CAPÍTULO 1: VARIABLES ALEATORIAS Y SUS DISTRIBUCIONES

En este capítulo el alumno debe abordar el conocimiento de un importante concepto, el de VARIABLE ALEATORIA, tipos de variables aleatorias y cómo se distribuye la *función de probabilidad* en estas variables aleatorias.

VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

El alumno debe entender bien este nuevo concepto. Una VARIABLE ALEATORIA es una función que asigna un valor numérico a cada suceso elemental del espacio muestral.

En función del número de valores que pueda tomar la variable aleatoria, distinguiremos dos tipos de variables aleatorias: de *tipo discreto* y de *tipo continuo.*

¿Cuál es la diferencia entre ambas? Una variable aleatoria de *tipo discreto* es aquella que toma un número finito de valores, e incluso puede tomar un número infinito, pero siempre que este número infinito sea numerable.
Por el contrario, una de *tipo continuo* tomará siempre un número infinito NO numerable de valores.

Distribución de probabilidad en variables aleatorias discretas

Este será el gran problema, pues una vez conocida la función de probabilidad, todo estará resuelto, ya que sabremos *cómo* se asigna la probabilidad a cada uno de los valores de la variable aleatoria, y cualquier otra probabilidad que nos puedan pedir será fácil su obtención.

Nosotros vamos a suponer que, en la mayoría de los casos, la información sobre *cómo* se distribuye la probabilidad de los diversos valores de la variable aleatoria va a ser un dato, y por tanto se nos dará como conocida, en cada caso, la función de probabilidad. (El *cómo* se haya obtenido dependerá del fenómeno aleatorio del que proceda, de la experimentación realizada, así como de los datos empíricos que sobre experimentaciones y situaciones similares se puedan poseer).

En las distribuciones de tipo discreto existen fundamentalmente dos métodos para asignar la función de probabilidad. Éstos son:

1.° *La función de cuantía.* Consiste en asignar a cada valor que tome la variable aleatoria la probabilidad (o «quantum» de probabilidad) que le corresponde. Y ello, siempre con los requisitos ya conocidos de que la probabilidad asignada a cada valor ha de ser siempre mayor o igual que cero; y que el total de la probabilidad asignada a la suma de todos los valores ha de valer uno. Es decir, si los valores que toma la variable aleatoria discreta son: x_1, x_2, ..., x_n, se deben cumplir las dos siguientes condiciones:

$$0 \le P(x_i) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1 \qquad i = 1,2,..., n$$

2.° *La función de distribución.* Es un método diferente al anterior y consiste en asignar probabilidades no a cada valor concreto (como hace la función de cuantía), sino asignar probabilidades a cada valor y a todos los valores que están a su izquierda, es decir, que son menores que él. La fun*ción* de distribución de una variable aleatoria discreta X, para un valor o punto concreto x, se representa por $F(x)$, y se define así:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i = x_1}^{n} P(X = x_i)$$

Vemos que representa la suma de las probabilidades del valor x y de todos los valores que sean menores que él.

El alumno debe razonar y vislumbrar cómo este método $F(x)$ de asignar probabilidades es un método operativo [al igual que lo era la función de cuantía: $P_i = P(X = x_i)$] y que nos permite calcular la probabilidad de cualquier suceso que nos puedan pedir.

Distribución de probabilidad en variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria continua necesariamente ha de tomar una infinidad NO numerable de valores. Al repartir el total de probabilidad 1 entre esa infinidad no numerable de valores, la probabilidad que le corresponderá será necesariamente cero. Es decir:

$P(x_i) = P(X = x_i)=0$

Y ello nos conduce a que el método de la función de cuantía $P(x_i)$ no tiene sentido en las distribuciones de tipo continuo. ¿Qué se hace entonces?

Se introduce un nuevo concepto: *la densidad de probabilidad.* Es el cociente -como tal densidad que es- entre la probabilidad asignada a ese punto, que hemos visto que vale cero, y la amplitud del intervalo cuando éste tiende a cero. La densidad de probabilidad desde un punto de vista conceptual nos daría una indeterminación (0/0) para cada valor de la variable y que se resolverá tomando el número que corresponda a cada valor en cada problema en cuestión.

Insistamos al alumno que la densidad de probabilidad NO es una probabilidad y, por tanto, puede perfectamente tomar valores mayores que uno. Se simboliza por $f(x)$.

