}{s(s+1/T)}$
- $c(t) = L^{-1} \left[ \frac{KR_0/T}{s(s+1/T)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1/T} \right]$
- Calculando residuos,  $a = R_0K, b = -R_0K$ .
- $c(t) = R_0K u(t) - R_0K e^{-\frac{t}{T}} u(t) = R_0K (1 - e^{-\frac{t}{T}}) u(t)$
- T es el t que tarda la señal en alcanzar el 63% del



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Respuesta ante otras funciones

- Por tratarse de sistemas LTI si se introduce la derivada o la integral de una señal de la que conocemos la salida, la nueva salida será la derivada o la integral de la anterior.
- Ej:  $r_1(t) = R_1 t u(t) = \int_0^t R_1 u(\tau) d\tau$ 
  - $c_1(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau = \int_0^t R_1 K \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) d\tau = R_1 K t + R_1 K T e^{-\frac{t}{T}} - R_1 K T$

Régimen transitorio 7

## Sistema de 2º orden

- Tiene una FT en lazo cerrado con dos polos, la ecuación característica es de grado 2.

$G(s) = \frac{k_1 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$

$\frac{R(s)}{r(t)} \rightarrow$

G(s)

$\rightarrow$

$\frac{C(s)}{c(t)}$

- $K_1$  ganancia del sistema en lazo cerrado
- $\omega_n$  es la pulsación natural no amortiguada del sistema (rad/sg)
- $\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Respuesta ante escalón

- $\xi = 0; s_{1,2} = \pm j\omega_n$
- Polos en eje imaginario, sistema **oscilante**
- $C(s) = \frac{K_1\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1(1 - \cos\omega_n t)$

9

## Respuesta ante escalón (2)

- $0 < \xi < 1; s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
- Polos complejos conjugados con parte real negativa y el sistema es **subamortiguado**  $C(s) = \frac{k_1\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \frac{1}{s}$
- $c(t) = K_1 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left[ \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right) t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \right]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Respuesta ante escalón (3)

- $\xi = 1, s_{1,2} = -\omega_n$
- Polo doble situado en el semieje real negativo, sistema **críticamente amortiguado**
- $C(s) = \frac{k_1 \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1 [1 - e^{-\omega_n t} (\omega_n t + 1)]$

11

### Respuesta ante escalón (4)

- $\xi > 1, s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$
- Polos reales y negativos, sistema **sobreamortiguado**
- $C(s) = \frac{k_1 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1 \left[ 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \right]$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

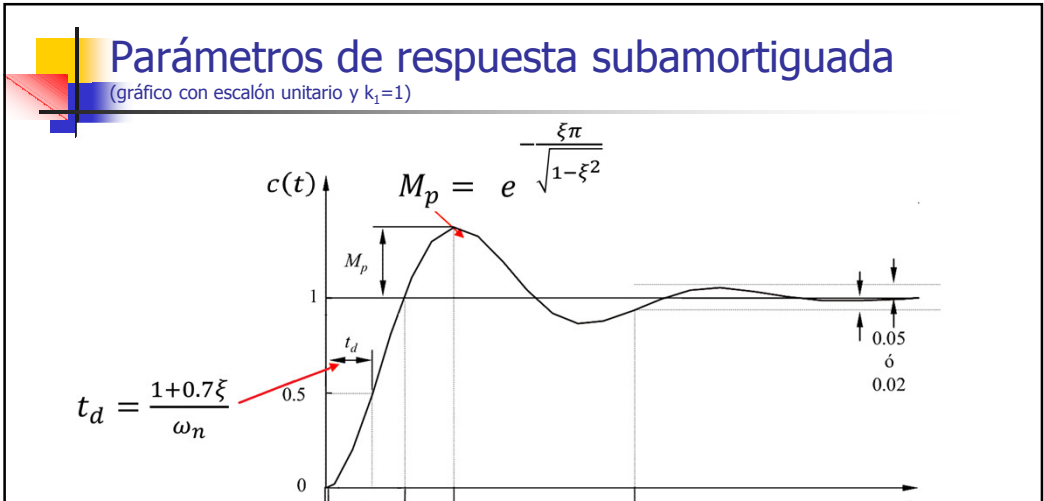
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Respuesta a escalón (5)

- $\xi < 0, s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$
- Polos reales y positivos, sistema inestable que tiende a saturarse o destruirse.

Régimen transitorio 13



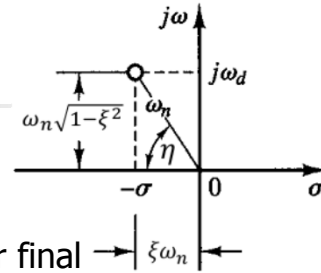
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sistema subamortiguado



- Parámetros de la respuesta:
  - Tiempo de retardo,  $t_d$ , el que tarda la salida en alcanzar el 50% del valor final
    - $t_d = \frac{1+0.7\xi}{\omega_n}$
  - Tiempo de crecimiento,  $t_r$ , es el que tarda la salida en alcanzar por primera vez el valor final (10-90%, 5-95%)
    - $t_r = \frac{\pi-\eta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ , con  $\eta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$
  - Tiempo de pico,  $t_p$ , el que tarda en alcanzar el primer máximo
    - $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Régimen transitorio

15

- Tiempo de establecimiento,  $t_s$ , el requerido para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final (5% o 2%)
  - $t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n} \left[ \frac{3}{\xi\omega_n} \text{ o } \frac{4}{\xi\omega_n} \right]$
- Máximo sobreimpulso,  $M_p$ , cuanto sobrepasa la respuesta transitoria el valor final relativo al valor final en su primer pico (tb. se puede dar en porcentaje)

