Universidad Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 3

VARIABLES ALEATORIAS

Sonia Hernández Alonso
Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)

Esquema

- Introducción
- Definición de variable aleatoria
- Tipos de variables aleatorias
- Función de distribución
- Variables aleatorias discretas
- Esperanza y varianza de variables aleatorias discretas.
- Modelos discretos especiales
  - Distribución binomial
  - Distribución geométrica
  - Distribución de Poisson

Esquema (continuación)

- Variables aleatorias continuas:
  - Función de densidad. Propiedades
  - Función de distribución de variables aleatorias continu
  - Esperanza y varanza de variables aleatorias continuas
- Modelos continuos especiales:
  - Distribución uniforme
  - Distribución exponencial
  - Distribución normal
- Distribución de transformaciones de variables aleatorias
- Esperanza de transformaciones de variables aleatorias
- Desigualdades de Markov y Chebyshev

Introducción

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Variables aleatorias: introducción

- Muchos experimentos aleatorios tienen un espacio muest s elementos no son numéricos.

- Por ejemplo, para el experimento aleatorio consistente en e una moneda tres veces, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\mathcal{CCC}, \mathcal{CCX}, \mathcal{CXC}, \mathcal{CXX}, \mathcal{XCC}, \mathcal{XCX}, \mathcal{XXC}, \mathcal{XX}$$

- Matemáticamente, resulta más útil **cuantificar** los resu n espacio muestral, ya que de esta forma se pueden emp s numéricas para analizar las principales características del .

- Además, en muchas ocasiones, no interesa estudiar todo s del experimento, sino que el interés se centra en ciertas s numéricas. Por ejemplo, cuando se lanzan varios dados, p r interesados en conocer cuál es la suma obtenida, y no en l s concretos de cada lanzamiento. O, al escoger una perso e una población, puede que sólo nos interese saber su altu

- Las **variables aleatorias** asignan un valor numérico a cad s resultados posibles de un experimento.

Definición de variable aleatoria

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué es una variable aleatoria (v.al.)?

- **Definición**: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Una **v** **-toria** es cualquier función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que para todo $B \in$ a

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

o lo que es lo mismo,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

- Una función que cumple esta condición se dice que es n **medible** con respecto al espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Dicha condición permitirá calcular probabilidades del tip) para cualquier boreliano B.
- Cuando el espacio muestral Ω es finito o infinito numerabl l es tomar como $\sigma-$álgebra $(\mathcal{A})$ el conjunto de partes de n estos casos, la condición de ser medible siempre se verifi

Ejemplo de variable aleatoria

- Para el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire a tres veces, el espacio muestral es

$$\Omega = \{\mathcal{CCC}, \mathcal{CCX}, \mathcal{CXC}, \mathcal{CXX}, \mathcal{XCC}, \mathcal{XCX}, \mathcal{XXC}, \mathcal{XX}$$

- Los elementos de Ω no son de tipo numérico, pero pod ir alguna variable aleatoria que los transforme en números.

- Consideremos, por ejemplo, la variable

$$X = \text{ número de caras}$$

- Esta variable aleatoria,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

hace la siguiente asignación de números a cada elemento

$$X(\mathcal{XXX}) = 0 \qquad X(\mathcal{XXC}) = 1 \qquad X(\mathcal{CCX}) = 2 \qquad X($$

$$X(\mathcal{XCX}) = 1 \qquad X(\mathcal{CXC}) = 2$$

$$X(\mathcal{CXX}) = 1 \qquad X(\mathcal{XCC}) = 2$$

¿Qué es lo aleatorio de la v.al. X?

- Observemos que la asignación numérica que la variable X establece para cada suceso elemental $\omega \in \Omega$ es determini
- La aleatorioridad reside en el hecho de que, antes realiz i- mento, no sabemos cúal de los elementos $\omega \in \Omega$ va a oc

Probabilidad inducida por una variable alea

- Sobre los elementos de Ω existe una **distribución de pro** y la variable aleatoria X traslada esta estructura probabilís

- Si partimos del espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y consi a variable aleatoria

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

podemos definir

$$P_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

de la forma siguiente: para cada $B \in \mathcal{B}$,

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P\Big($$

- **Teorema 1:** P_X es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

demostración:.........pizarra

Ejemplo: probabilidad inducida por una v.a

- **Ejercicio 1:** Para el experimento aleatorio consistente e… a moneda equilibrada tres veces, y la variable aleatoria

$$X = \text{ número de caras,}$$

determinar la distribución de probabilidad inducida, P_X.

resolución:.........pizarra

- **Observación:** P es una probabilidad sobre el espacio p… e $(\Omega, \mathscr{A})$, mientras que P_X es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}$

Solución al Ejercicio 1

- Come se ha dicho, sobre los elementos de Ω existe una n **de probabilidad**, y la variable aleatoria X traslada est a probabilística a $\mathbb{R}$.

- Para el triple lanzamiento de una moneda equilibrada e aleatoria

$$X = \text{ número de caras}$$

se tiene que

$$P_X(0) \;=\; P\left[X^{-1}(0)\right] = P(X=0) = P(\mathcal{XXX}) = \frac{1}{8} = 0.1$$

$$P_X(1) \;=\; P\left[X^{-1}(1)\right] = P(X=1) = P(\mathcal{XXC}, \mathcal{XCX}, \mathcal{CXX} \quad 75,$$

$$P_X(2) \;=\; P\left[X^{-1}(2)\right] = P(X=2) = P(\mathcal{XCC},\ \mathcal{CXC},\ \mathcal{CCX}) \quad 5,$$

$$P_X(3) \;=\; P\left[X^{-1}(3)\right] = P(X=3) = P(\mathcal{CCC}) = \frac{1}{8} = 0.12$$

Tipos de variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Variables aleatorias discretas y continuas

- Se llama **soporte** de una variable aleatoria X al conjunt s que puede tomar la variable. Denotaremos dicho conjunt
- Dependiendo cómo sea su soporte, las variables aleatorias n discretas y continuas:
    - Una **variable aleatoria X es discreta** si y sólo si n conjunto $A \subset \mathbb{R}$ finito o infinito **numerable** tal que

      $$P(X \in A) = 1$$

      En consecuencia, el soporte de una variable discreta o **puntos aislados**, es decir, valores puntuales.
    - Una **variable aleatoria X es continua** si y sólo si s s no numerable, ya que **incluye a todos los númer n intervalo de $\mathbb{R}$**.
- Las distribuciones de probabilidad de las variables discre s variables continuas difieren mucho en varios aspectos.

Ejemplos de variables aleatorias discretas

- $X=$ número de caras en tres lanzamientos de una moned
- $N=$número de lanzamientos de un dado hasta que sale e
- $S=$suma de las puntuaciones de tres lanzamientos de un
- $L=$ número de llamadas atendidas en una central telefó e un mes,
- $H=$ número de crías en por camada en gatas,
- etcetera

Ejemplos de variables aleatorias continuas

- T= tiempo que transcurre entre dos llamadas telefónicas s en una centralita,
- P= peso de un ciervo escogido al azar,
- T= temperatura en Móstoles en un instante elegido aeat
- D= duración de una bombilla,
- L= Longitud de un triple salto olímpico,
- etcetera

Función de distribución

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué es la función de distribución de una

- Toda variable aleatoria tiene asociada una función llamad… e distribución que la caracteriza completamente.

- **Definición**: Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y … e aleatoria X, se define su **función de distribución**,

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

como

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P_X(-\infty, x] \\ &= P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right) \\ &= P\left(\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \leq x\right) \\ &= P(X \leq x) \end{aligned}$$

- Es decir, la función de distribución es una función de … d **acumulada**.

Ejemplo: función de distribución de una v.

- **Ejercicio 2:** Determinar la función de distribución de la

$$X = \text{ número de caras,}$$

en el triple lanzamiento de una moneda equilibrada.

Representar gráficamente esta función y analizar sus pro

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 2

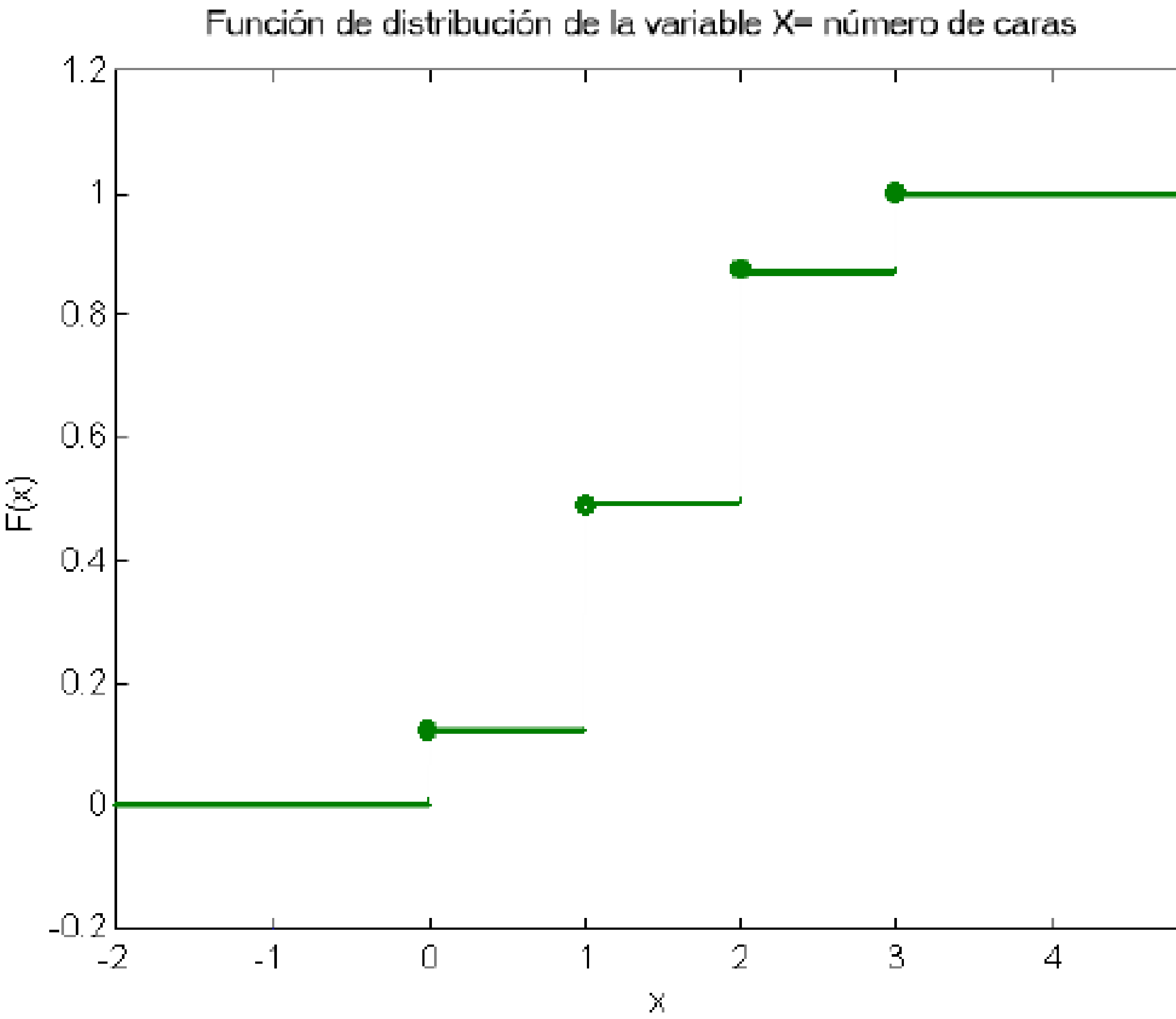
- La expresión de la función de distribución de la variable

$$X = \text{ número de caras}$$

es

$$F_X(t) = P\left(X \leq t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 0.125 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0.5 & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 0.875 & \text{si } 2 \leq t < 3, \\ 1 & \text{si } t \geq 3. \end{cases}$$

Solución al Ejercicio 2 (continuación)



Solución al Ejercicio 2: observaciones sobr

URJC

- En este ejemplo observamos que F_X:
  - Comienza en 0, ya que $F_X(t) = 0$ para todo $t < 0$.
  - Termina en 1, ya que $F_X(t) = 1$ para todo $t \geq 3$.
  - Es continua por la derecha, pero presenta discontinui s puntos 0, 1, 2, y 3, que son los puntos del soporte de
  - Es monótona no decreciente.
  - Crece a saltos, los puntos de salto son los puntos d y la amplitud de cada salto es el valor de la función de e punto.
- Como veremos, este es el aspecto que presentan en ger - ciones de distribución de las variables aleatorias discretas

Ejemplo: cálculo de probabilidades con F_X (

- **Ejercicio 3:** Estudios recientes han confirmado que las e anidan en zonas costeras cercanas a las fábricas de acero e- rimentando sorprendentes mutaciones.

