



Universidad  
Rey Juan Carlos

# GRADO EN MATEMÁTICAS

## PROBABILIDAD

### TEMA 1

## EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Sonia Hernández Alonso

Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- El azar está muy presente en nuestras vidas, y el lenguaje incluye expresiones como *como probable*, *muy verosímil*, *incierto*, que responden a tales preguntas de una forma
- Sin embargo, en muchas ocasiones, este tipo de respuestas son insuficientes, necesitamos **cuantificar** tales juicios.
- La **teoría de la probabilidad es la disciplina científica que estudia los fenómenos que están sujetos a algún grado de incertidumbre**, es decir, **cualquier situación en la que interviene el azar**.
- Constituye la base sobre la que se contruye la estadística, proporciona herramientas para modelizar poblaciones, e y en general cualquier fenómeno en el que intervenga el



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Experimentos aleatorios y espacios muestrales.
- Sucesos aleatorios.
- Operaciones con sucesos aleatorios.
- Breve repaso de combinatoria.
- Extensión de unión e intersección a una cantidad infinita
- $\sigma$ -álgebras: definición y propiedades.
- Mínima  $\sigma$ -álgebra sobre una colección de sucesos.
- ¿Qué es la probabilidad? Diferentes enfoques para interp
- Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov, 193:
- Propiedades de la probabilidad.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Experimentos aleatorios, y espacios muestrales

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Experimentos aleatorios

- El objetivo de la probabilidad es extraer conclusiones en los que **interviene el azar**.
- **Definición:** Un **experimento aleatorio** es cualquier fenómeno, aunque todos sus posibles resultados sean conocidos, **es posible predecir con antelación** cuál de ellos va a ocurrir.
- Es común contraponer los experimentos aleatorios a los **deterministas**, que son aquellos en los que de antemano se puede predecir con certeza cuál va a ser su resultado.
- Al repetir bajo las mismas condiciones un experimento el resultado que se obtiene es siempre el mismo.

Sin embargo, distintas repeticiones de un experimento aleatorio pueden tener diferentes resultados.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Espacio muestral

- El primer paso para estudiar un experimento aleatorio es determinar los resultados que pueden aparecer.
- **Definición:** El **espacio muestral** de un experimento aleatorio es el **conjunto de todos sus posible resultados**.
- **Notación:** Denotaremos el espacio muestral mediante la letra  $S$ .

Las letras  $S$  y  $E$  también se utilizan con frecuencia para denotar el espacio muestral.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Ejercicio 1:** Determinar el espacio muestral de los siguientes eventos aleatorios, e indicar el cardinal de cada uno de ellos:

1. Ganador del gordo de la lotería de navidad de este año
2. Lanzamiento de una moneda
3. Lanzamiento de una moneda dos ( $/tres/n$ ) veces consecutivas
4. Lanzamiento simultáneo de dos monedas iguales
5. Lanzamiento simultáneo de  $n$  monedas iguales
6. Extracción de  $n$  cartas de una baraja española
7. Lanzamiento de una moneda hasta obtener una cara
8. Proporción de votantes de *Podemos* en un municipio esc
9. Tiempo que transcurre entre la llegada de dos e-mails a



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Cardinal de los espacios muestrales

- En el ejercicio anterior puede apreciarse que hay experimentos que tienen espacios muestrales con un número de resultados **finito** (apartados 1 a 6) y otros en los que el cardinal es infinito (apartados 7, 8 y 9).
- Pero además observamos que hay una diferencia evidente en el cardinal del espacio muestral de apartado 7 con respecto a los apartados 8 y 9.

En el primer caso (apartado 7) el número de elementos de  $\Omega$  es **numerable**, mientras que en los dos últimos casos (apartados 8 y 9) el cardinal es **no numerable**.