$\xi\pi$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---


ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



### Sistema de orden n

■ FT en lazo cerrado



- $$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m)}{(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n)} = k \frac{\prod_{j=1}^m (s+z_j)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)}$$
- Si introducimos un escalón y calculamos los residuos y la TIL:
  - $$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+p_1} + \frac{B_2}{s+p_2} + \dots + \frac{B_n}{s+p_n}$$
  - $$c(t) = A + B_1e^{-p_1t} + B_2e^{-p_2t} + \dots + B_ne^{-p_nt}$$
- Cálculos complicados, se intenta reducir a 2º orden:
  - Cancelando residuos pequeños
  - Cancelando ceros y polos cercanos
  - Cancelando ceros y polos alejados del dominante

17

Régimen transitorio

### Cálculo de residuos de polos reales múltiples

- $$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)^r(s+s_2)} = \frac{A_{1r}}{(s+s_1)^r} + \frac{A_{1(r-1)}}{(s+s_1)^{r-1}} + \dots + \frac{A_{11}}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_2)}$$
- $A_2$  y  $A_{1r}$  se pueden calcular por la fórmula genérica
  - $$(s+s_1)^r F(s) = A_{1r} + A_{1(r-1)}(s+s_1) + A_{1(r-2)}(s+s_1)^2 + \dots + A_{11}(s+s_1)^{r-1} + \frac{A_2(s+s_1)^r}{(s+s_2)}$$
- Pero  $A_{1(r-1)}$  (y sucesivos coeficientes) derivando dicha expresión una (y sucesivas veces) con respecto a  $s$  antes de sustituir por  $s = -s_1$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Cálculo de residuos de polos complejos

- $F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)(s+s_3)} = \frac{A_1}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_1^*)} + \frac{A_3}{(s+s_3)}$
- Con funciones reales polos complejos aparecen en pares conjugados y por tanto sus residuos también son complejos conjugados.
- Se calculan por residuos o bien restando (ej.T7.10):
  - $\frac{As+B}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)} = \frac{Q(s)}{P(s)} - \frac{A_3}{(s+s_3)} = \frac{Q(s)}{P(s)} - \frac{A_3(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)}{(s+s_3)(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)}$
- Si son complejos múltiples, igual norma que con reales múltiples.

Régimen transitorio

19

## Estabilidad

- Salida de un sistema ante entrada impulso:
  - Estable: salida tiende a 0
  - Marginalmente estable: salida oscilante
  - Inestable: salida tiende a infinito
- Parte real de los polos (raíces de ec. característica)
  - Todas negativas (pol. de Hurwitz): estable
  - Alguna cero: marginalmente estable

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Criterio de estabilidad de Routh

- Partiendo de la ec. característica de la FT en lazo cerrado:
  - $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$
  - Condición necesaria: todos  $a_i$  mismo signo y todos  $\neq 0$
  - Condición suficiente: tabla de Routh

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^2$	$u_1$	$u_2$	$0$	$\dots$	
$s^1$	$v_1$	$0$	$0$	$\dots$	
$s^0$	$w_1$	$0$	$0$	$\dots$	

21

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$	$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$	$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$		$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$		$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^2$	$u_1$	$u_2$	$0$	$\dots$		$s^2$	$u_1$	$u_2$	$0$	$\dots$	
$s^1$	$v_1$	$0$	$0$	$\dots$		$s^1$	$v_1$	$0$	$0$	$\dots$	
$s^0$	$w_1$	$0$	$0$	$\dots$		$s^0$	$w_1$	$0$	$0$	$b_3 = -\frac{a_n a_{n-6}}{a_{n-1} a_{n-7}}$	

$$b_1 = -\frac{a_n a_{n-2}}{a_{n-1} a_{n-3}}$$

$$b_1 = -\frac{a_n a_{n-2}}{a_{n-1} a_{n-3}}$$

$$b_2 = -\frac{a_n a_{n-4}}{a_{n-1} a_{n-5}}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- Condición suficiente: si todos los coeficientes de la primera columna son del mismo signo el sistema es estable.
- Ej: dos cambios de signo, dos raíces en plano positivo

$$M(s) = \frac{1}{s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240}$$

$s^5$	1	10	152	$b_1 = -\frac{72-10}{1} = -62, \quad b_2 = -\frac{240-152}{1} = -88$
$s^4$	1	72	240	$c_1 = -\frac{-88+62 \cdot 72}{-62} = 70,6, \quad c_2 = -\frac{0+62 \cdot 240}{-62} = 240$
$s^3$	-62	-88	0	$d_1 = -\frac{-62 \cdot 240 + 70,6 \cdot 88}{70,6} = 122,8$
$s^2$	70,6	240		$e_1 = -\frac{0-122,6 \cdot 240}{122,6} = 240$
$s^1$	122,6			
$s^0$	240			

23

### Casos especiales

- En la primera columna aparece un 0, se para cálculo por indeterminación. Se sustituye por un  $\epsilon \rightarrow 0$  y se continúan los cálculos.
- Toda una fila se hace 0: fila superior derivarla (respecto de s) y sustituir en la fila que se hace todo 0s

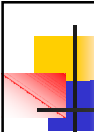
$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5}$$

$$M(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18}$$


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

 Estabilidad en función de parámetros

$$M(s) = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + k}$$

$s^3$	1	17	$\left. \begin{array}{l} \frac{63}{4} - \frac{k}{8} > 0 \\ 10 + k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -10 < k < 126$
$s^2$	8	$10 + K$	
$s^1$	$\frac{63}{4} - 1/8 K$	0	
$s^0$	$10 + K$	0	

Régimen transitorio 25



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**