Tema 8. Fluidos.

En este tema se trata de entender las propiedades de los fluidos, tanto en reposo como en movimiento. En la primera parte se introducen los conceptos de densidad, flotación y el Principio de Arquímedes. A continuación se estudia la ecuación de Bernoulli para fluidos en movimiento y los fluidos viscosos.

Densidad

Se define la densidad *media* de un cuerpo al cociente entre la densidad de un cuerpo y su volumen.

$$\rho = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}}.$$

Para poder decidir si una densidad es grande o pequeña es necesario tener una referencia. Esta referencia se toma habitualmente en la densidad del agua: $\rho_{\text{agua}} = 1\ \text{gr/cm}^3$.

Presión en un fluido.

Cuando un fluido entra en contacto con la superficie de un sólido ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada uno de los puntos de la superficie de contacto. Esta fuerza medida por unidad de superficie se denomina presión del fluido:

$$P = \frac{|F|}{S}.$$

La unidad de la presión en el sistema internacional (SI) recibe el nombre de Pascal y es igual a un Newton dividido por un metro cuadrado (N/m^2). Otra unidad muy utilizada es la *atmósfera*, que es (aproximadamente) la presión del aire al nivel del mar y equivale a 101,300 KPa.

Cuando un fluido presiona un sólido tiende a comprimirlo. El cociente entre la presión ejercida y la disminución relativa de volumen se denomina **módulo de compresibilidad**.

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

El signo menos se incluye para que el módulo de compresibilidad sea positivo ya que un aumento de la presión siempre conlleva una disminución del volumen.

Otra propiedad interesante de la presión en un fluido es que aumenta con la profundidad de inmersión de una forma lineal. Así si P_0 es la presión externa en el punto más elevado de un fluido, en un punto situado a una profundidad h la presión vendrá dada por:

$$P = P_0 + \rho g h,$$

donde ρ es la densidad del fluido en el que estemos sumergidos, g es la aceleración de la gravedad y h nos indica la profundidad de inmersión.

Asociado a esta propiedad tenemos el principio de Pascal, que dice: *Un cambio de presión aplicado a un líquido encerrado dentro de un recipiente se transmite por igual a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.*

Principio de flotación o de Arquímedes.

Todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional (o de empuje) cuyo valor es igual al peso del fluido desplazado.

$$|F|_a = V_s \rho_f$$

donde $|F|_a$ es el módulo de la fuerza ascensional, V_s es el volumen del cuerpo sumergido y ρ_f es la densidad del fluido en el que se sumerge el cuerpo. Esto provoca que todo cuerpo sumergido sea menos pesado que cuando no está sumergido. El peso que toma el cuerpo cuando está sumergido se denomina *peso aparente*, que es igual al *peso real* (mg) del cuerpo menos la fuerza ascensional.

$$P_a = m_c g - m_f g$$

donde m_c es la masa del cuerpo y m_f es la masa del fluido que se ha desplazado. Esta expresión puede ponerse en función de las densidades del cuerpo que se sumerge ρ_c, la del fluido en el que se sumerge ρ_f y el volumen del cuerpo que se sumerge V_s:

$$P_{\text{aparente}} = (\rho_s - \rho_f)\, V_s$$

.

Ecuación de Bernoulli.

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión la altura y la velocidad de un fluido **incompresible** e **ideal** cuyo flujo es **estacionario** y **laminar**. Ideal significa que no tiene viscosidad, es decir que no opone resistencia a fluir.

En el caso de que se aplique la **segunda ley de Newton** a una capa de fluido que se mueve en sentido horizontal, se obtiene una ecuación que asocia el trabajo por unidad de volumen del fluido (la presión) con la variación de la energía cinética del mismo. Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Bernoulli,

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2.$$

En el caso en que la línea de corriente no sea horizontal debemos tener en cuenta que hay variaciones de la energía potencial por unidad de volumen:

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1.$$

De esta ecuación es fácil deducir el efecto Venturi: *Cuando un fluido pasa por un estrechamiento aumenta su velocidad y disminuye su presión.*

Flujos viscosos.