- A los conjuntos numerables se les llama también conjuntos numerables. Su cardinal, que coincide, por ejemplo, con el cardinal de  $\mathbb{Q}$ , se denota  $\aleph_0$ , que es el menor cardinal infinito.
- El cardinal de los conjuntos no numerables es superior al cardinal de los conjuntos numerables. El cardinal de los elementos de  $\mathbb{R}$  se denota  $\aleph_1$ , y coincide, por ejemplo, con el cardinal de cualquier intervalo  $(a, b)$  con  $a < b$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





# Espacios muestrales: ejercicio

- **Ejercicio 2:** En una fábrica se inspeccionan las probetas se clasifican como "defectuosas" ( $D$ ) o "no defectuosas"

La inspección de probetas continúa hasta llegar a la primera probeta defectuosa.

1. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿cuántos elementos tiene?
2. Escribir los elementos del suceso  $A =$  "la primera probeta defectuosa aparece antes de la sexta inspección"
3. Sea  $B =$  "la primera probeta defectuosa aparece en una inspección cuyo orden de numeración es par".

Escribir los elementos del suceso  $A \cap B$ .

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Sucesos aleatorios

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sucesos aleatorios

- Un **suceso aleatorio** o **evento aleatorio** es cualquier subconjunto del espacio muestral  $\Omega$ , es decir, cualquiera de las cosas que pueden **suced**er (o no suceder) al realizar un experimento aleatorio.

$A$  es un suceso aleatorio  $\equiv A \subset \Omega$  (*definición propia*)

- Nótese que, los sucesos aleatorios, como conjuntos que son subconjuntos de  $\Omega$ , **se escriben tan con letras mayúsculas.**
- **Un suceso  $A$  ocurre** si el resultado del experimento aleatorio pertenece a los elementos de  $A$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Algunos tipos de sucesos aleatorios

- Los sucesos aleatorios pueden contener uno o varios de los posibles del experimento.
- A los sucesos que tienen un único elemento se les da el nombre de **sucesos elementales**.

- El **suceso seguro** es el suceso que siempre ocurre.

Puesto que, por definición de suceso, el suceso seguro está incluido en el espacio muestral, **el suceso seguro coincide con el conjunto universal**.

- El **suceso imposible** es aquel que nunca se verifica con el resultado del experimento.

Dado que, de nuevo por la definición de suceso, el suceso imposible debe estar incluido en el espacio muestral, **el suceso imposible coincide con el conjunto vacío,  $\emptyset$** .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Operaciones con sucesos aleatorios

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Complementario de un suceso aleatorio

- Dado un evento  $A \subset \Omega$ , el suceso **no ocurre  $A$**  está formado por los resultados que no pertenecen a  $A$ , y recibe el nombre de **complementario** o suceso contrario de  $A$ .

Se denota por  $A^c$  o por  $\bar{A}$ :

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

- **Ejercicio 3:** Demostrar que  $(A^c)^c = A$ .

resolución:.....pizarra

- **Ejercicio 4:** Consideremos el espacio muestral  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ,

$$A = (7, 10],$$

$$B = [8, 15],$$

$$C = \{7, 9, 11, 13\}.$$

Determinar  $A^c$ ,  $B^c$  y  $C^c$ .

resolución:.....pizarra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Operaciones básicas con sucesos aleatorio

- Dados dos eventos  $A, B \subset \Omega$ :

- La **unión** de  $A$  y  $B$ ,  $A \cup B$ , es el suceso  $A$  o  $B$  es de que se verifica cuando ocurre al menos uno de los dos

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ó } \omega \in B\}.$$

Si ocurre  $A \cup B$ , o bien ocurre  $A$  o bien ocurre  $B$ , posibilidad de que ocurran ambos.

- La **intersección**  $A$  y  $B$ ,  $A \cap B$ , es el suceso  $A$  y  $B$  es de que se verifica cuando ocurren ambos sucesos al mismo

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y además } \omega \in B\}.$$

Si ocurre  $A \cap B$ , ocurren tanto  $A$  como  $B$ .