  Entre otras anomalías, el número de dedos que tienen (c - bas patas) varía de unos ejemplares a otros, siendo una v - toria, D, con función de distribución

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 6, \\ 0.1 & \text{si } 6 \leq x < 8, \\ 0.5 & \text{si } 8 \leq x < 9, \\ 0.8 & \text{si } 9 \leq x < 10, \\ 1 & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

  Un equipo investigador se instala en una playa situada er - dades de una fábrica de acero en la cual hay una **enorr d** de gaviotas y las selecciona aleatoriamente para estudiar e dedos que presentan.

Ejercicio 3 (continuación)

1. Hallar la probabilidad de que una gaviota elegida al azar a tenga una cantidad par de dedos.

   Solución: *0.7*

2. Se ha comprobado que una de las gaviotas capturadas a tiene menos de 10 dedos. ¿Cuál es la probabilidad de n número par de dedos?

   Solución: *0.625*

3. Hasta ahora los investigadores han capturado en este al de 10 gaviotas. Calcular la probabilidad de que 2 de ellas a cantidad impar dedos y el resto una cantidad par.

   Solución: *0.0014*

Ejercicio 3 (continuación)

4. Tras finalizar el estudio anterior, los miembros del equipo ... -ción necesitan analizar las características de una gaviota ... n número impar de dedos, para lo cual seleccionan gaviota... a aleatoria, cuentan sus dedos y, en caso de que sean una ... r, las dejan en libertad.

   ¿Cuál es la probabilidad de que tengan que capturar ex... 5 gaviotas hasta dar con una que tenga un número impar ...

   Solución: *0.07203*

Ejemplo: cálculo probabilidades con F_X (c

- **Ejercicio 4:** En cierto experimento químico, la tempera c- ción (medida en grados centígrados) es una variable alea n función de distribución

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{x^3+1}{9} & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Calcular las siguientes probabilidades:

1. $P(T > 0)$
2. $P(0 \leq T \leq 1)$
3. $P(T = 0.6)$
4. $P(1 < T < 4)$
5. $P\left(T \in (-0.8, 0.2]\right)$
6. $P(|T| < 0.5)$

Solución al Ejercicio 4

1. $P(T > 0) = \dfrac{8}{9} = 0.8889$
2. $P(0 \leq T \leq 1) = \dfrac{1}{9} = 0.1111$
3. $P(T = 0.6) = 0$
4. $P(1 < T < 4) = \dfrac{7}{9} = 0.7778$
5. $P\left(T \in (-0.8, 0.2]\right) = 0.05778$
6. $P(|T| < 0.5) = 0.02778$

Observación: propiedades función distribuc

- Más adelante (cuando tengáis os suficientes conocimiento **u-lo**) demostraremos la siguiente proposición. Por el mome a razonar que se trata de un resultado muy acorde a la int

- **Proposición *:** Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio probabilístico, y R cualquier variable aleatoria.

  La función de distribución de X, F_X, verifica las siguientes s:

  1. F_X es monótona no decreciente.
  2. F_X es continua por la derecha.
  3. $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

  demostración:.........pendiente

Notación: límites por la derecha y por la iz

- Dada una función G, es común denotar $G(a+)$ a su **lí** **a derecha** en el punto a, es decir,

$$G(a+) = \lim_{x \to a^+} G(a) = \lim_{h \downarrow 0} G(a+h).$$

- De manera análoga, $G(a-)$ denota el **límite por la izqui** n el punto a, esto es,

$$G(a-) = \lim_{x \to a^-} G(a) = \lim_{h \downarrow 0} G(a-h).$$

- Utilizando esta notación, podemos escribir que G es **con** **a derecha** en un punto z si y sólo si

$$G(z+) = G(z),$$

y que es **continua por la izquierda** en dicho punto si y

$$G(z-) = G(z).$$

- Recordemos que para que G sea una **función continua** - dición necesaria que sea continua por la derecha y por la

Cálculo de probabilidades sobre X a partir

- Sea X una variable aleatoria y F_X su función de distri a cualquier par de números reales $a \leq b$ se verifica:

1. $P(X < a) = F_X(a-)$
2. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$
3. $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
4. $P(X \geq a) = 1 - F_X(a-)$
5. $P\left(X \in (a, b]\right) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $P\left(X \in [a, b]\right) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-)$
7. $P\left(X \in (a, b)\right) = P(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$
8. $P\left(X \in [a, b)\right) = P(a \leq X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$

Variables aleatorias discretas

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Definición de variable aleatoria discreta

- **Definición**: Se dice que una variable aleatoria, X, es **disc** a su función de distribución, F_X, existe un **conjunto nu e puntos**, $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[F_X(k_n) - F_X(k_n-) \right] = 1,$$

o, equivalentemente, tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X = k_n) = 1.$$

Soporte de una variable aleatoria discreta

- Para describir una variable aleatoria discreta hay que e… s valores que puede tomar y las probabilidades de que a… a uno de ellos.
- Recordemos que se llama **soporte** o rango de una variabl… X al conjunto de valores que puede tomar la variable. Deno… o conjunto por S_X.
- El soporte de una variable aleatoria discreta viene dado …

$$S_X = \{k \in \mathbb{R} : P(X = k) > 0\}.$$

o, lo que es lo mismo, por

$$S_X = \{k \in \mathbb{R} : F_X(k) - F_X(k-) > 0\}.$$

- Para las variables aleatorias discretas el soporte es siempre… o **numerable**.
- Conociendo el soporte de una variable discreta quedan … s los valores que ésta puede tomar.

Función de masa de probabilidad

- Se define la **función de masa de probabilidad** de una v… -toria X como la función, f_X, que indica la probabilidad de … e cada uno de sus valores, es decir,

$$
\begin{aligned}
f_X : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow (0,1) \\
& k \longrightarrow f_X\,(k) = P\,(X = k) = P\,(\{\omega \in \Omega \text{ tal que } X \ldots
\end{aligned}
$$

- Obviamente, si k no es uno de los valores que puede tomar … es $f_X(k) = 0$, es decir,

$$k \notin S_X \Longrightarrow f_X(k) = P(X = k) = 0.$$

- La función de masa de probabilidad se puede representar … e mediante un **diagrama de barras**.

Ejemplo: variable aleatoria discreta

- Consideremos de nuevo el triple lanzamiento de una mo... -riable aleatoria X= "número de caras ".

- El soporte de la variable X

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Puesto que S_X es un conjunto finito, X es una variable de ...

- La función de masa de probabilidad de X es

$$f(0) = P_X(0) = P(X = 0) = P(\{XXX\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = $$

$$f(1) = P_X(1) = P(X = 1) = P(\{XXC, XCX, CXX\}) = \quad =$$

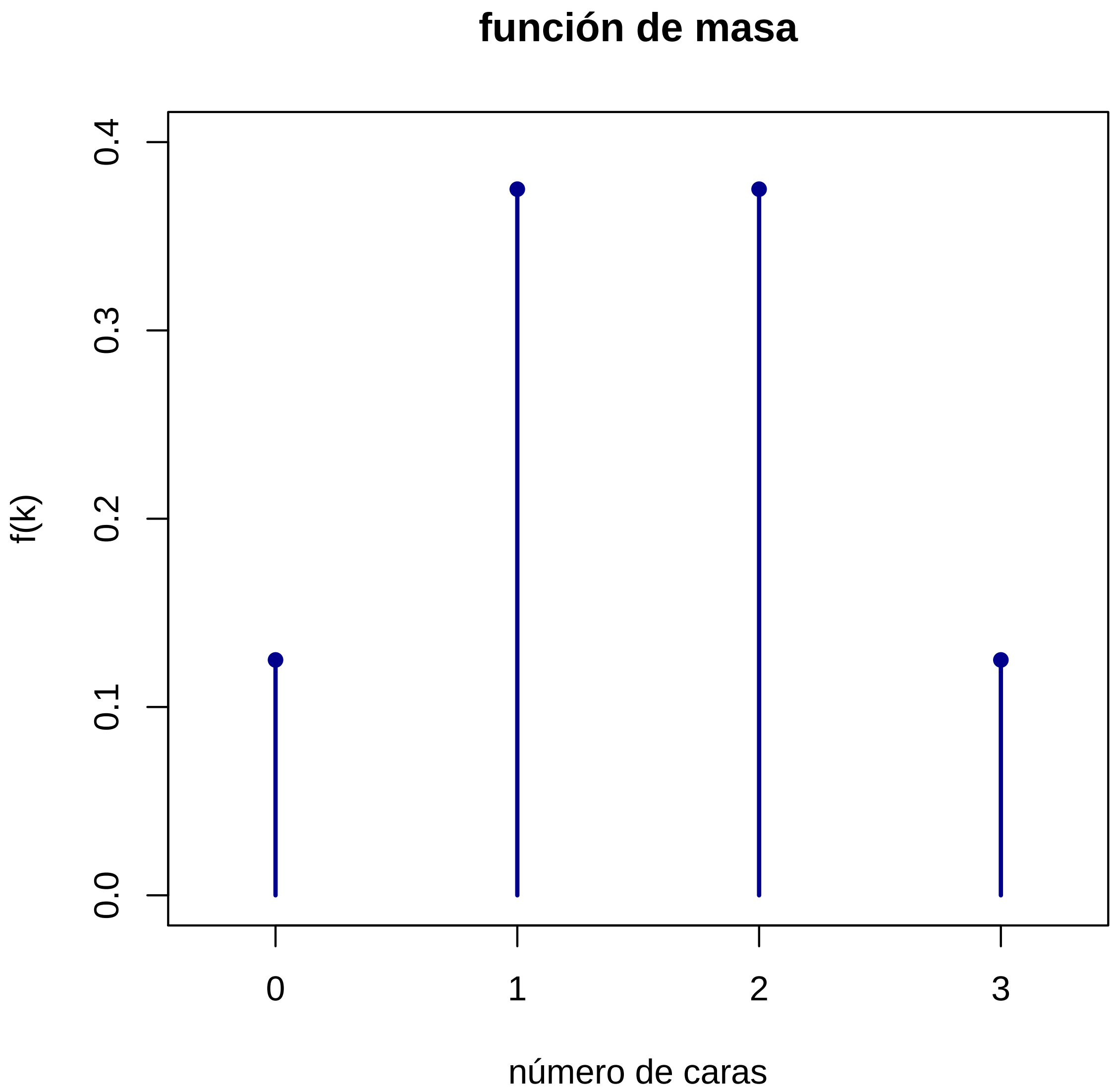
$$f(2) = P_X(2) = P(X = 2) = P(\{XCC, CCX, CXC\}) = \quad =$$

$$f(3) = P_X(3) = P(X = 3) = P(\{CCC\}) = \frac{1}{8},$$

$$f(k) = 0 \text{ para } k \notin \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ejemplo: función de masa (continuación)

- El diagrama de barras de esta función de masa es:



Notación matricial del soporte y la función

- Para facilitar los cálculos, resulta útil expresar el soporte … n de masa de una variable discreta mediante una matriz de … n la fila de arriba se coloca el soporte de la variable con s… s ordenados de menor a mayor, y en la fila de abajo la pro… e cada punto.

- Por ejemplo, para la variable aleatoria

$$X = \text{ número de caras}$$

en el triple lanzamiento de la moneda equilibrada, pode… r resumidamente su soporte (S_X) y su función de masa (f… e la siguiente matriz:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la función de masa

- La función de masa de probabilidad de una variable aleat a se caracteriza por dos propiedades, que son consecuenc e las propiedades de la probabilidad.

- **Proposición 1:**

1. La función de masa es **no negativa**, es decir,

$$f_X(k) \geq 0$$

para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

2. La suma de la función de masa de todos los valores d e una variable aleatoria discreta es 1, esto es,

$$\sum_{k \in S_X} f_X(k) = 1.$$

demostración:.........inmediata

Cálculo de F_X a partir de f_X

- Recordemos que la **función de distribución** de una varia… a X es la función F_X que asigna a cada $t \in \mathbb{R}$ la probabilid… X tome un valor menor o igual que t:

$$F_X : \quad \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$$
$$t \longrightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(\omega \in \Omega : X(\omega)\ldots$$

- En el caso discreto, la forma de calcular esta función de… d acumulada es sumando la probabilidad de todos los punto… e menores o iguales que t:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{k \in S_X, k \leq t} P(X = k) = \sum_{k \in S_X, k \leq t} f\ldots$$

Repaso: función de distribución

- Recordemos cómo calcular la función de distribución d e aleatoria

$$X = \text{ número de caras}$$

en el triple lanzamiento de la moneda equilibrada.