Probabilidad elemental

Al multiplicar la densidad de probabilidad $f(x)$ asignada a un punto x por la expresión diferencial dx, obtendremos: $f(x)\cdot dx$. A esta expresión $f(x)\cdot dx$ se le llama «probabilidad elemental» y es la probabilidad de que la variable aleatoria continua tome valores comprendidos entre x y $x + dx$.

$$\textit{Probabilidad elemental} = f(x)\cdot dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

Si sumamos (en concepto matemático «integramos») todas las probabilidades debemos obtener lógicamente el total de la probabilidad, que es uno. y para sumar, utilizamos el símbolo sumatorio: $\sum$, o bien lo expresamos a través de una integral: I si estamos en una distribución continua con una infinitud NO numerable de valores. Este es el nuevo método que introducimos para las variables aleatorias continuas y que se llama el método de la *función* de densidad.

1.° *La función de densidad.* Para cada valor *x* de una variable aleatoria continua *X* se representa por *f(x).* Los dos requisitos que, necesariamente, ha de cumplir *f(x)* para ser una función de densidad son:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

El alumno debe entender esto con suma claridad.
Conocida la función de densidad todo está resuelto. Cualquier probabilidad que nos pidan estaremos en condiciones de poderla hallar. Así, por ejemplo, si nos piden cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria continua *X* tome valores comprendidos entre *a* y *b,* bastará con sumar («integrar» en nuestro caso) la probabilidad elemental *f(x)·dx* entre los valores *a* y *b.* Es decir:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x) \cdot dx$$

2.° *Función de distribución.* Designada por *F(x),* también en las distribuciones continuas nos servirá -al igual que lo hacía en las discretas- como función de probabilidad. En realidad, será la probabilidad asignada a todos los valores que están a la izquierda de *x* (son menores que *x).* O que van desde - 4 hasta *x.* Se expresa así:

$$F(x) = (Px \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$$

Como *«f(x)·dx»* es la *«probabilidad elemental»,* estamos calculando la probabilidad de que se nos presentan valores entre - 4 y x.

El alumno debe hacer todo tipo de ejercicios con las funciones de probabilidad que hemos señalado, hasta comprender perfectamente los conceptos. En el texto básico aparecen bastantes de ellos resueltos.

También debe entender la representación gráfica. Distinguiendo muy bien desde la vertiente gráfica qué es una probabilidad, qué significa una gráfica de densidad de probabilidad o qué puede representar una ordenada concreta en la gráfica de la función de distribución *F(x)* de una determinada variable aleatoria.

Propiedades de la función de distribución

El alumno debe reflexionar y comprender las propiedades que cumple toda función de distribución *F(x).* Y resolver conceptual y gráficamente todo tipo de problemas.

Relaciones entre la densidad de probabilidad *f(x)* y la función de distribución

El alumno debe tener interiorizada la relación que existe entre ambas funciones, y que es:

$$F(x) = (Px \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$$

VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

Aquí se abordará el estudio de *dos variables aleatorias.* Es decir, se estudian conjuntamente dos características de un fenómeno aleatorio.

Y para estudiar conjuntamente a las dos variables aleatorias, es decir, la variable aleatoria bidimensional, necesitaremos conocer cuál es la función de probabilidad conjunta de ambas variables.

Función de probabilidad bidimensional

De manera similar a como sucedía en la variable aleatoria unidimensional, también aquí tendremos variables aleatorias discretas y continuas.

Para las variables *aleatorias discretas,* tendremos dos formas de representar su función de probabilidad:

1. Función de cuantía:

$$P_{ji} = P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

2. Función de distribución:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(x_i, y_j)$$

que representa la suma de las probabilidades puntuales $P(x_i, y_j)$ hasta el valor *(x, y)* inclusive de la variable aleatoria bidimensional *(X, Y).*

Para las variables *aleatorias continuas* tendremos, al igual que en las variables unidimensionales, dos formas de cálculo:

1. Función de densidad de probabilidad. Se representará por *f(x, y)* y debe cumplir los dos requisitos:

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 1$$

2. Función de distribución. Simbolizada por *F(x, y)* y, como probabilidad acumulada que es, debe comprenderse bien que su expresi6n es:

$$F(x, y) = (PX \leq x, PY \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

¿Qué relación existe entre la *f(x,y)* y la *F(x,y)?*

Si expresamos la función de densidad conjunta *f(x,* y) en función de la función de distribución *F(x,*y), el alumno debe comprender bien que la relación que los liga es:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}$$

es decir, que la *f(x, y)* coincide con la derivada parcial segunda, respecto a *x* e *y*, de la función de distribución *F(x, y).*

y la función de distribución *F(x, y)* expresada a través de la *f(x, y)* será:

$$F(x,y)=(PX\le x,PY\le y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

Distribuciones marginales

Aquí también debe matizarse si nos referimos a una distribución de tipo discreto o bien de tipo continuo.