- **Ejercicio 5:** Consideremos el espacio muestral  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ,

$$A = (7, 10], \quad B = [8, 15], \quad C = \{7, 9, 11,$$

Determinar  $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A^c \cup B, A^c$

resolución:.....pizarra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Sucesos incompatibles

- **Definición:** Dados  $A, B \subset \Omega$ , se dice que son **sucesos incompatibles** si no tienen ningun elemento en común, es decir, si son **disjuntos** (o mutuamente excluyentes).

$$A, B \text{ incompatibles} \equiv A \cap B = \emptyset$$

- Si dos sucesos son incompatibles, **no pueden suceder al mismo tiempo.**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



- Dados los sucesos  $A, B, C \subset \Omega$ , se verifican las siguientes

- **Conmutativas:**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Asociativas:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Distributivas:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Leyes de Morgan

- Dados dos sucesos  $A, B \subset \Omega$ , se verifica

$$1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

demostración:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Otras operaciones con sucesos aleatorios

- La **diferencia** de  $A$  y  $B$ , que se denota  $A - B$  o  $A \setminus B$ , es el suceso que se verifica cuando ocurre  $A$  pero no ocurre  $B$ :

$$A \setminus B = A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y adem\u00e1s } \omega \notin B\} =$$

- La **diferencia sim\u00e9trica** de  $A$  y  $B$ , que se denota  $A \Delta B$ , es el suceso que se verifica cuando o bien ocurre solamente  $A$ , o solamente  $B$ .

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- Ejercicio 6:** Consideremos el espacio muestral  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ,

$$A = (7, 10],$$

$$B = [8, 15],$$

$$C = \{7, 9, 11, 13\}.$$

Determinar  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $B \setminus C$  y  $B \Delta C$ .

resoluci\u00f3n:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTOR\u00cdAS T\u00c9CNICAS ONLINE  
LLAMA O ENV\u00cdA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Operaciones con sucesos: ejercicio

- **Ejercicio 7:** Dados tres sucesos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , escribir expresiones booleanas para los siguientes eventos:
  1. Sólo ocurre  $A$ .
  2. Al menos dos sucesos entre  $A$ ,  $B$  y  $C$  ocurren.
  3. Sólo un suceso de los tres ocurre.
  4. Ninguno de los tres ocurre.

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Breve repaso de combinatoria

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejercicio 8: repasando un poco como se c

- ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?
- Con 3 mujeres y 5 varones:
  1. ¿Cuántos tríos que tengan dos personas del mismo sexo pueden formar?
  2. ¿Cuántas filas de 8 personas se pueden formar si las personas del mismo sexo no pueden ocupar ni el primer ni el último lugar?
  3. ¿Cuántas filas de 7 personas se pueden formar si personas del mismo sexo no pueden ocupar lugares consecutivos?
- El alfabeto español consta de 24 consonantes y 5 vocales. Calcular la cantidad de palabras con cuatro consonantes y tres vocales diferentes que es posible formar (admitiendo palabras, aunque no tengan significado y/o sean impronunciadas).



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Ejercicio 8 (continuación)

- ¿Cuántas palabras diferentes se pueden construir utilizando las letras de la palabra '**statistics**'?
- ¿Cuántos caracteres se pueden formar con los puntos y rayos de código Morse, si en cada uno entran hasta 4 de tales elementos?
- ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si 3 de ellas deben estar juntas?

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Extensión de unión e intersección a una cantidad infinita de sucesos

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Uniones e intersecciones de infinitos conjuntos

- Las operaciones de unión e intersección se pueden extender a una colección infinita de sucesos.
- Dada una sucesión de sub-conjuntos de  $\Omega$ ,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

- Ejercicio 9:** Sea  $\Omega = \mathbb{R}$ , y definamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n = \left[ \frac{1}{n}, 1 \right]$$

Calcular  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  y  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejercicio: uniones e intersecciones infinitas

- **Ejercicio 9\***: Consideremos el espacio muestral  $\Omega = [7, 9]$ ,  
cesión de conjuntos

$$H_n = \left[ 7 + \frac{1}{n}, 9 + \frac{1}{n} \right),$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

Calcular

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} H_k$

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Uniones e intersecciones no numerables

- La unión e intersección también pueden definirse para no numerable de sucesos.
- Ejercicio 10:** Sea  $\Omega = \mathbb{R}$ , y consideremos, para cada  $a \in \mathbb{R}^+$

$$B_a = [0, a]$$

Calcular  $\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} B_a$  y  $\bigcap_{a \in \mathbb{R}^+} B_a$ .

