



Universidad
Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 2

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Sonia Hernández Alonso

Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Introducción

- En el tema anterior hemos visto diferentes enfoques para el concepto de probabilidad, una definición formal de la misma y de las propiedades que se derivan de esta definición.
- En este tema analizaremos **cómo calcular probabilidades en situaciones reales**.
- Nos centraremos especialmente en los **espacios muestrales**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, cursive font. The text is set against a light blue background that resembles a stylized map of the city of Cartagena, with a yellow and orange arrow-like shape pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Consideremos un espacio probabilístico, (Ω, \mathcal{A}, P) , con

$$\text{card}(\Omega) < \infty$$

- En estos casos, lo más habitual es tomar como σ -álgebra de todos los posibles subconjuntos de Ω , es decir,

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

- Puesto que Ω es finito, cualquier suceso aleatorio $A \in \mathcal{A}$ finito, es decir, estará formado por una colección de $r < \infty$ elementos de Ω ,

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_r}\} \quad \text{para algún } r < \infty$$

- Por tanto la probabilidad de dicho evento A será la sumabilidad de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen,

$$P(A) = P(\{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_r}\}) = \sum_{i=1}^r P(\omega_{n_i}).$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



- Espacios equiprobables. Regla de Laplace.
- Probabilidad condicionada.
- Regla de la multiplicación.
- Independencia de sucesos.
- Teorema de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.
- Probabilidad de la unión de m sucesos.
- Problemas de repaso de cálculo de probabilidades.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Espacios equiprobables

Regla de Laplace

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

¿Qué es un espacio equiprobable?

- En muchas ocasiones, por razones de simetría física o lógicas, los resultados posibles de un experimento tienen las mismas probabilidades de ocurrir.
- Por ejemplo en el sorteo de la ONCE todos los números tienen la misma probabilidad de obtener el premio; o al lanzar un dado todos los valores de 1 a 6 tienen la misma posibilidad de salir.
- Se dice por ello que estos espacios muestrales son **equiprobables**.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The text is positioned above a blue and orange graphic element that resembles a stylized arrow or a banner pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Definición: ¿Qué es un espacio equiprob

- **Definición:** Dado un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) con

$$\text{card}(\Omega) < \infty,$$

diremos que se trata de un **espacio equiprobable** si para cada elemento elemental $\omega \in \Omega$ se verifica

$$P(\omega) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Regla de Laplace

- En los espacios equiprobables puede calcularse la probabilidad de un suceso aleatorio como el cociente entre el número de casos favorables al mismo y el número total de casos posibles.
- Sea (Ω, \mathcal{A}, P) **un espacio equiprobable**.

Entonces la probabilidad de cualquier suceso $A \subset \Omega$ viene dada por

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{cardinal}(\Omega)},$$

o, expresado de otro modo, por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo: aplicación de la regla de Laplace

- **Ejercicio 1:** Se tiran dos dados, uno blanco y otro negro. Se desea calcular probabilidades relativas a este experimento.

Como el espacio muestral,

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

es equiprobable, podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso utilizando la regla de Laplace.

Calcular las siguientes probabilidades:

- $P(\text{sacar mas puntuación en dado blanco que en negro})$
- $P(\text{la suma de las puntuaciones es } 2, 3 \text{ ó } 12)$
- $P(\text{la mayor puntuación de los dos dados es } 5)$

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

¿Cómo contar los casos?

- Muchas veces el recuento de los casos posibles y los favorables es más complicado que en los ejemplos anteriores.
- Supongamos, por ejemplo, que en lugar de lanzar dos dados lanzamos cinco dados, y queremos calcular la probabilidad de que la suma de las puntuaciones esté entre 10 y 20.

Esta probabilidad puede calcularse usando la regla de Laplace, pero contar los casos directamente resulta muy complejo.

- En estas ocasiones conviene hacer uso de la **combinatoria** para contar el número de casos posibles y el de los casos favorables.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Otro ejemplo de aplicación de la regla de

URJC

- **Ejercicio 2:** En una residencia de estudiantes se alojan 4 Concedoras de la contaminación que genera el abuso de ellas autilizan el transporte público para ir a la Universidad 4, sin embargo, recurren diariamente a sus coches para a

Un sociólogo está analizando si las estudiantes actuales tos con menor impacto ecológico. Por ello acude a la re encuestar a algunas estudiantes. Una vez allí decide ent 3 primeras a las que encuentre.