Observemos que

$$
\begin{aligned}
F_X(0) &= P(X=0) = f_X(0) = \frac{1}{8} = 0.125 \\
F_X(1) &= f_X(0) + f_X(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = 0.5 \\
F_X(2) &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} = 0. \\
F_X(3) &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Repaso: función de distribución (continuac

- También podemos calcular la función de distribución en … e no están en el soporte de X. Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
F_X(-1) &= P(X \leq -1) = 0 \\
F_X(0.8) &= P(X \leq 0.8) = f_X(0) = 0.125 \\
F_X(1.5) &= P(X \leq 1.5) = f_X(0) + f_X(1) = 0.5 \\
F_X(5.1) &= P(X \leq 5.1) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + \ldots \\
F_X(2.9) &= P(X \leq 2.9) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \ldots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Repaso: función de distribución (continuac

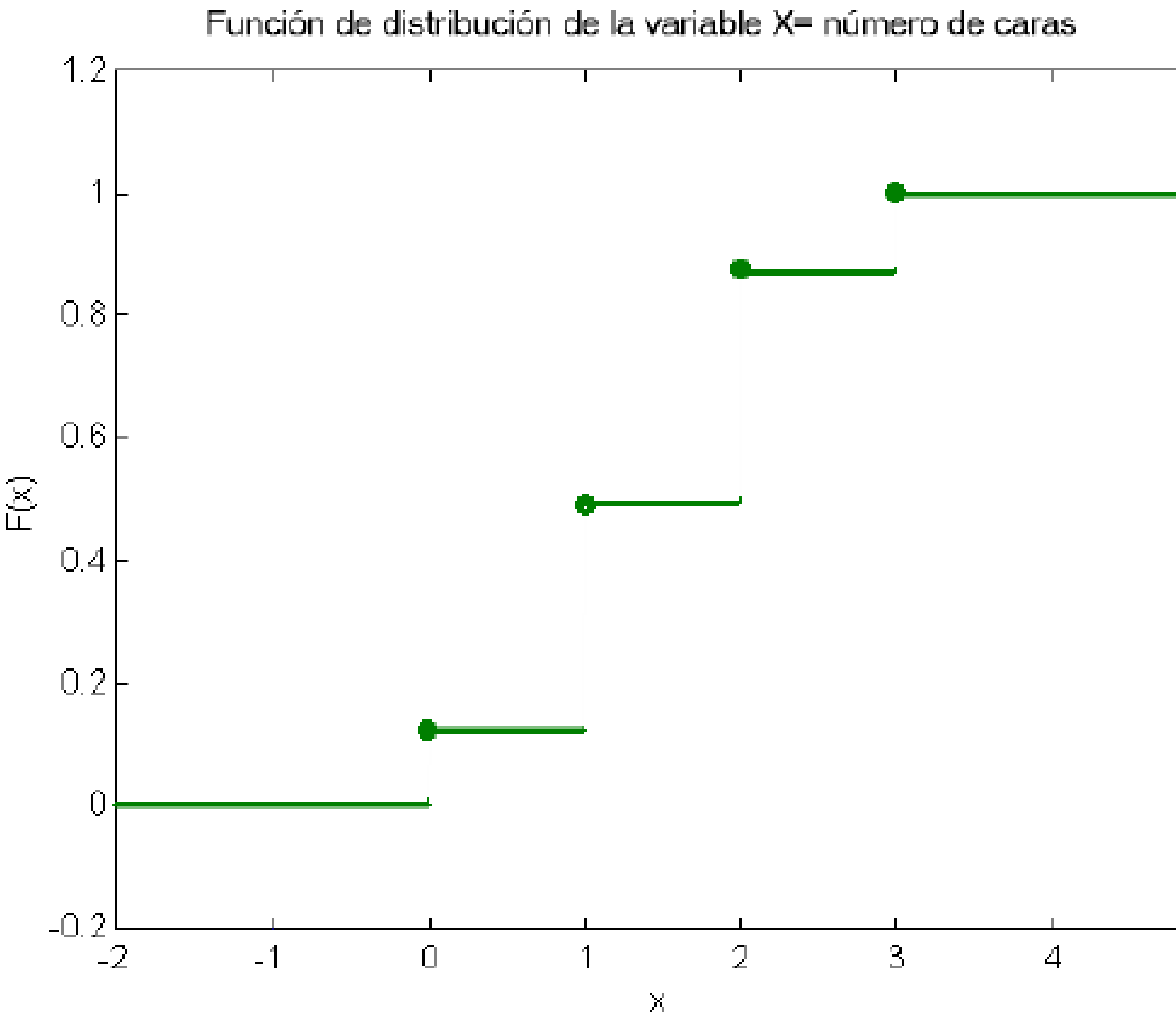
- La expresión completa de la función de distribución de la

$$X = \text{ número de caras}$$

es

$$F_X(t) = P\,(X \le t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 0.125 & \text{si } 0 \le t < 1, \\ 0.5 & \text{si } 1 \le t < 2, \\ 0.875 & \text{si } 2 \le t < 3, \\ 1 & \text{si } t \ge 3. \end{cases}$$

Repaso: función de distribución (continuac



Propiedades de F_X para variables discretas

- En el ejemplo anterior observamos que F_X:
  - Comienza en 0, ya que $F_X(t) = 0$ para todo $t < 0$.
  - Termina en 1, ya que $F_X(t) = 1$ para todo $t \geq 3$.
  - Es continua por la derecha, pero presenta discontinu s puntos 0, 1, 2, y 3, que son los puntos del soporte de
  - Es monótona no decreciente.
  - Crece a saltos, los puntos de salto son los puntos d y la amplitud de cada salto es el valor de la función de e punto.
- Como probaremos más adelante, este es el aspecto que n general las funciones de distribución de las variables alea - tas.

Esperanza y varianza

de variables aleatorias discretas

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Esperanza de una variable discreta

- **Definición**: La **esperanza**, o **media**, o **valor esperado** de e aleatoria aleatoria discreta X se define como

$$E\left(X\right) = \sum_{k \in S_X} k \times P(X = k)$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{E\left(X\right) = \sum_{k \in S_X} k \times f_X(k)}$$

- Si pensamos en la probabilidad como en una masa total d a entre los puntos del soporte, $E(X)$ es el punto donde a el **centro de gravedad** o punto de equilibrio de la dis e probabilidad de X.

- Es habitual denotar $E(X)$ por μ_X, o simplemente por μ.

Ejemplo: esperanza de una variable discret

- Vamos a calcular el valor esperado de la variable aleatori

$$X = \text{ número de caras}$$

en el triple lanzamiento de la moneda equilibrada.

- Recordemos que el soporte y la función de masa de X so

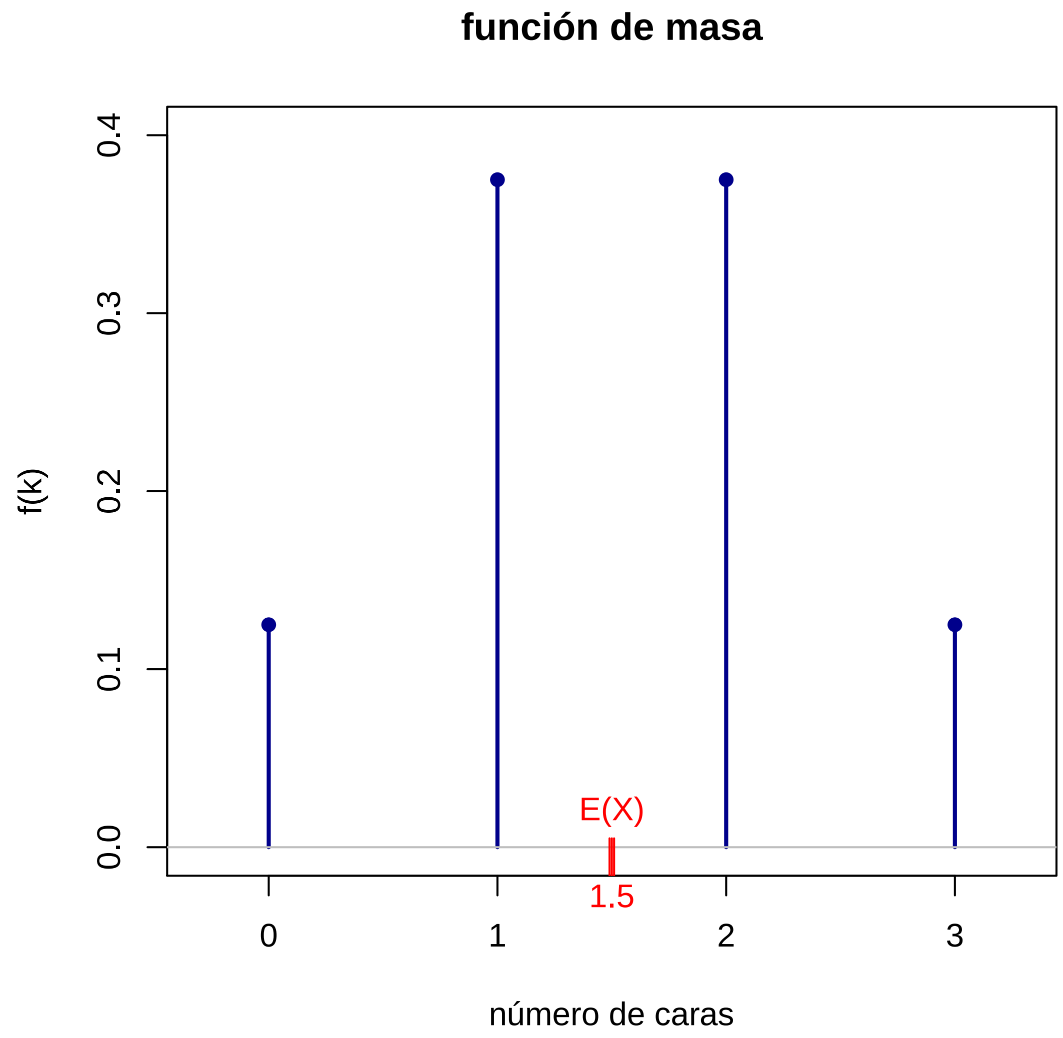
$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- Por consiguiente la esperanza de X es

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Gráfico: esperanza de una variable discreta

- Este valor esperado indica que, si se lanzan 3 monedas m… s, el número medio de caras sobre todos los lanzamientos s…



Esperanza de transformaciones lineales de

- **Proposición 2:** Si X es una variable aleatoria y $a, b \in \mathbb{R}$ n-tes, entonces se verifica

$$E(aX) = a\,E(X)$$

y

$$E(X + b) = E(X) + b$$

y por consiguiente

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b$$

o, escrito abreviadamente,

$$\boxed{\mu_{aX+b} = a\mu_X + b}$$

demostración:.........pizarra

- La esperanza es por tanto un **operador lineal**.

Varianza de una variable aleatoria discreta

- **Definición**: La **varianza** de una variable aleatoria se def

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$$

- $V(X)$ es una **medida de la dispersión** de X alrededor e gravedad, $E(X)$.

- Es común denotar $V(X)$ por σ_X^2 , o simplemente por σ^2

$$\boxed{\sigma_X^2 = E\left([X - \mu_X]^2\right)}$$

- Para las variables aleatorias discretas, la varianza puede c e- diante la fórmula

$$\boxed{V(X) = \sum_{k \in S_X} (k - \mu_X)^2 f_X(k)}$$

- Nótese que las unidades de la varianza son el **cuadrado** - **dades** de la variable aleatoria.

Fórmula alternativa para la varianza

- **Proposición 3:** Para cualquier variable aleatoria X, u … n alternativa para su varianza es

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

o, escrito abreviadamente,

$$\boxed{\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2}$$

<u>*demostración*</u>:.........pizarra

Fórmula alternativa para la varianza: obser

- Por tanto, **la varianza de una variable aleatoria es la ... a de su cuadrado menos el cuadrado de su esperanza**
- Luego, para las variables discretas, la varianza también ... larse como

$$\boxed{\sigma_X^2 = \sum_{k \in S_X} k^2 f_X(k) - \mu_X^2}$$

- Habitualmente el cálculo de la varianza resulta más sencill... a esta segunda definición.

Ejemplo: varianza de una variable discreta

- Calculemos la varianza de la variable aleatoria

$$X = \text{ número de caras}$$

en el triple lanzamiento de la moneda equilibrada:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5 \text{ c}$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} =$$

y por tanto la varianza de esta variable es

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3 - 1.5^2 = \mathbf{0.75} \text{ cara}$$

Varianza de transformaciones lineales de v

- **Proposición 4:** Si X es una variable aleatoria y $a, b \in \mathbb{R}$ n-
tes, entonces se verifica

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

o, escrito abreviadamente,

$$\boxed{\sigma^2_{aX+b} = a^2 \sigma^2_X}$$

demostración:.........pizarra

Ejemplo: varianza transformaciones lineale

- **Ejemplo:** Si la varianza de una variable aleatoria X es

$$V(X) = 9$$

y definimos

$$Y = 10X + 50,$$

entonces

$$V(Y) = V(10X + 50) = 10^2\, V(X) = 100 \times 9 =$$

Desviación típica de una variable aleatoria

- La **desviación típica** de una variable aleatoria X, σ_X, es -drada de su varianza, esto es,

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{V(X)}$$

- Las unidades de la varianza son el cuadrado de las unidad e esté medida la variable aleatoria. En cambio **la desviación e las mismas unidades que la variable aleatoria** a la que e.