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejercicio: uniones e intersecciones infinitas

- **Ejercicio 11:** Consideremos un juego al que, al menos de una vez, es posible jugar infinitas veces, y llamemos  $\tau$  a cualquier uno de los posibles resultados.

Para cada  $i \in \mathbb{N}$  definimos el suceso

$$A_i = \{\tau \mid \text{en la } i\text{-ésima jugada ocurre el resultado } \tau\}$$

Definimos además el evento

$$B = \{\tau \mid \text{el resultado } \tau \text{ sólo ocurre en un número finito de jugadas}\}$$

Utilizando las operaciones básicas de conjuntos, (uniones, intersecciones y complementaciones), expresar el suceso  $B$  en función de los sucesos  $A_i$ .

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# $\sigma$ -álgebras: definición y propiedades

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Definición de $\sigma$ -álgebra (sigma-álgebra)

- **Definición:** Sean  $\Omega$  un espacio muestral y  $\mathcal{A}$  una **colección de conjuntos** de  $\Omega$  ( $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ).

Se dice que  $\mathcal{A}$  es **una sigma-álgebra** sobre  $\Omega$  si verifica las siguientes propiedades:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Si  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

- Es decir, una  $\sigma$ -álgebra es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que **contiene al suceso seguro** y es **cerrada bajo complejiones y uniones numerables**.
- Sobre un mismo espacio muestral  $\Omega$  pueden definirse **infinitas**  $\sigma$ -álgebras.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Ejemplos de $\sigma$ -álgebras para lanzamiento de dado

- Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, cuyo espacio muestral es  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Sobre este espacio muestral podemos definir varias  $\sigma$ -álgebras, por ejemplo:
  1.  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$  ( $\sigma$ -álgebra trivial)
  2.  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
  3.  $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$  (mayor  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ )
- **Ejercicio 12:** Comprobar que  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  y  $\mathcal{A}_3$  son, efectivamente,  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$ , y proponer otra  $\sigma$ -álgebra sobre este mismo espacio muestral.

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Propiedades de las $\sigma$ -álgebras

- **Proposición 1:** Sean  $\Omega$  un espacio muestral, y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$ .

Entonces:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

demostración:.....pizarra

- Nótese que el segundo apartado de esta proposición esta diciendo que los  **$\sigma$ -álgebras también son cerradas bajo intersecciones**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Más propiedades de las $\sigma$ -álgebras

- **Proposición 2:** Sean  $\Omega$  un espacio muestral, y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra en  $\Omega$ .

Entonces:

1. Si  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$ .

demostración:.....pizarra

- Esta proposición establece que **las  $\sigma$ -álgebras también son cerradas bajo diferencias y diferencias simétricas.**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Intersección de $\sigma$ -álgebras

- **Proposición 3:** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^*$  dos  $\sigma$ -álgebras de conjuntos en el mismo espacio muestral  $\Omega$ .

Entonces  $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$  es también una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .

demostración:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Mínima $\sigma$ -álgebra

## sobre una colección de sucesos

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Consideremos un espacio muestral  $\Omega$  y una colección de s del mismo,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .

- **Definición:**

La  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$  es la colección de sucesos

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \}$$

- A  $\sigma(\mathcal{C})$  también se le da el nombre de **mínima  $\sigma$ -álgebra**
- **Ejercicio 13:** Dado un espacio muestral  $\Omega$ , consideremos incompatibles,  $A, B \subset \Omega$  con  $A \cap B = \emptyset$ , y sea  $\mathcal{C} = \{A, B\}$

Determinar cuál es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ , es decir

resolución:.....pizarra

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Algunas propiedades de la mínima $\sigma$ -álgebra

- **Ejercicio 13\***: Dado el espacio muestral  $\Omega = \{x, y, z, t\}$  y la colección de subconjuntos  $\mathcal{C} = \{\{x\}, \{x, z\}\}$ .