- a) Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de las entrevistadas utilicen diariamente el transporte público

Solución: 0.5091

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las estudiantadas acuda a la universidad en coche?

Solución: 0.7455

resolución:.....pizarra

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Otro ejemplo de aplicación de la regla de

- **Ejercicio 3:** Un edificio consta de 9 pisos y planta baja. Se cogen el ascensor en el bajo. Suponiendo que para cada siete personas, la probabilidad de bajar del ascensor en cada uno de los 9 pisos es la misma, calcular:

1. La probabilidad de que todas dejen el ascensor en el mismo piso.

Solución: 1.88×10^{-6}

2. La probabilidad de que las siete se bajen del ascensor en pisos diferentes.

Solución: 0.03793

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Otro ejemplo de aplicación de la regla de

- **Ejercicio 4:** Se introducen al azar (y con posibilidad de reintroducción) 5 bolas en 8 urnas.

1. ¿Cual es la probabilidad de que las 5 bolas de introducción caigan en la misma urna?

Solución: 0.0002

2. ¿Cual es la probabilidad de que al menos una urna tenga una o más bolas?

Solución: 0.7949



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Otro ejemplo: coincidencia de cumpleaños

- **Ejercicio 5:** ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de personas haya alguna coincidencia de cumpleaños

Suponer que, para cada persona, es igual de probable haber nacido en cualquiera de los 365 días del año.



resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Solución: coincidencia de cumpleaños

$P(\text{alguna coincidencia})$

$= 1 - P(\text{ninguna coincidencia})$

$= 1 - \frac{\text{n}^{\circ} \text{ combinaciones de fechas para 30 cumpleaños sin coincidencias}}{\text{n}^{\circ} \text{ combinaciones de fechas para 30 cumpleaños}}$

$= 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}}$

$= \boxed{0.7063}$

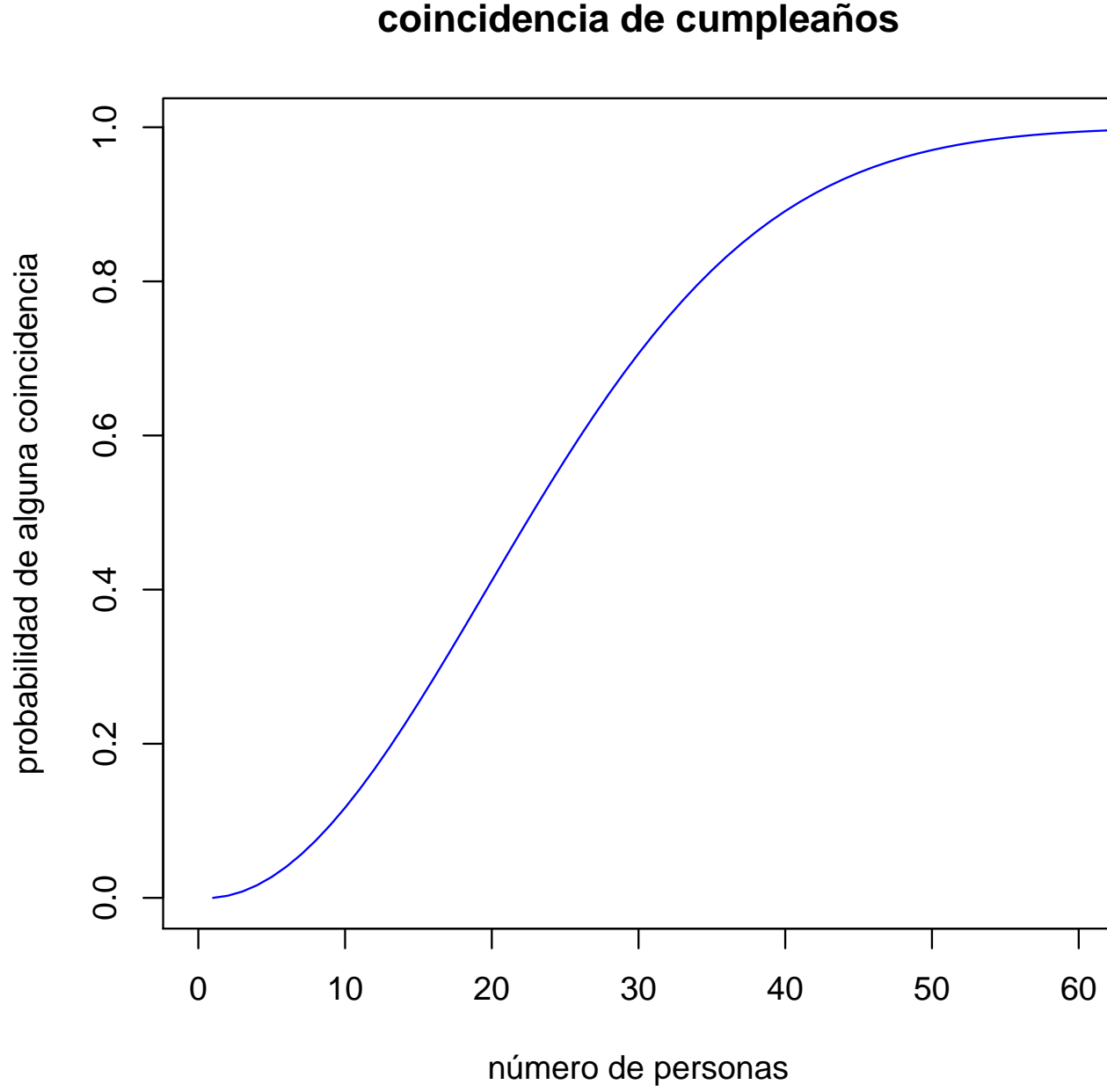
- Así pues, con 30 personas, la probabilidad de que haya alguna coincidencia en los cumpleaños es del 70.63 %.
- El gráfico de la página siguiente representa la probabilidad de que haya alguna coincidencia en función del número de personas con cumpleaños.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Gráfico: coincidencia de cumpleaños