La ecuación de Bernoulli dice que si un fluido se desplaza en horizontal por dentro de un conducto su presión debe ser constante. Sin embargo, en la práctica se observa que conforme hay desplazamiento en la dirección del flujo aparece una caída de presión. De hecho, lo que sucede es que las paredes fijas del tubo dificultan (por rozamiento) el libre desplazamiento del fluido cercano, lo que hace que el fluido próximo a las paredes se encuentre (casi) en reposo. Obviamente, conforme nos alejamos de las paredes del tubo este efecto es cada vez menor.

Supongamos un fluido que fluye por una tubería cuya sección transversal es A. El movimiento de cada una de las capas de fluido está *entorpecido* por la capa que tiene adyacente y que está más cercana a la pared; es decir, que se ejerce una *fuerza* entre capas de fluido. Estas fuerzas entre capas adyacentes se denominan **fuerzas viscosas**. Como resultado de esas fuerzas, la velocidad del fluido no es constante a lo largo del diámetro de la tubería. Es (casi) cero en los bordes y máxima en el centro de la tubería. Debido a todos esos factores mencionados, la diferencia de presión entre dos puntos que se encuentran a lo largo de la dirección de desplazamiento de un fluido, resulta ser proporcional al caudal:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = I_V R$$

donde $I_V = vA$ es el caudal (v es la velocidad constante) y R es la resistencia al flujo que depende de las dimensiones del tubo (longitud, anchura) y de la viscosidad del fluido.

En el caso de que el fluido fluya por capas o láminas diremos que se encuentra en el régimen laminar y que su movimiento constituye un **flujo laminar**. La fuerza entre dos capas adyacentes de fluido resulta ser directamente proporcional a v y A e inversamente proporcional a la separación z entre las láminas. La constante de proporcionalidad de esta relación se denomina **coeficiente de viscosidad** η:

$$F = \eta \frac{vA}{z}$$

Las unidades de η en el sistema internacional son N s/m^2.

Ley de Pouseville. Esta ley relaciona la caída de presión en una longitud L de un tubo circular de radio r:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_V,$$

donde I_V es el caudal.

Problemas resueltos.

Problema 1.- La sangre tarda aproximadamente un segundo en fluir por un capilar sanguíneo de 1 **mm de longitud. Si el diámetro del capilar es de 7 micras y la caída de presión es de 2.6 kPa, calcular la viscosidad de la sangre suponiendo que el flujo es laminar.**

Solución:

Reordenando la fórmula de Pouseville tenemos:

$$\eta = \frac{\Delta P}{L}\frac{\pi r^4}{8I_V}$$

donde η es la viscosidad, $\Delta P = 2600$ Pa es la diferencia de presiones entre los extremos del capilar de longitud $L = 10^{-3}$ m, $r = 3,5 \times 10^{-6}$ m es el radio del capilar e I_V es el caudal.

El enunciado dice que, en un segundo, toda la sangre que está en el interior del capilar habrá salido del mismo por lo que, el volumen de sangre que ha fluido en un segundo coincide con el volumen del capilar. El caudal es, pues, $I_V = \pi r^2 L$ (en m^3/s). De ahí es posible deducir el valor del coeficiente de viscosidad:

$$\eta = \frac{\Delta P}{L}\frac{\pi r^4}{8I_V} = \frac{\Delta P \times r^2}{8L^2} = \frac{2,6 \times 10^3\,\mathrm{Pa} \times \left(3,5 \times 10^{-6}\right)\mathrm{m}^2}{8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} = 0,004\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}.$$

Problema 2.- Una esfera de cobre de 0.4 g cae con una velocidad terminal de 5 cm/s en un cierto líquido. Si la densidad del cobre es de 8900 kg/m^3 y la del líquido es de 2800 kg/m^3, deducir la viscosidad del líquido.