Determinar cuál es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ , es decir

resolución:.....pizarra

- Observemos que:
  - Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos colecciones de subconjuntos de  $\Omega$

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2,$$

entonces

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2).$$

- Si  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra entonces

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# La $\sigma$ -álgebra de Borel

- En el **Tema 3** analizaremos con detenimiento una  $\sigma$ -álgebra fundamental en cálculo de probabilidades: la denominada **sigma-álgebra de Borel**. Por el momento nos limitaremos a definirla.
- Consideremos la colección de todos los intervalos abiertos  $(a, b)$  con  $a < b$ .
- A la mínima  $\sigma$ -álgebra sobre esta colección de conjuntos se le da el nombre de  **$\sigma$ -álgebra de Borel**, y se denota por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , o simplemente por  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \{ (a, b) \subset \mathbb{R} : a \leq b \}$$

- A los elementos de  $\mathcal{B}$  se les llama **borelianos**, conjuntos borelianos, conjuntos Borel-medibles.
- Como veremos en el **Tema 3** hay formas equivalentes de definir la sigma-álgebra de Borel.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





# ¿Qué es la probabilidad?

## Diferentes enfoques para interpretarla

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Para estudiar los fenómenos aleatorios trataremos de **numéricos la “posibilidad” de que ocurra** cada suceso.
- Las probabilidades **se miden en una escala de 0 a 1**.
- Así, sucesos con probabilidad 0 serán sucesos imposibles, sucesos con probabilidad 1 serán sucesos seguros (que ocurren con certeza).
- Todos los eventos aleatorios tendrán una **probabilidad en** una manera que **cuanto mayor es su posibilidad de ocurrir es su probabilidad**.
- Antes de definir formalmente la probabilidad, comentaremos formas de interpretarla.
- Existen **distintas filosofías** que, aunque no son relevantes para el cálculo de probabilidades propiamente dicho, sí lo son en la **estadística**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70





- En muchas ocasiones, por razones de **simetría** física o los posibles resultados de un experimento resultan ser bastante verosímiles.
- En estos casos podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso aleatorio  $A$  mediante la **regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

- Este enfoque es muy común en experimentos aleatorios que tienen que ver con **juegos de azar**.
- **Limitaciones del enfoque clásico:** en muchas ocasiones los sucesos no son equiprobables, y este concepto de probabilidad no resulta aplicable. Por ejemplo, este enfoque no sirve para calcular la probabilidad de que mi equipo gane la liga.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

- Otra aproximación al concepto de probabilidad es el **frecuentista**, que resulta muy útil para **experimentos que se repiten indefinidamente** bajo condiciones similares.
- En tales casos, se observa que, **a medida que aumenta el número de repeticiones, las frecuencias relativas con las que el suceso  $A$  ocurre, tienden a estabilizarse** alrededor de una cantidad constante.
- Este **valor límite** puede interpretarse como la probabilidad de que ocurra el suceso  $A$ .
- Más concretamente: supongamos que un suceso  $A$  ocurre  $n_A$  veces en  $n$  repeticiones del experimento. Entonces puede definirse

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n},$$

siempre y cuando dicho límite exista.