- **Ejemplo:** la desviación típica de la variable aleatoria

$$X = \text{ número de caras}$$

en tres lanzamientos de una moneda equilibrada, es

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = \mathbf{0.866 \text{ caras}}$$

Ejemplo: número de muertes de abejas ob

- **Ejercicio 5:** Se ha comprobado que el número muertes d… e se producen diariamente en una colmena de abejas (*Apis* … s una variable aleatoria, M, con función de probabilidad:

$$M \equiv \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.10 & 0.15 & 0.25 & 0.30 & 0.20 \end{pmatrix}$$

1. Hallar la probabilidad de que ayer muriesen al menos 8 …
2. Calcular la probabilidad de que mañana mueran más … .
3. ¿Cúal es la probabilidad de que la cantidad de defunc… e produzcan dentro de tres días sea un número impar?
4. Se sabe que anteayer fallecieron al menos 8 abejas o … l es la probabilidad de que el número de defunciones fu…
5. ¿Cuál es el número esperado de defunciones diarias?
6. Hallar la desviación típica del número de defunciones

Solución al Ejercicio 5

1.

$$P(M \geq 8) = P(M = 8) + P(M = 9) + P(M = 10) = 0.25 + \ldots 0.75$$

2.

$$P(M > 8) = P(M = 9) + P(M = 10) = 0.3 + 0.2 \ldots$$

3.

$$P(M \text{ impar}) = P(M = 7) + P(M = 9) = 0.15 + 0.3 \ldots$$

4.

$$P(M \text{ impar} | M \geq 8) = \frac{P([M \text{ impar}] \cap [M \geq 8])}{P(M \geq 8)} = \frac{P(M = \ldots}{P(M \geq \ldots} \ldots 0.4$$

Solución al Ejercicio 5 (continuación)

5. El número esperado de defunciones diarias es

$$E(M) = 6\times 0.1 + 7\times 0.15 + 8\times 0.25 + 9\times 0.3 + 10\times 0.2 = 8 \ldots \mathbf{s}$$

Este valor medio aparece representado en la transparen... e sobre el diagrama de barras de la función de probabilidad...

6. La varianza del número de defunciones por día viene dad...

$$V(M) = E(M^2) - E^2(M)$$

Se tiene que

$$E(M^2) = 36\times 0.1 + 49\times 0.15 + 64\times 0.25 + 81\times 0.3 + 100 \times \ldots 5$$

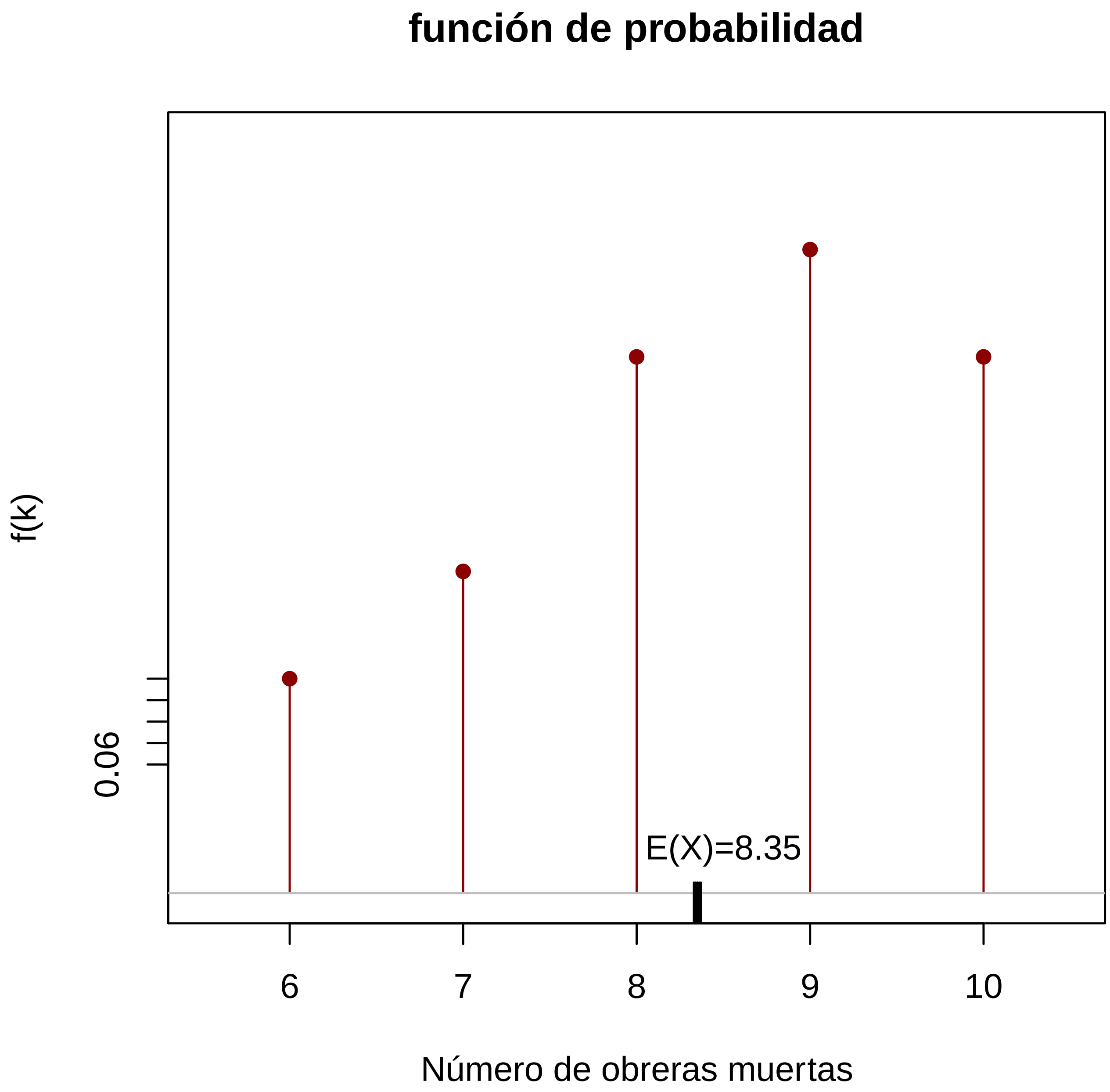
y por tanto

$$V(M) = 71.25 - 8.35^2 = 1.5275$$

Luego la desviación típica del número de muertes diarias

$$\sigma_M = \sqrt{1.5275} = 1.24 \ \textbf{muertes}$$

Gráfico: número de muertes de abejas obr



Modelos discretos especiales

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Familias de modelos discretos

- Algunos modelos de variables aleatorias discretas se repite a frecuencia.
- En este tema vamos a analizar algunas de las distribucio s que se repiten con mayor frecuencia.
- Las distribuciones binomial y geométrica están relacion el llamado **Proceso de Bernoulli**, que consiste repeticio - dientes de un experimento con dos resultados posibles, a s referiremos como éxito y fracaso, en los que la probabili o es la misma en todas las repeticiones.
- La distribución de Poisson está relacionada con otro tip o estocástico conocido como **Proceso de Poisson**.

URJC

Distribución binomial

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Procesos de Bernoulli

- Consideremos un experimento aleatorio con **dos resultac** **s**, a los que nos referiremos como **éxito** y **fracaso**. Llamen
  - $p \in (0,1)$ a la **probabilidad de éxito**,
  - $q = 1 - p \in (0,1)$ a la **probabilidad de fracaso**.
- La repetición de forma independiente de este experimen e lo que se conoce como un **proceso de Bernoulli**. Es s permiten **modelar muchos fenomenos** de la vida real.
- La distribución binomial cuenta el número de éxitos oc n realizaciones, independientes y con la misma probabilidac e un experimento de Bernoulli.

Situaciones que modela la distribución bin

- La situación que modela la distribución binomial es la sig
  - Se considera un experimento con dos resultados pos o fracaso.
  - El experimento se repite, de manera independiente, n
  - La probabilidad de éxito, p, es la misma en cada repe
  - La variable de interés es

$$X = \textbf{número de éxitos en las } n \textbf{ repeticion}$$

- La distribución que sigue la variable aleatoria X recibe e **distribución binomial con parámetros n y p.**
- Lo denotaremos

$$\boxed{X \sim Bin(n, p)}$$

Ejemplos de la distribución binomial

- La variable aleatoria

$$X = \text{número de caras obtenidas en 3 lanzamientos de u}$$

sigue una distribución $X \sim Bin(3, 1/2)$.

- La variable aleatoria

$$T = \text{número de 3's obtenidos en 5 lanzamientos de}$$

sigue una distribución $T \sim Bin(5, 1/6)$.

- El 15 % de la población activa de cierta comarca de g o trabaja por cuenta propia, el 60 % lo hace por cuenta aje o son funcionarios. La variable aleatoria

$F =$ número de funcionarios en una muestra de 4 p
seleccionadas al azar

sigue una distribución $F \sim Bin(4,\ 0.25)$.

Ejemplo: nº de 3's en 5 lanzamientos de u

- Supongamos que se lanza un dado equilibrado cinco vece … s analizar el número de 3's que aparecen en total.
- Llamemos T a número de 3's obtenidos entre los cinco l … s.
- La distribución de esta variable aleatoria es binomial con 5 … s y probabilidad de éxito 1/6:

$$T \sim Bin\left(n = 5, p = \frac{1}{6}\right)$$

- ¿Cuáles son los valores que puede tomar T?

  Es claro que

$$S_T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Y, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de estos valore … , ¿cuál es la función de probabilidad de T?

Ejemplo: nº de 3's en 5 lanztos (continuac

- Observemos que

$$P(T=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4019$$

$$P(T=1) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.4019$$

$$P(T=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 =$$

$$P(T=3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$P(T=4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{5}{6} = 5 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \frac{5}{6} = 0.0032$$

$$P(T=5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0.0001$$

Ejemplo: nº de 3's en 5 lanztos (continuac

- Nótese que todas las probabilidades anteriores responden a

$$P(T = k) = \binom{5}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

- De forma análoga a la de este ejemplo, se puede razonar el soporte y la función de probabilidad de cualquier distribuc l.

Soporte y función de masa de $X \sim Bin(n, p$

- Sea X una variable aleatoria con distribución binomial, c i-ciones y probabilidad de éxito p,

$$X \sim Bin(n, p)$$

Entonces:

  - El **soporte** de X es

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots n-1, n\}$$

  - La **función de masa de probabilidad** de la variable a es

$$f_X(k) = P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times$$

- **Ejercicio 6:** Demostrar que f_X cumple las propiedades c -nes de masa de probabilidad.

resolución:.........pizarra

URJC

Esperanza de la distribución binomial

- **Proposición 5:** Sea X una variable aleatoria con distribuc l,

$$X \sim Bin(n,p).$$

Entonces su esperanza es

$$\boxed{E\left(X\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times p^{k} \times (1-p)^{n-k} = n \times}$$

<u>*demostración*</u>:.........pizarra

Varianza de la distribución binomial

- **Proposición 6:** Sea X una v. al. con distribución binom

$$X \sim Bin(n, p).$$

Entonces su varianza es

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 \times p^k \times (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = n \times p$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{V(X) = n \times p \times q}$$

Ejemplo: esperanza y varianza de binomial

- Para la variable T que recoge el número de 3's en 5 lanz e un dado, cuya distribución es

$$T \sim Bin(5, \frac{1}{6}),$$

se tiene que

$$E(T) = 5 \times \frac{1}{6} = 0.8333,$$

$$V(T) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 0.6944.$$

Ejemplo: número de piezas defectuosas

URJC

- **Ejercicio 7:** El porcentaje de piezas defectuosas que a máquina es del 25 %. Para un control rutinario se han sel e forma aleatoria 8 de las piezas producidas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las pie – nadas sea defectuosa?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho dos de la n defectuosas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que tres de las piezas selecc n defectuosas y el resto sean correctas?
4. ¿Cuantas de las piezas seleccionadas se espera que teng ?
5. ¿Cuál es la varianza del número de piezas defectuosa 8 seleccionadas?

Solución al Ejercicio 7

- Llamemos D al número de piezas defectuosas de entre la … o-
nadas para el control.