Solución:

Cuando la esfera comienza a sumergirse en el líquido está sometida a tres fuerzas. Por una parte su peso, por otra la fuerza de flotación debida al empuje del fluido en el penetra y, por último la fuerza de fricción entre el cuerpo y el fluido que viene dada por la ley de Stokes. Todas las fuerzas se ejercen en dirección vertical y las dos últimas tienen sentidos opuestos al peso. Cuando la esfera alcanza la velocidad terminal (es constante) las tres fuerzas deben cancelarse, ya que si la velocidad es constante, la aceleración es cero.

$$mg - m_l g - 6\pi\eta R v = 0,$$

donde $m = 4 \times 10^{-4}$ kg es la masa de la esfera, $g = 9,8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad, m_l es la masa del fluido desalojado por la bola, η es la viscosidad (desconocida) del líquido, R es el radio de la bola y $v = 0,05$ m/s es la velocidad terminal de la bola.

La masa de fluido desalojado es igual al volumen de la bola por la densidad del líquido, es decir, $m_l = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_l$. Si aplicamos la misma ecuación al cobre, y dividiéndolas, se obtiene: $m_l/m = \rho_l/\rho$, lo que nos permite deducir que $m_l = m\rho_l/\rho = 1,26 \times 10^{-4}$ kg.

El radio de la bola se obtiene a partir de la densidad de la bola, $\rho = m/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$. Por tanto,

$$R = \left(\frac{m}{4\pi\rho/3}\right) = \left(\frac{4 \times 10^{-4}}{4\pi \times 8900/3}\right)^{1/3} = 2,2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Despejando la viscosidad en la primera ecuación:

$$\eta = \frac{(m - m_l)\,g}{6\pi R v} = \frac{(4 - 1,26) \times 10^{-4} \times 9,8}{6\pi \times 2,2 \times 10^{-3} \times 0,05} = 1,3\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}.$$

Problema 3.- Un depósito cilíndrico con una base de área S muy grande está abierto por arriba y lleno inicialmente de agua hasta una latura h_0. En la base hay un orificio de área a

(mucho menor que S) que se abre en el instante $t = 0$ por el que comienza a vaciarse el depósito. Calcule cómo varía con el tiempo la altura del agua en el depósito y cuánto tiempo tarda en vaciarse.

Solución:

Sea $h(t)$ la altura en un instante $t > 0$. En un intervalo de tiempo dt el volumen de agua que sale por el orificio es $av(t)dt$. En consecuencia, el nivel del agua bajará en el depósito una cantidad $dh(t)$ que debe cumplir: $Sdh(t) = av(t)dt$.

Es posible calcular la velocidad de salida del agua en el instante t usando el teorema de Bernoulli. Puesto que el tanque está abierto por arriba, la presión tanto en la superficie del agua como en el exterior es la atmosférica. Por otra parte, si el área del depósito S es muy grande y la del orificio a es pequeña, la altura del agua en el depósito variará lentamente. En este caso podemos aplicar el teorema de Bernoulli en la forma:

$$\rho g h(t) = \frac{1}{2}\rho v^2(t)$$

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

y, así,

$$S\,dh(t) = -a\sqrt{2gh(t)}\,dt$$

o

$$\frac{dh(t)}{dt}) - \frac{a\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h(t)}.$$

Esta es una ecuación diferencial muy sencilla de integrar por separación de variables:

$$\int \frac{dh(t)}{\sqrt{(h(t)}} = -\frac{a\sqrt{2g}}{S}\int dt$$

$$h(t) = 2\sqrt{h(t)} = -\frac{a\sqrt{2g}}{S}t + 2\sqrt{h_0}$$

Es decir, la altura del agua depende del tiempo en la forma:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2S}t\right)^2.$$

El depósito se habrá vaciado por completo en el instante $t = T$ tal que $h(T) = 0$, lo que implica

$$T = \frac{2S}{a}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}.$$

También es sencillo obtener la velocidad de salida del agua en el instante t:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2S}t\right) = v_0 - \frac{ag}{S}t$$

que decrece linealmente con el tiempo. Por supuesto, se puede comprobar que en el instante en el que el depósito queda vacío ($t = T$) la velocidad v se anula:

$$v(T) = v_0 - \frac{ag}{S}\frac{2Sh_0}{v_0} = 0.$$