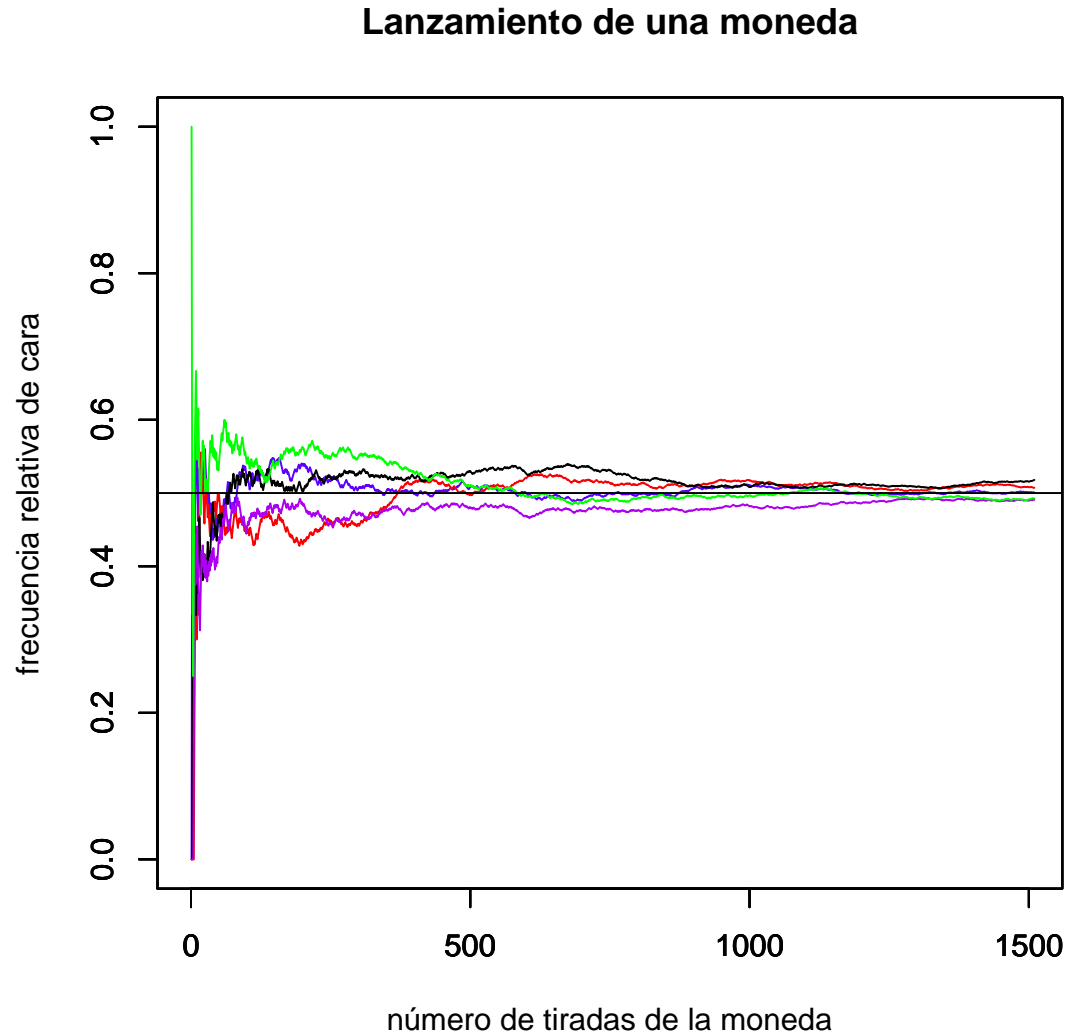
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Ejemplo: interpretación frecuentista

- El siguiente gráfico representa la evolución de la frecuencia de las caras obtenidas en lanzamientos sucesivos de una moneda



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

0

# Limitaciones de la interpretación frecuente

- En la práctica no puede repetirse un experimento un número de veces, sino que, en el mejor de los casos, se puede **número grande de repeticiones**.
- Por ejemplo, si se lanza un dado 10000 veces y se obtiene el 6, tiene sentido decir que la probabilidad de obtener 6 dado es aproximadamente 0,151.
- Sin embargo, **cuando el número de repeticiones es pequeño parece de sentido emplear este razonamiento**.
- Así por ejemplo, si se lanza un dado en cinco ocasiones ningún 4, no debe concluirse que la probabilidad de que salga 4 en la próxima tirada es  $0/5 = 0$ .
- Y además, en muchos casos, **no es posible repetir el experimento muchas veces** (o no es recomendable).
- Por ejemplo, no se puede (o **no se debe**) estimar la probabilidad de morir jugando a la ruleta rusa repitiendo muchas veces el