  Tenemos que

  $$D \sim Bin\,(8, 0.25)$$

  Por tanto:

  1.

  $$P(D \geq 1) = 1 - P(D = 0) = 1 - 0.75^8 = 1 - 0.1001$$

  2.

  $$\begin{aligned} P(D \leq 2) &= P(D = 0) + P(D = 1) + P(D = 2) \\ &= 0.75^8 + 8 \times 0.25 \times 0.75^7 + \binom{8}{2} \times 0.25^2 \\ &= \mathbf{0.6785} \end{aligned}$$

Solución al Ejercicio 7 (continuación)

3. La probabilidad de que sean exactamente tres las piezas … s es

$$P(D=3) = \binom{8}{3} \times 0.25^3 \times 0.75^5 = 56 \times 0.25^3 \times 0.75$$

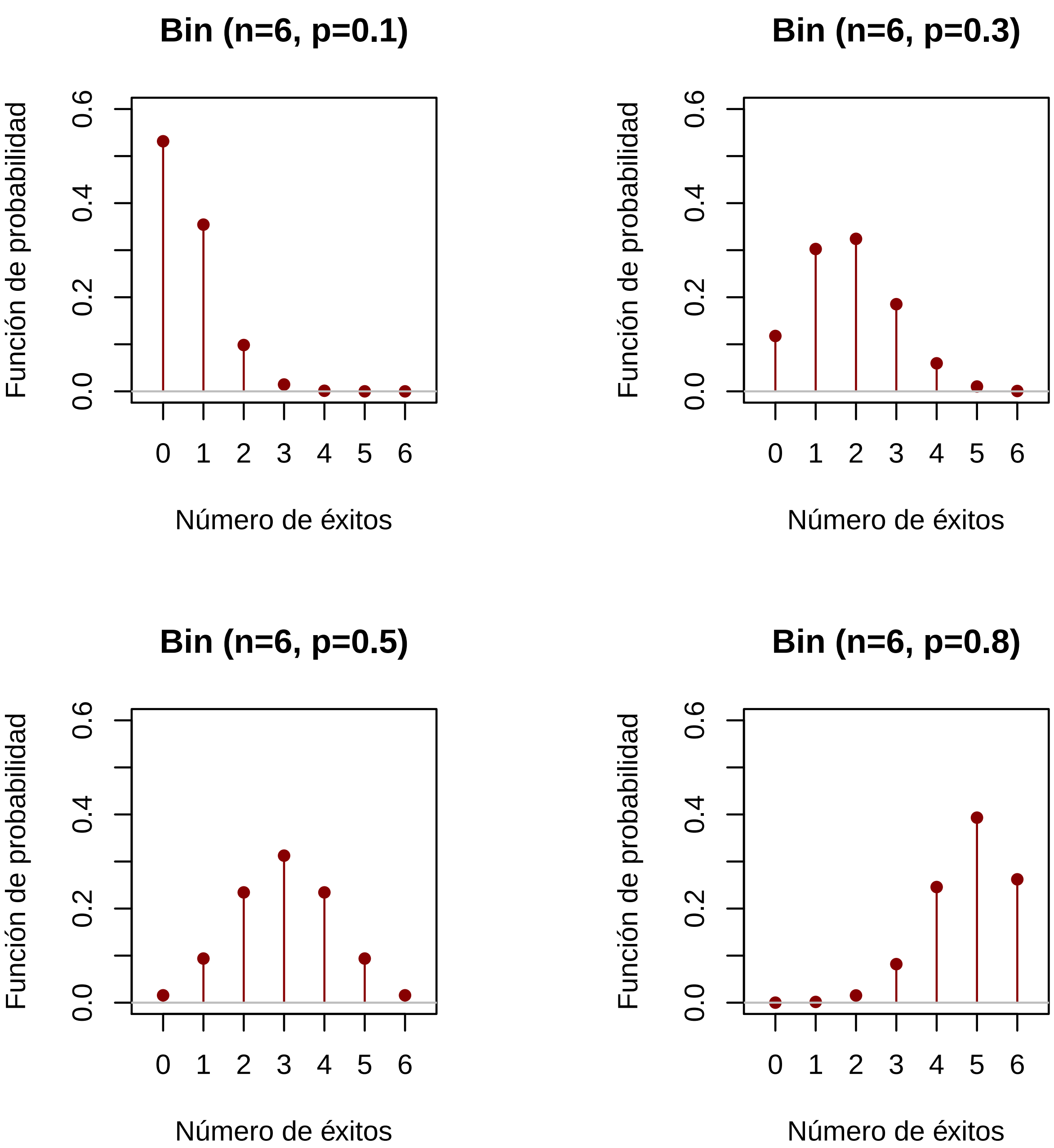
4. La cantidad de piezas seleccionadas que se espera que … n defecto es

$$E(D) = 8 \times 0.25 = \mathbf{2 \text{ piezas}}$$

5. La varianza del número de piezas que tienen algún def… e las 8 seleccionadas para el control es

$$V(D) = 8 \times 0.25 \times 0.75 = \mathbf{1.5 \text{ piezas}^2}$$

¿Cómo cambia la distribución al variar p?



Distribución geométrica

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Distribución geométrica

- La distribución **geométrica** modela el número de vece[...]e-cesario repetir un experimento de Bernoulli hasta obte[...]er éxito.
- Ahora, en lugar de estar interesados por el número de é[...]a cantidad fija de repeticiones n estamos interesados en pr[...]s-tante en el que se produce el primer éxito.
- La situación a modelar es la siguiente:
  - Se consideran repeticiones **independientes** de un exp
  - El experimento tiene dos resultados posibles: éxito o
  - La probabilidad de éxito, p, es la misma en cada repe
  - La variable de interés es

    $X =$ **"número de repeticiones del experimento ha[...]r el primer éxito".**
- Diremos que la variable aleatoria X sigue una distribución [...]a con parámetro p, y lo denotaremos por $X \sim Ge(p)$.

Ejemplos de la distribución geométrica

- La variable aleatoria

$$L = \text{número de lanzamientos de un dado equili} \ldots \text{hasta obtener el primer cinco}$$

sigue una distribución $Ge(1/6)$.

- La variable aleatoria

$$M = \text{número de lanzamientos de una moneda equ} \ldots \text{hasta obtener la primera cara}$$

sigue una distribución $Ge(1/2)$.

- En una fábrica se analizan todas las piezas fabricadas ... e encontrar las posibles piezas defectuosas. La probabilidad ... a pieza esté en perfecto estado es 0.95.

La variable aleatoria

$$D = \text{número de piezas analizadas hasta encon} \ldots \text{la primera defectuosa}$$

sigue una distribución $Ge(0.05)$.

Función de masa de la distribución geomé

- El **soporte** de cualquier variable X con distribución geom

$$S_X = \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$$

- La **función de masa de probabilidad** de una variable ge n probabilidad de éxito p es

$$f_X(k) = \begin{cases} q^{k-1}\, p & \text{para } k = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \\ 0 & \text{para } k \notin \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

- **Ejercicio 8:** Demostrar que f_X cumple las propiedades d -nes de masa de probabilidad.

resolución:.........pizarra

Esperanza y varianza de la distribución ge

- **Proposición 7:** Sea X una variable aleatoria con distribu é-trica,

$$X \sim Ge(p).$$

Entonces su **esperanza** es

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times q^{k-1} \times p = \frac{1}{p}.$$

demostración:.........pizarra

- **Proposición 7*:** Sea X una variable aleatoria con distr o-métrica,

$$X \sim Ge(p).$$

Entonces su **varianza** es

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times q^{k-1} \times p - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Forma de la distribución geométrica

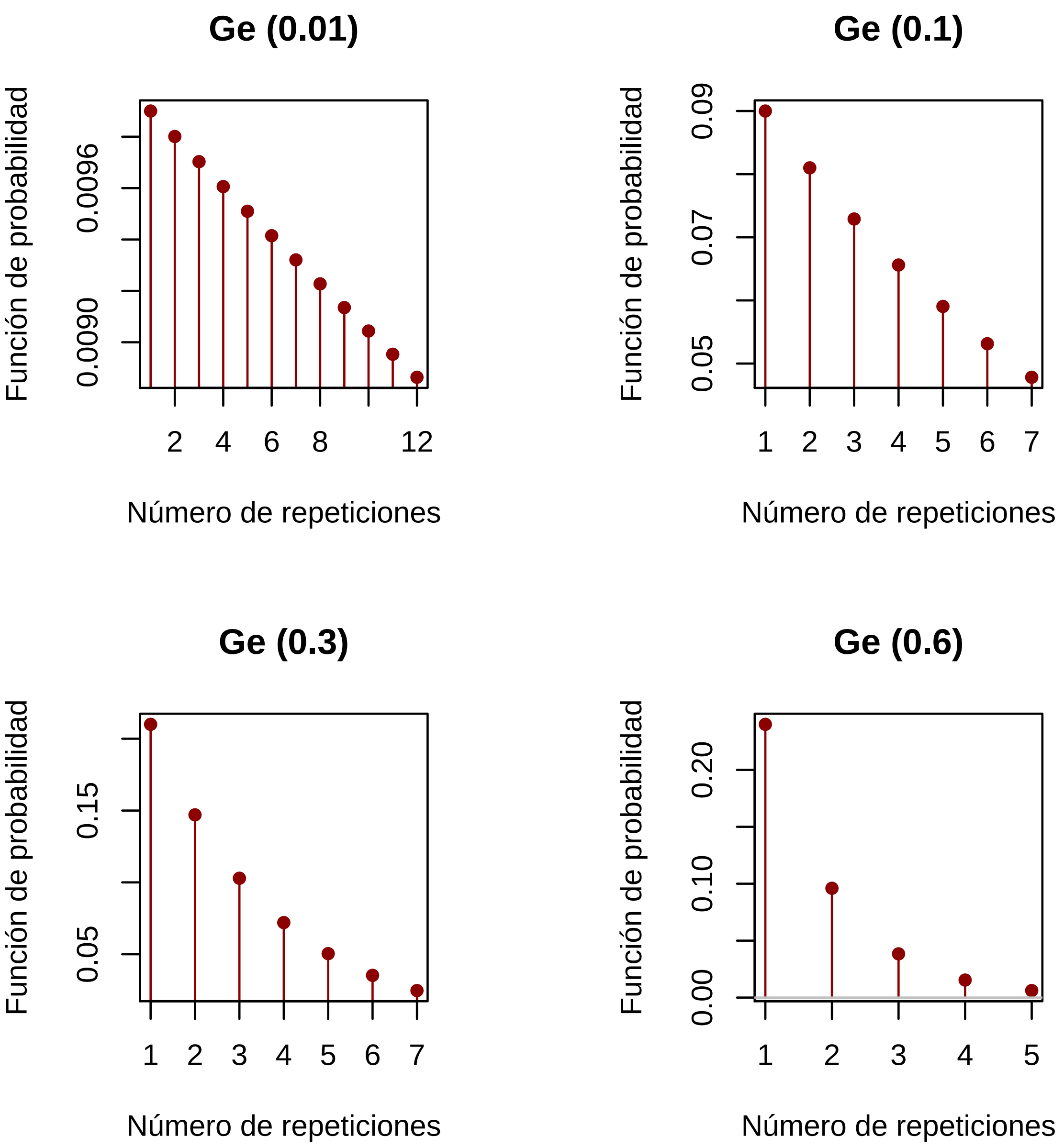
- La función de masa de la distribución geométrica,

$$f_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p,$$

alcanza su máximo en $k = 1$ y decrece con k.

- El decrecimiento es más rápido cuanto mayor sea p.

Gráficos de la distribución geométrica



Ejemplo: distribución geométrica

- **Ejercicio 9:** Una pareja decide que tendrán descendient e se produzca el nacimiento de la primera niña.

  Suponiendo que, en cada parto, la probabilidad de que n o es 0.6,

  1. Hallar la probabilidad de que tengan en total 3 descen
  2. Calcular la probabilidad de que tengan más de 4 hij@s
  3. Supongamos que la pareja ha tenido ya dos hijos varo
     a) Hallar la probabilidad de que tengan en total 5 desc
     b) Calcular la probabilidad de que (en total) tengan má .

Solución al Ejercicio 9

- La distribución de variable aleatoria

  $N =$ *nº descendientes hasta la primera niña,*

  es $N \sim Ge(0.4)$. Por consiguiente:

  1. $P(N = 3) = 0.6^2 \times 0.4 = 0.144$.
  2. $P(N > 4) = 0.6^4 = 0.1296$.
  3. Si se sabe que la pareja ha tenido ya dos hijos varone

     a) $P(N = 5|N > 2) = \dfrac{P(N = 5)}{P(N > 2)} = \dfrac{0.6^4 \times 0.4}{0.6^2} = 0.6^2 \times$ ... .

     Nótese que este valor coincide con la probabilidad de ... a tenga un total de 3 descendientes.

     b) $P(N > 6|N > 2) = \dfrac{P(N > 6)}{P(N > 2)} = \dfrac{0.6^6}{0.6^2} = 0.6^4 = 0.129$...

     Nótese que este valor coincide con la probabilidad de ... a tenga más de 4 hij@s.

Falta de memoria de la distribución geome

- En el ejemplo anterior ilustra una de las propiedades más ...es de la distribución geométrica: para este tipo de variable...s, **las probabilidades sobre lo que ocurra en el futuro n...n de lo que haya ocurrido en el pasado**.