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Limitaciones de la regla de Laplace

- Obsérvese que **la regla de Laplace no puede aplicarse a las probabilidades en cualquier experimento aleatorio**, ya que en algunas ocasiones los espacios muestrales no son equiprobables.
- Por ejemplo el espacio muestral del experimento consistente en lanzar simultáneamente dos monedas iguales,

$$\Omega = \{\text{dos caras, una cara y una cruz, dos cruces}\}$$

consta de tres elementos.

- Sin embargo estos tres sucesos elementales no son igualmente probables, ya que

$$P(\text{dos caras}) = P(\text{dos cruces}) = \frac{1}{4},$$

mientras que

$$P(\text{una cara y una cruz}) = \frac{1}{2}.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Probabilidad condicionada

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Actualizando la información disponible

- En muchas ocasiones, cuando se está calculando la probabilidad de un suceso, aparece nueva información que **cambia o altera** las posibilidades de que ocurra dicho evento.
- Supongamos por ejemplo que se lanza un dado equilibrado y se apuesta a **pares o nones**. Nuestra intención inicial es apostar a **números impares**. Usando la regla de Laplace tenemos

$$P(\text{impar}) = \frac{3}{6} = 0.5 = P(\text{par}),$$

por lo que la apuesta que tenemos en mente es razonable.

- Supongamos que **alguien nos dice que el resultado del dado ha sido un número mayor que dos**. ¿Preferiríamos cambiar nuestra apuesta antes de ver el resultado?
- ¿Y si se nos informa de que el resultado obtenido es un número mayor que tres?



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Definición de probabilidad condicionada

- El conocimiento de que ha ocurrido cierto suceso B puede cambiar la **probabilidad de que se verifique otro suceso A** , y en general, la ocurrencia de B cambiará el número de casos favorables al suceso A en el experimento, y también el número de casos favorables al suceso B .
- La idea de **probabilidad condicionada permite incorporar la información**, relevante para el cálculo de la probabilidad de un suceso, que se obtiene al conocer que ha ocurrido otro suceso.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The text is positioned above a blue and orange graphic element that resembles a stylized arrow or a banner pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Definición de probabilidad condicionada