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70





# Pero, ¿cómo se define formalmente la prob

URJC

- Al margen de estos tres enfoques o interpretaciones, desde la perspectiva matemática, se precisa una **definición formal de probabilidad**.
- La definición que se utiliza hoy en día está basada en tres enfoques que fueron propuestos por el matemático ruso **Andréi N. Kolmogórov** en el año 1933.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov, 1933)

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Espacios probabilizables

- Sea  $\Omega$  un espacio muestral y  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .
- **Definición:**

El par  $(\Omega, \mathcal{A})$  recibe el nombre de **espacio probabilizable**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Definición axiomática de probabilidad

- Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio probabilizable.
- **Definición:** (axiomatica de Kolmogorov)

Se dice que una función  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  es una **probabilidad** si verifica las siguientes propiedades:

- $P(A) \geq 0$  para cualquier suceso  $A \in \mathcal{A}$ .
- $P(\Omega) = 1$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  son sucesos incompatibles dos a dos,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para cualquier } i \neq j,$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

- La terna  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  recibe el nombre de **espacio probabi**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 - - -  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplos de funciones de probabilidad

- Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire, con espacio muestral  $\Omega = \{C, X\}$ , y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Ejercicio 14:** Determinar cuáles son todas las posibles probabilidades sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

resolución:.....pizarra

- Sea un experimento aleatorio con  $\Omega = \mathbb{N}^+$  y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Ejercicio 15:** Proponer un ejemplo de función de probabilidad sobre el espacio probabilizable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 - - -  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Propiedades de la probabilidad

Sonia Hernández Alonso  
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Propiedades de la probabilidad

- **Proposición 4:** Sean  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio probabilizable y bilidad sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Entonces:

- 1) Para cualquier suceso  $A \in \mathcal{A}$  se verifica  $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 2)  $P(\emptyset) = 0$ .

demostración:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Otras propiedades de la probabilidad

URJC

- **Proposición 5:** Sean  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio probabilístico y dos sucesos cualesquiera.

Entonces:

1)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

2)  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ .

3) Si  $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ .

4) Si  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$  .

5)  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

demostración:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
- - -  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Propiedades de la probabilidad: ejercicios

- **Ejercicio 16:** Dado el espacio muestral  $\Omega = \{a, b, c\}$ ,  $P(\{a, b\}) = 0,7$  y  $P(\{b, c\}) = 0,6$ . Calcular las probabilidades de uno de los sucesos elementales.

resolución:.....pizarra

- **Ejercicio 17:** Supongamos que  $A$  y  $B$  son sucesos incompatibles con  $P(A) = 0,3$  y  $P(B) = 0,5$ . Calcular  $P(A^c \cap B^c)$ .

resolución:.....pizarra

- **Ejercicio 18:** En cierta universidad, el 65% de los alumnos habla inglés, el 30% habla francés y el 10% habla ambos idiomas. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar hable uno de estos idiomas?

resolución:.....pizarra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

# Propiedades de la probabilidad: ejercicios

- **Ejercicio 19:** Consideremos un dado cargado para el que las probabilidades de los posibles resultados del lanzamiento vienen dadas por

$$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = a,$$
$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = b.$$

Se sabe además que la probabilidad de que el resultado del lanzamiento sea al menos 4, es  $5/12$ .

Calcular la probabilidad de que al lanzar este dado se obtenga un resultado inferior a 3.

resolución:.....pizarra

- **Ejercicio 20:** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio probabilístico y se sabe que  $P(A) = 1/3$  y  $P(B^c) = 1/4$ , ¿**pueden** ser disjuntos  $A$  y  $B$ ?

resolución:.....pizarra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Propiedades de la probabilidad: ejercicios

- **Ejercicio 21:** Sean un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , y  $A, B$  eventos aleatorios  $A, B \in \mathcal{A}$ .

Demostrar que

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c).$$

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

5