- **Proposición 8:** Si $X \sim Ge(p)$, y $k, a \in \mathbb{N}^+$, entonces,

  1. $P(X = k + a | X > a) = P(X = k)$
  2. $P(X > k + a | X > a) = P(X > k)$
  3. $P(X \geq k + a | X > a) = P(X \geq k)$
  4. $P(X \leq k + a | X > a) = P(X \leq k)$
  5. $P(X < k + a | X > a) = P(X < k)$

- Se dice por ello que **la distribución geométrica no tier** .

- **La distribución geométrica es la única de las distrib -cretas que verifica esta propiedad de falta de memc**

Demostración de la Proposición 8 (aparta

- A modo de ejemplo demostraremos los apartados 1 y 4:

(1) Sabemos que

$$P(X = k) = q^{k-1} \times p,$$

y por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} P(X = k + a | X > a) &= \frac{P[(X = a + k) \cap (X >}{P(X > a)} \\ &= \frac{P(X = a + k)}{P(X > a)} \\ &= \frac{q^{a+k-1} \times p}{q^a} = \frac{q^a \times q^{k-}}{q^a} \\ &= q^{k-1} \times p \end{aligned}$$

Luego, en efecto, se verifica

$$P(X = k + a | X > a) = P(X = k) = q^{k-1} \times$$

Demostración de la Proposición 8 (aparta

(4) Tenemos por una parte que,

$$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - q^k,$$

y por otra que

$$\begin{aligned}
P(X \leq k+a | X > a) &= \frac{P[(X \leq k+a) \cap (X >}{P(X > a)} \\
&= \frac{P[(a < X \leq k+a}{P(X > a)} \\
&= \frac{P(X > a) - P(X > k +}{P(X > a)} \\
&= \frac{q^a - q^{k+a}}{q^a} = \frac{q^a \times (1 - q}{q^a} \\
&= 1 - q^k
\end{aligned}$$

Luego

$$P(X \leq k+a | X > a) = P(X \leq k) = 1 - q^k$$

Distribución de Poisson

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Siméon Denis Poisson (1781-1840; Franci

Sucesos puntuales a lo largo del tiempo

- En ocasiones nos encontramos con variables que represent ... o de sucesos que ocurren en un determinado periodo de ti ... o por ejemplo el número de cebras que acuden a beber a ... n una hora, el número de visitas diarias a una página web, ... o averías anuales de un ascensor.

- Muchas veces estos sucesos van apareciendo a lo largo d ... e manera independiente y con una intensidad constante.

- La distribución de **Poisson** proporciona un modelo adec ... el **número de ocurrencias** independientes de un suceso e ... s en las que la intensidad de ocurrencias se mantiene estab

- En muchas ocasiones los que se quiere modelar son **p ... e llegada**, como por ejemplo las llegadas de e-mails a un s ... e cientes a una sucursal bancaria.

- Esta distribución depende de un único parámetro: el núm ... e ocurrencias del suceso en ese intervalo de tiempo. Denota ... λ dicho parámetro.

Soporte de la distribución de Poisson

- Llamemos X al número de apariciones del suceso (por ejem s de coches a una gasolinera, o de trabajos a un servidor) e o de tiempo que estemos considerando(por ejemplo 1 hora
- Como es natural, el soporte de una variable de este tipo

$$S_X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots \ldots$$

Función de masa de la distribución de Poi

- La distribución de Poisson se obtiene como límite de la bi n- do el número repeticiones (n), tiende a infinito, la pro e éxito (p) tiende a cero y el número medio de éxitos (np) a alrededor de un número λ.

- Calculando dicho límite se obtiene:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Esta es la función de masa de probabilidad de una **dist e Poisson** con parámetro λ.

- Abreviadamente lo expresaremos $X \sim Po(\lambda)$

¿Es esta una función de masa?

- **Ejercicio 10:** Demostrar que f_X cumple las propiedade[illegible]n-ciones de masa de probabilidad.

  resolución:.........pizarra

  Ayuda: Recordar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

¿Qué indica el parámetro λ?

- El **parámetro** λ de la distribución de Poisson es el núm… o esperado) de ocurrencias del suceso en el periodo consid…
- λ es siempre un número positivo,

$$\lambda > 0,$$

y mide la **intensidad** con la que se producen las ocurrenci… o en el intervalo.

- Esta intensidad cambia en función de la longitud del inte… e esté considerando, y es proporcional a la longitud del int…
- Para calcular probabilidades sobre una distribución de P… -portante fijarse antes de nada en el intervalo de tiempo … a considerar.
- **Observación:** La distribución de Poisson aparece comc … a binomial cuando n tiene a infinito y p tiende a 0 de m … l producto $\lambda = np$ de mantiene constante.

Esperanza y varianza de la distribución de

- Evidentemente, la **esperanza** de una variable $X \sim Po(\lambda)$

$$E\left(X\right) = \lambda$$

- Además, puede probarse que su **varianza** es

$$V\left(X\right) = \lambda$$

- Observamos que se verifica

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

- Las variables aleatorias de la familia de Poisson son las s que la esperanza y la varianza coinciden.

URJC

Ejemplo: nº de ataques de leonas

- **Ejercicio 11:** El número de ataques de leonas que sufr -da de gacelas sigue una distribución de Poisson con una 2 ataques diarios.

1. Calcular la probabilidad de que se produzcan 3 ataque .
2. Hallar la probabilidad de que no ocurra ningún ataque s.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos días consecutivos s de 3 ataques?
4. Determinar la probabilidad de que ocurra algún ataque s.
5. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana se p 2 ataques?
6. Si se acaba de producir un ataque, ¿cuál es la probab e transcurran más de 24 horas hasta el siguiente?

Solución al Ejercicio 11

1. Llamemos N_1 al número de ataques de leonas que sufre a lo largo de un día.

   Sabemos que N_1 sigue una distribucion de Poisson y tar u media o esperanza es $E(N_1) = 2$, luego

$$N_1 \sim Po\,(2)$$

   Por tanto, la probabilidad de que se produzcan 3 ataques es

$$P(N_1 = 3) = e^{-2} \times \frac{2^3}{3!} = \mathbf{0.1804}$$

Solución al Ejercicio 11 (continuación)

2. En este caso la probabilidad no se refiere a un día, sino a

   La distribución del número de ataques en medio día es dife... n un día entero. Sigue también el modelo de Poisson pero ... d de los ataques (λ) es la mitad.

   Es decir, si denotamos por $N_{\frac{1}{2}}$ el número de ataques ... n medio día, se tiene que

$$N_{\frac{1}{2}} \sim Po(1)$$

   Por tanto, la probabilidad de que no se produzca ningún ... 2 horas es

$$P(N_{\frac{1}{2}} = 0) = e^{-1} \times \frac{1^0}{0!} = e^{-1} = \mathbf{0.3679}$$

Solución al Ejercicio 11 (continuación)

3. La distribución del número de ataques en dos días es

$$N_2 \sim Po(4)$$

Luego la probabilidad de que se produzcan menos de 3 at… s días es

$$P(N_2 < 3) = P(N_2 = 0) + P(N_2 = 1) + P(N_2 = \ldots$$
$$= e^{-4} \times \frac{4^0}{0!} + e^{-4} \times \frac{4^1}{1!} + e^{-4} \times \frac{4^2}{2!}$$
$$= \mathbf{0.2381}$$

4. La distribución del número de ataques en 36 horas (día y…

$$N_{1.5} \sim Po(3),$$

y por tanto la probabilidad de que se produzca algún a… 6 horas (es decir, al menos 1 ataque en un día y medio) es

$$P(N_{1.5} \geq 1) = 1 - P(N_{1.5} = 0) = 1 - e^{-3} \times \frac{3^0}{0!} = 1 - e^{-\ldots}$$

Solución al Ejercicio 11 (continuación)

5. La distribución del número de ataques en siete días es

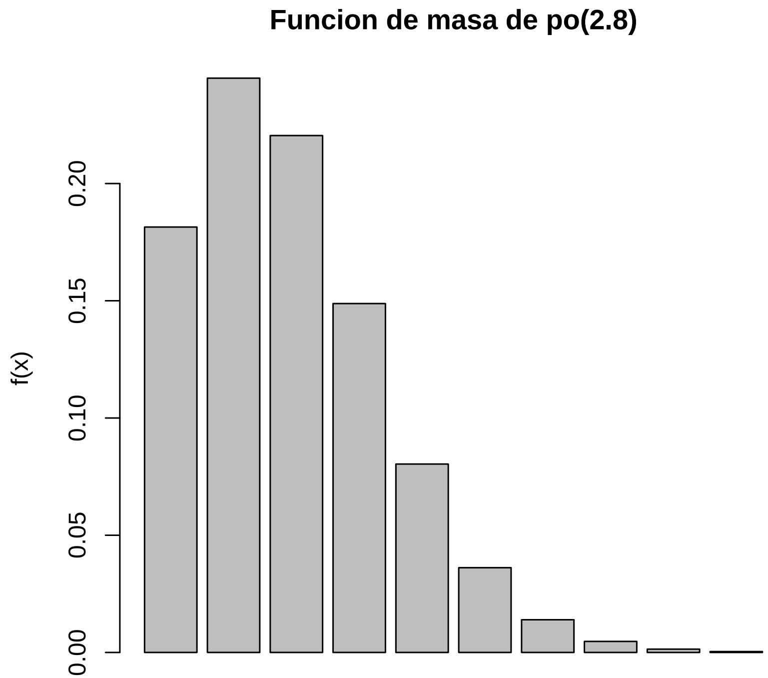
$$N_7 \sim Po(14)$$

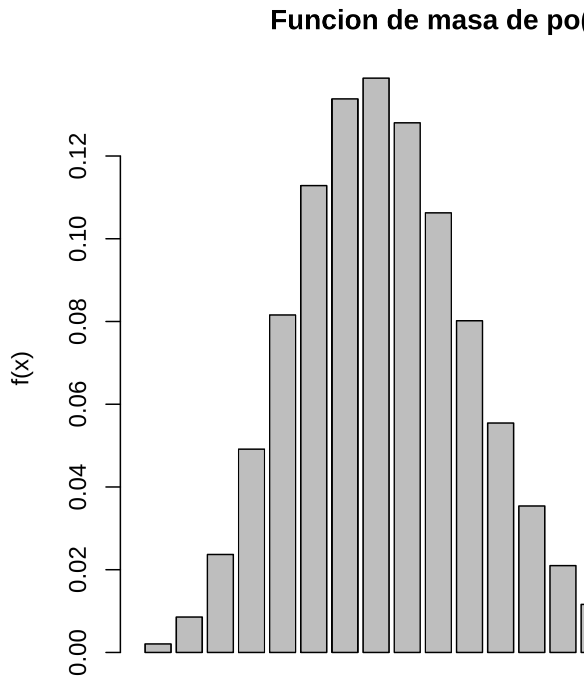
En consecuencia, la probabilidad de que se produzcan exa 2 ataques en una semana es

$$P(N_7 = 12) = e^{-14} \times \frac{14^{12}}{12!} = \mathbf{0.0984}$$

Forma de la distribución de Poisson

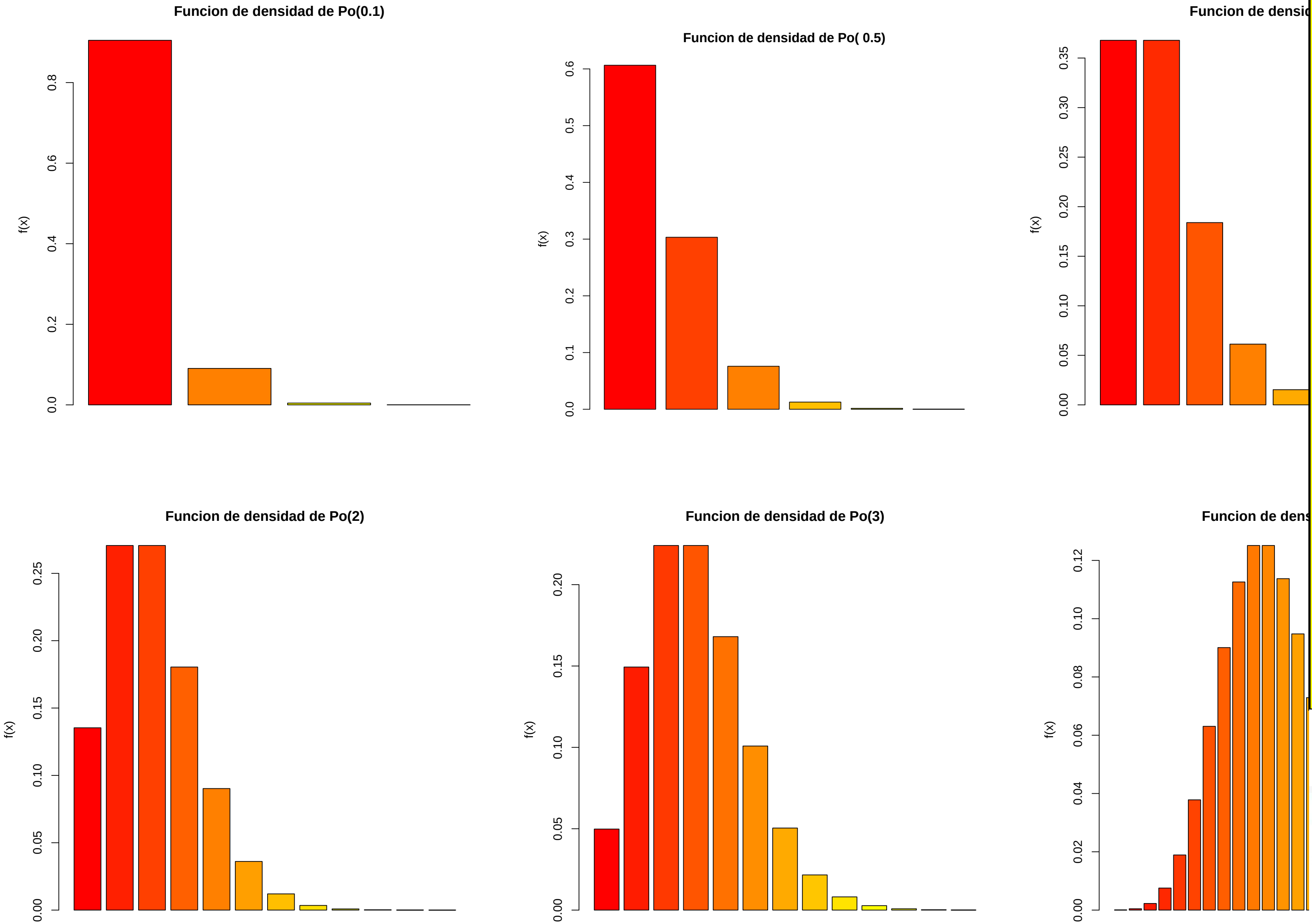
- La función de masa de la distribución de Poisson es **así** **a derecha**.
- La cola hacia la derecha de esta distribución es tanto r a cuanto mayor sea la intensidad λ.