En las distribuciones marginales nos va a interesar conocer la distribución de probabilidad de una sola de las variables, pero sin tener en cuenta los posibles valores que pueda tomar la otra (es decir, «marginando» a la otra variable). Y ello se hará a partir de la información que nos proporciona la distribución conjunta de *(X, Y).*

Distinguimos si la distribución es discreta o continua.

Distribuciones discretas

El alumno debe estar en condiciones de comprender:

- ✓ *Funciones de cuantía marginal.* Referidas a *X* e *Y*, respectivamente, vienen expresadas por P_i Y P_j y tienen la siguiente expresi6n:

$$P_{i\cdot}=\sum_j P_{ij}=\sum_{y_j}P(X=x_i,Y=y_j)$$
$$P_{\cdot j}=\sum_i P_{ij}=\sum_{x_i}P(X=x_i,Y=y_j)$$

- ✓ *Funciones de distribución marginal.* Simbolizadas por *F* l(X) y *F 2(Y)'* respectivamente, el alumno debe comprender que sus expresiones son:

$$F_1(x)=F(x,+\infty)=P(X\le x,Y<+\infty)=\sum_{x_i\le x}P_{i\cdot}$$
$$F_2(x)=F(+\infty,y)=P(X\le+\infty,Y\le y)=\sum_{y_j\le y}P_{\cdot j}$$

Distribuciones continuas

En este caso, el alumno debe entender que tendremos que hablar de las funciones de densidad marginales y las funciones de distribución marginales. (Al ser distribuciones «continuas» deberemos sustituir el signo del sumatorio por el signo de la integral.)

✓ *Funciones de densidad marginales.* Simbolizadas por $f_1(x)$ y $f_2(y)$, se expresan así:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dx$$

[Al integrar la primera expresión respecto de y, el resultado final sólo dependerá de x. De ahí que en el primer miembro aparezca $f_1(x)$.]

✓ *Funciones de distribución marginales.* Sus expresiones son:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x) \cdot dx$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y) \cdot dy$$

Distribuciones condicionadas

En las distribuciones bidimensionales pueden resultar de interés el estudiar cómo se distribuye una de las variables cuando a la otra variable se le impone alguna condición. Ello nos conducirá al estudio de las *distribuciones condicionadas.* También aquí deberemos distinguir si estamos en presencia de una variable aleatoria de tipo discreto o de tipo continuo.

✓ *Distribuciones discretas.* El alumno entenderá que tendrá todo el sentido hablar de: las funciones de cuantía condicionadas y las funciones de distribución condicionadas.

  Funciones de cuantía condicionadas se expresan por: $P(x_i/y_j)$ y $P(y_j/x_i)$.

  Funciones de distribución condicionadas son: $F(x/y_j)$ y $F(y/x_i)$.

  Puesto que el alumno ya estudió en la *Introducción a la Estadística* el concepto de probabilidad condicionada, no deberá tener dificultad en comprender las expresiones a que equivalen las funciones condicionadas anteriores.

✓ *Distribuciones continuas.* Aquí cabrá hablar de las funciones de densidad condicionadas y las funciones de distribución condicionadas.

  Funciones de densidad condicionadas: se expresan por $f(x/y)$ y $f(y/x)$.
  Funciones de distribución condicionadas: expresadas por $F(x/y)$ y $F(y/x)$.

  Al ser distribuciones continuas, recordemos que la probabilidad exigirá siempre *«integrar»* la probabilidad elemental *«$f(x) \cdot dx$»*.

El alumno debe abordar las expresiones a que equivalen los conceptos expresados y consolidarlos con la realización de ejercicios prácticos. En el texto básico aparecen desarrollados diversos tipos de problemas.

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Este concepto guarda paralelismo con el concepto de independencia de sucesos, que abordamos en la *Introducción a la Estadística.*

También aquí deberá matizarse si hablamos de variables aleatorias discretas o continuas. Pues en cada caso, deberemos emplear la función de probabilidad que le sea propia. (Por ejemplo, el alumno deberá estar totalmente de acuerdo que no tiene sentido hablar de la densidad de probabilidad si la distribución es de tipo discreto.)

El alumno debe entender el requisito de independencia de dos variables aleatorias X e *Y.* Así, en función de que se esté utilizando la función de cuantía, la función de distribución o la función de densidad de probabilidad, *las variables X e Y serán independientes si se cumple que:*

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j) \qquad \forall (Px_i, y_j)$$

o bien

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad \forall (x, y)$$

o bien

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \qquad \forall (x, y)$$

El alumno debe tener soltura para efectuar ejercicios prácticos de este tipo.