- **Definición:** Dado un espacio probabístico (Ω, \mathcal{A}, P) , y $A, B \in \mathcal{A}$, con $P(B) > 0$, se define la **probabilidad cond** suceso A sabiendo que ha ocurrido B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Observación:** Esta definición **sólo tiene sentido si** $P(B) > 0$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Probabilidad condicionada: ejemplo

- **Ejercicio 6:** Para el lanzamiento un dado equilibrado, calcular:
 - $P(\text{lanzamiento impar} \mid \text{lanzamiento} \geq 2)$,
 - $P(\text{lanzamiento impar} \mid \text{lanzamiento} \geq 3)$.
 - $P(\text{lanzamiento múltiplo de 3} \mid \text{lanzamiento par})$.
 - $P(\text{lanzamiento par} \mid \text{lanzamiento múltiplo de 3})$.

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Probabilidad condicionada: ejemplo

- **Ejercicio 7:** Se han extraído al azar, y sin reemplazamiento, dos naipes de una baraja española (que consta de 40 naipes divididos en cuatro palos: espadas, bastos, copas y oros). Una persona que estaba presente en esta extracción ha afirmado que alguno de los naipes seleccionados es del palo de espadas. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de espadas seleccionadas sea menor que 3?

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Regla de la multiplicación

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Regla de la multiplicación

- Consideremos dos sucesos $A, B \subset \Omega$ con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$
- La definición de probabilidad condicionada implica que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

y también que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$$

- Es decir, la probabilidad de que ocurran dos sucesos a calcularse como la probabilidad de que ocurra uno cualquiera multiplicada por la probabilidad de que ocurra el otro suceso que ha ocurrido el primero.
- Nos referiremos a este resultado como **regla de la multiplicación**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Ejemplo: mujer y desempleada

- **Ejercicio 8:** En cierto país, el 40 % la población está mujeres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 28 % de las mujeres está en paro.

Un estudio requiere contactar con una **mujer que esté desempleada**.

Si se selecciona al azar a cualquier persona dentro de un grupo de 100 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona cumpla los requisitos del estudio?



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Solución: mujer y desempleada

- Consideremos los sucesos
 - $D =$ "la persona seleccionada está desempleada"
 - $M =$ "la persona seleccionada es una mujer"

Queremos calcular $P(M \cap D)$, o lo que es lo mismo, $P(M \cap D)$

El enunciado nos indica que

$$P(M) = 0.4$$

$$P(D|M) = 0.28$$

Aplicando la regla de la multiplicación se obtiene que la probabilidad de que la persona seleccionada sea una mujer desempleada es

$$P(M \cap D) = P(M)P(D|M) = 0.4 \times 0.28 = 0.112$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Extensión de la regla de la multiplicación

URJC

- La regla de la multiplicación **se puede extender a tres o más** eventos de Ω :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B|A) P(C|A, B),$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) P(B|A) P(C|A, B) P(D|A, B, C),$$

etc.

- Esto facilita el cálculo de probabilidades de eventos en Ω que van sucediendo secuencialmente, como es el caso de los sucesos que siguen.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The text is positioned above a blue and orange graphic element that resembles a stylized arrow or a banner pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: extracción de tres cartas de la b

- **Ejercicio 9:** La baraja española consta de 40 cartas de 4 palos. Se van a seleccionar al azar tres cartas de una baraja de este tipo. Las cartas se elegirán sin reemplazamiento, es decir, cuando se saca una carta se queda fuera de la baraja.
 1. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas sean corazones?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras cartas sean ases y la tercera sea un rey?
 3. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan dos ases y un caballo en cualquier orden?
 4. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún caballo?
 5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener alguna espada?
 6. ¿Cuál es la probabilidad de que obtener una sota, un rey y un caballo en cualquier orden?

resolución:.....pizarra



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: probabilidad de aprobar una oposición

- **Ejercicio 10:** El temario de un examen de oposición consta de 10 temas que están numerados.
- En el examen, cada opositor saca cuatro bolas de una bolsa que tiene 80 bolas numeradas con cada uno de los temas.
- El opositor elige el tema que desee (uno sólo) de entre los que se le expone y lo expone ante el tribunal.
- Una opositora acude al examen habiendo estudiado sólo los temas 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la oposición?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The text is positioned above a blue and orange graphic element that resembles a stylized arrow or a banner pointing to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70