- Si $\lambda \in \mathbb{N}$, la distribución tiene dos modas: λ y λ-1.
- Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, la única moda es $[\lambda] - 1$.

Gráficos de la distribución de Poisson



Sucesos puntuales a lo largo del espacio

- Hemos descrito la Poisson como una distribución que el número de ocurrencias a lo largo del tiempo, pero tambié o modelo para contar las ocurrencias que se producen a lo n espacio, o de otro soporte continuo.
- Por ejemplo, podemos modelizar mediante una distribució n el número de puntos de óxido por metro de alambre, el núr s por cada 10 m^2 de tela, o el número de pasas en una c e cereales para el desayuno.

Variables aleatorias continuas

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Soporte de una variable aleatoria continua

- Una **variable aleatoria** es **continua** si la cantidad de valor e tomar es no numerable.
- El **soporte** de una variable aleatoria continua está form o **o varios intervalos** de la recta real.

Valores de una variable continua

- Al contrario de lo que ocurre con las variables discretas, e conocer el valor exacto de una variable continua.
- Tomemos como ejemplo el peso de una persona elegid El peso es una variable aleatoria continua, ya que, en prin e tomar cualquier valor del intervalo $(0, \infty)$.
- Si medimos los pesos con una balanza que sea capaz ir hasta los kilogramos, y el resultado de la medición es o 62 kilos, entonces todo lo que podemos afirmar es que a persona está entre 61.5 kilos y 62.5 kilos.
- Si usamos una balanza más precisa, capaz de medir has - gramos, y el resultado de la medición es por ejemplo 6 o máximo que se puede afirmar es que el peso de la persor e 62.25 kilos y 62.35 kilos...

Probabilidades sobre una variable continua

- Dado que no es posible determinar el peso exacto de ...a, ¿tiene sentido plantearse cuál es la probabilidad de qu... ...a pese exactamente una determinada cantidad?

- Claramente, no. Pero sí tiene sentido tratar de calcular, ...o, la probabilidad de que el peso de la persona esté entre 6... ...

- Para las variables aleatorias continuas, lo interesante no v...-lar probabilidades sobre puntos aislados, sino **probabilida... ...e la variable** se encuentre en el entorno de un punto, es dec... ...e **valores dentro de un determinado intervalo.**

- En las variables continuas, la probabilidad de cada punto ..., esto es, se verifica

$$P(X = k) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{R}$.

Función de densidad. Propiedade

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Función de densidad de una variable conti

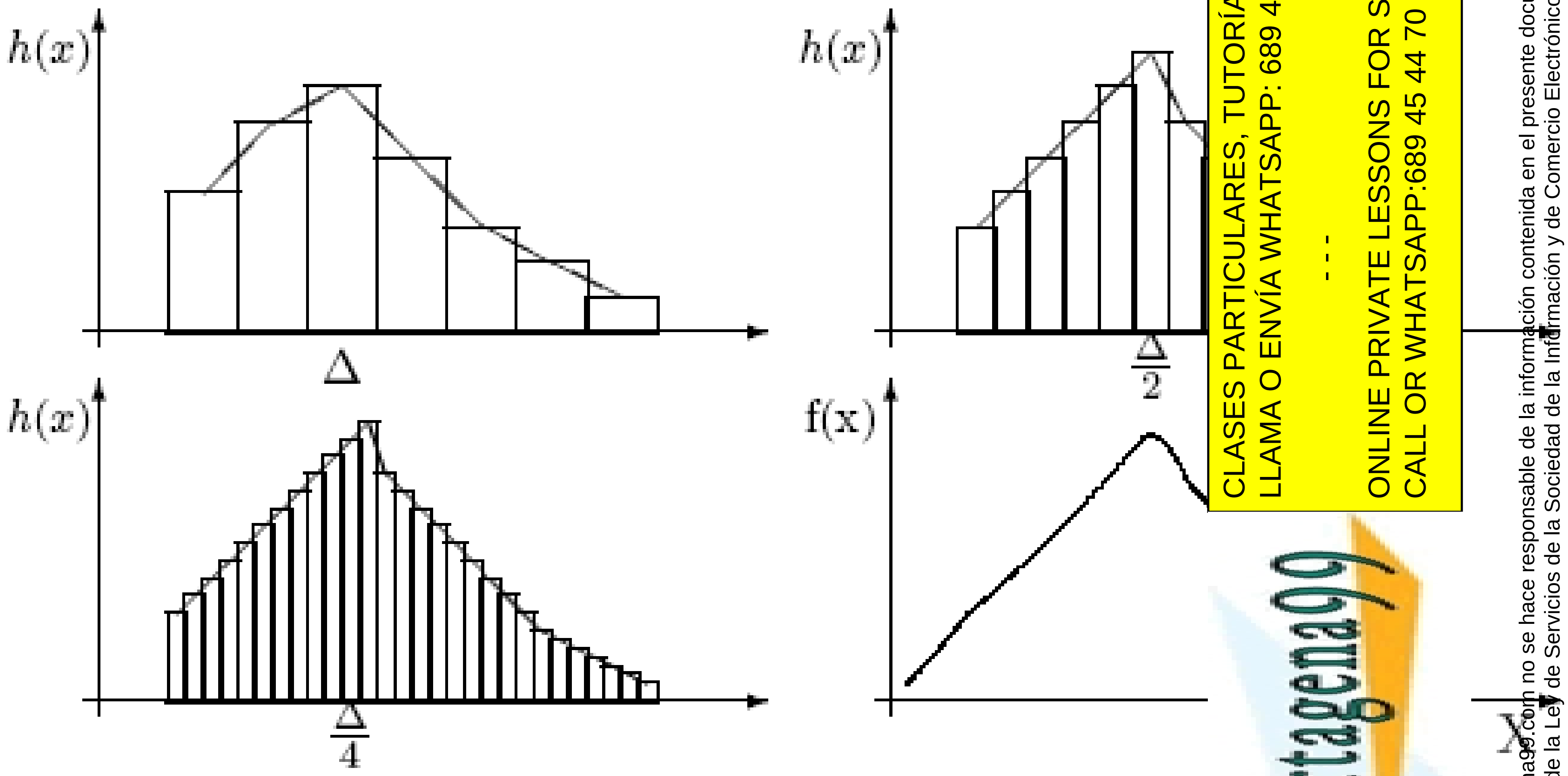
- Para describir una variable aleatoria continua, X, hay qu r cómo se distribuye la probabilidad a lo largo de su sopor
- Puesto que

$$P(X = k) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{R}$, no podemos describir la distribución de p s de X mediante una función de masa.

- Supongamos que se dispone de n realizaciones de una vari a continua X. Estos valores se pueden representar en un **his e frecuencias relativas**.
- Si se hace crecer n, es decir, si se toman cada vez más s de X, y se representan en un histograma con interva z más pequeños, el histograma tiende a una curva suave e la distribución de la variable. Esta **curva límite** recibe e e **función de densidad**, y la denotaremos por f_X.

Concepto gráfico de la función de densidad



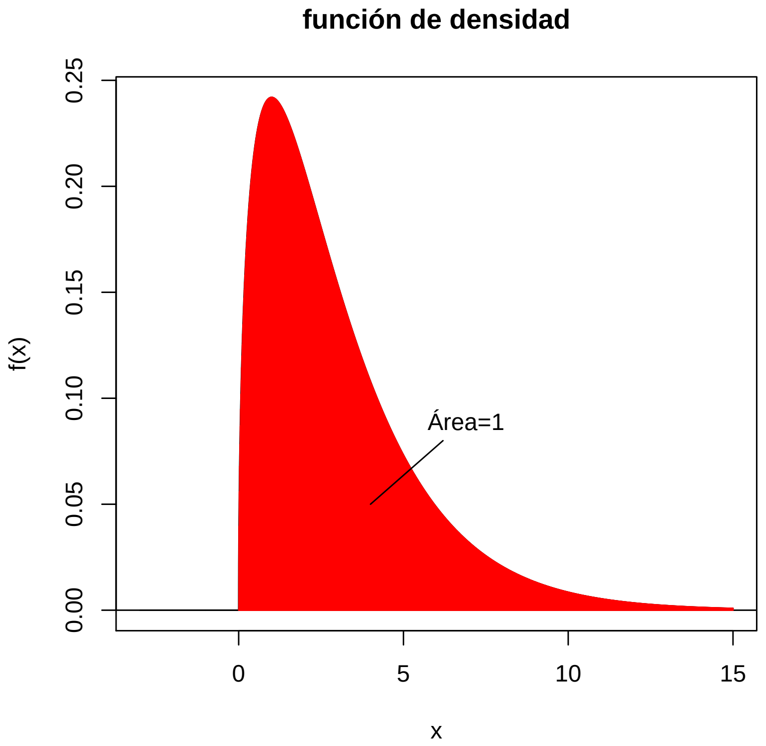
Propiedades de las funciones de densidad

- La función de densidad verifica las siguientes propiedades

  1. Es una función **no negativa**, es decir, $f_X(x) \geq 0$ para
  2. La **integral** de f_X a lo largo de su soporte es **1**, es de

  $$\int_{S_X} f_X(x)\,dx = 1.$$

  Esto supone que el área que deja por debajo f_X siem



Cálculo de probabilidades sobre variables c

- La función de densidad de una variable continua X per ar cualquier probabilidad acerca de dicha variable como un

$$P\,(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx.$$

- En particular, para $a \leq b$, se tiene que

$$P\,[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

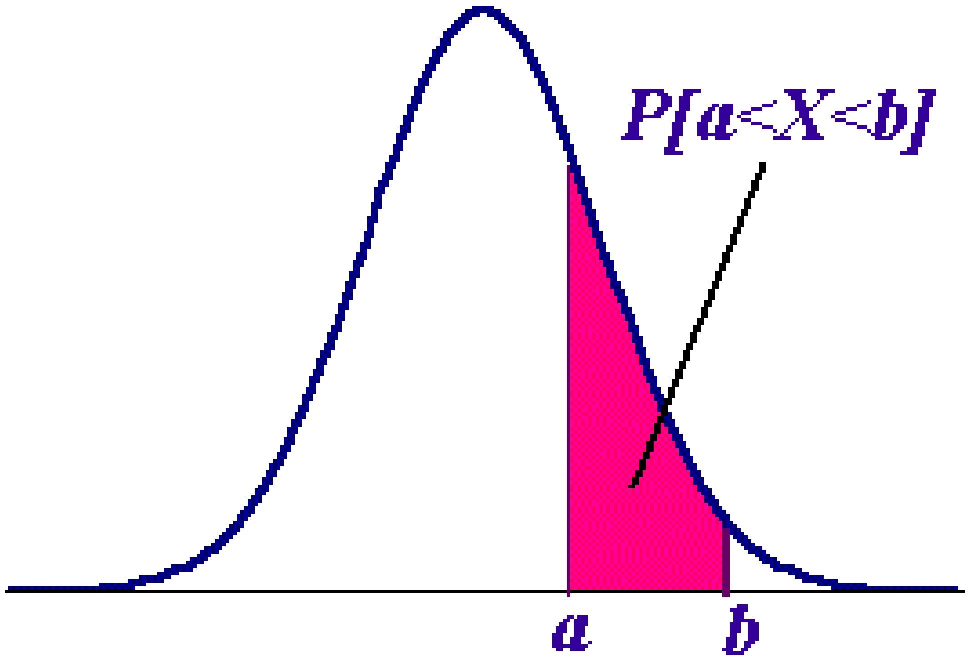
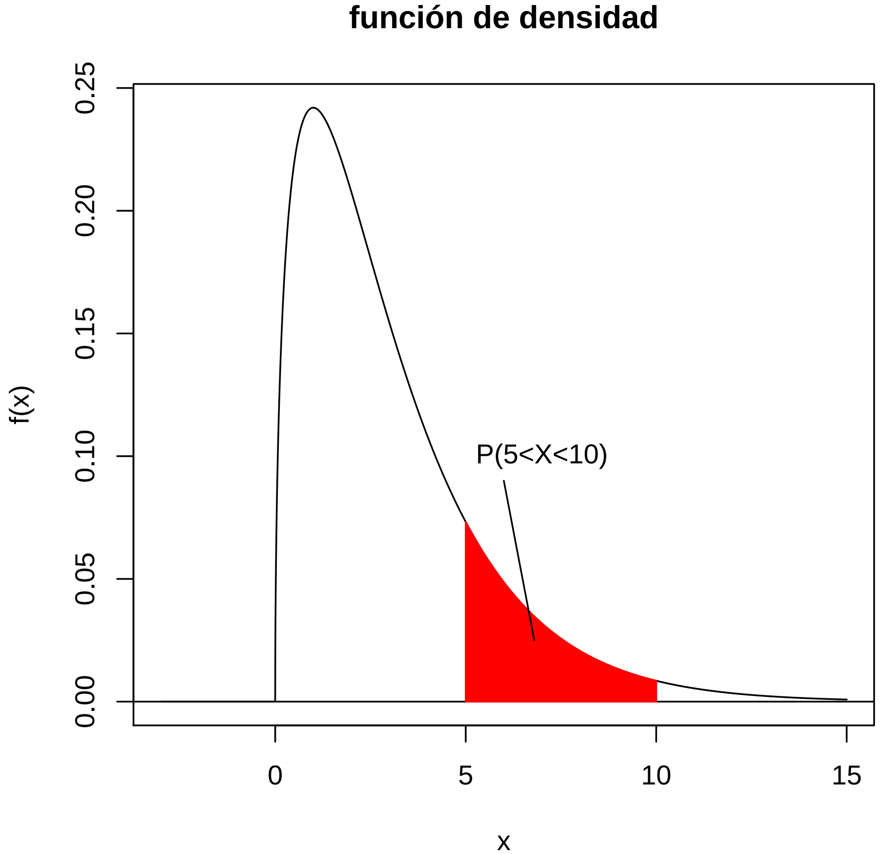


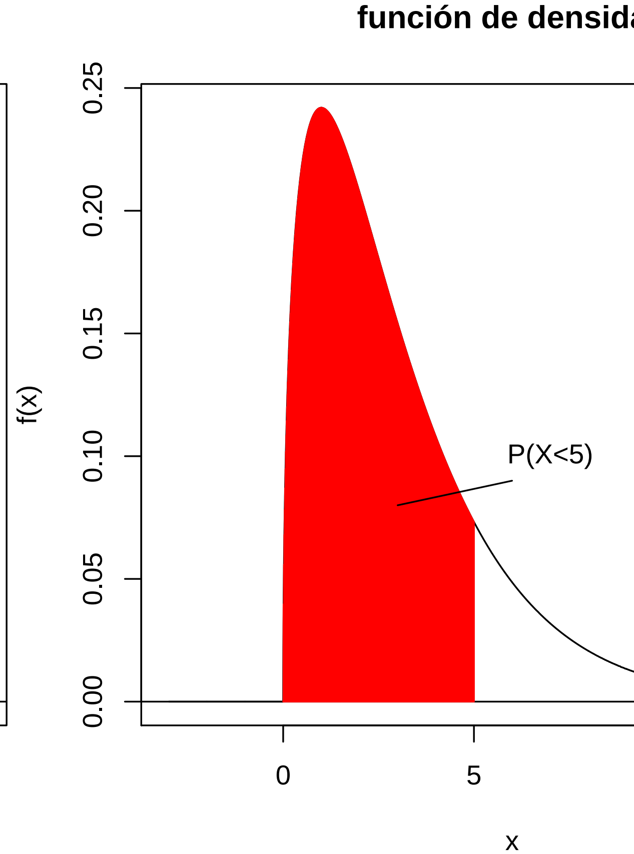
Gráfico: probabilidades sobre variables con

- Por ejemplo, en los diagramas siguientes aparecen señala s que determinan las probabilidades

$$P(5 < X < 10) \quad \text{y} \quad P(X < 5)$$

para la variable aleatoria con la función de densidad del





Probabilidad de intervalos abiertos/cerrad

- Para las variables continuas, la probabilidad de cualquier R es cero, ya que

$$P[X = a] = P[a \leq X \leq a] = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$$

- Por consiguiente, la probabilidad de un intervalo será la es abierto que si es cerrado por cualquiera de sus extrem s extremos son puntos y por tanto tienen probabilidad nul

$$\begin{aligned} P[a \leq X \leq b] &= P[a \leq X < b] \\ &= P[a < X \leq b] \\ &= P[a < X < b] \\ &= \int_a^b f_X(x)\,dx. \end{aligned}$$

¿Están bien definidas estas probabilidades?

- Las probabilidades calculadas a partir de una función de d[...]i-fican los **axiomas de Kolmogorov**:

1. La probabilidad de cualquier suceso es **no negativa**:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx \geq 0,$$

2. La **probabilidad del suceso seguro es 1**:

$$P(X \in \mathbb{R}) = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{S_X} f$$

3. Si A_1 y A_2 son **disjuntos** (es decir, si $A \cap B = \emptyset$), ent

$$\begin{aligned} P[X \in (A_1 \cup A_2)] &= \int_{A_1 \cup A_2} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{A_1} f_X(x)\, dx + \int_{A_2} f_X(x \\ &= P(X \in A_1) + P(X \in A \end{aligned}$$

Ejemplo: variable aleatoria continua

- **Ejercicio 12:** Una máquina fabrica ejes cuyos diámetros [illegible]s en metros, se distribuyen según la función de densidad

$$f_D(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{32} & \text{si } x \in [6, 10], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Comprobar que f_D es una función de densidad.
2. Calcular $P(7 < D < 9)$, $P(D < 8)$ y $P(D > 5)$.

Solución al Ejercicio 12

1. Empecemos por comprobar que f_D es, efectivamente, un […] e densidad.

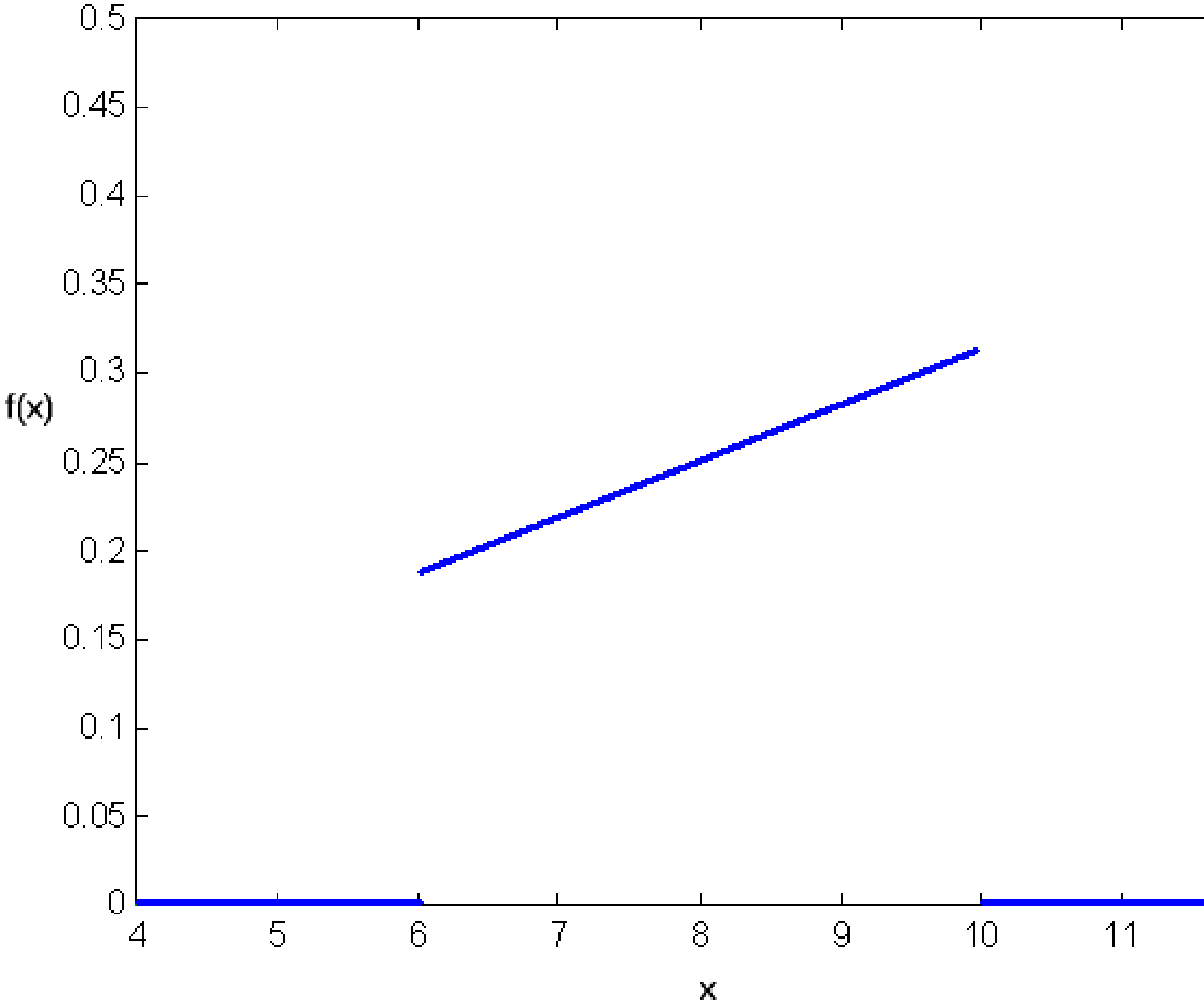
   Esto supone verificar que:

   a) $f_D(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   b) $\int_6^{10} f_D(x)\, dx = 1$

Solución al Ejercicio 12 (continuación)

- El gráfico siguiente representa f_D:

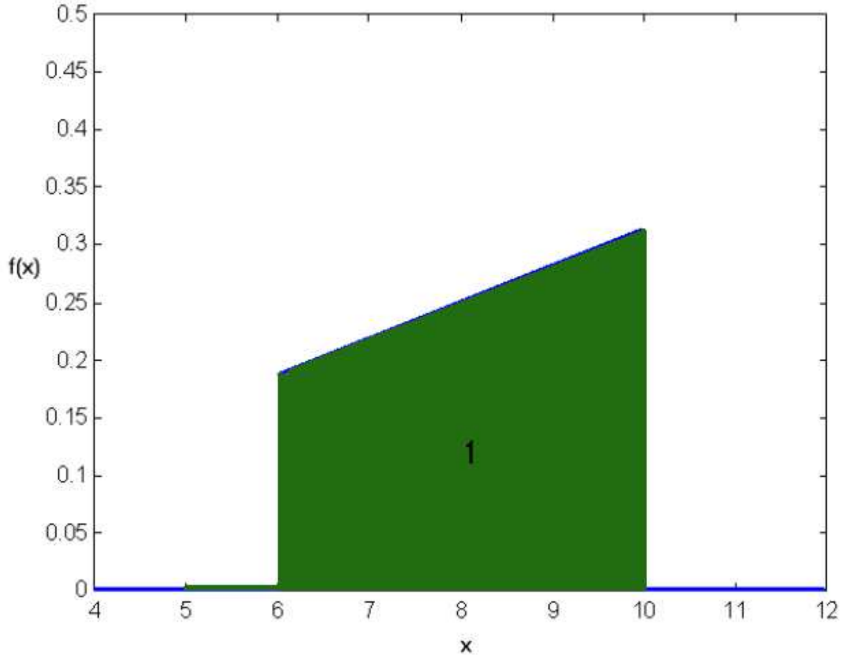


Solución al Ejercicio 12 (continuación)

a) Constatar que $f_D(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es trivial.

b) La segunda propiedad supone comprobar que el área de el plano comprendida entre f_D y el eje x es 1:

$$\int_6^{10} \frac{x}{32}\,dx = \left[\frac{x^2}{64}\right]_6^{10} = \frac{10^2 - 6^2}{64} = \frac{100 - 36}{64} =$$



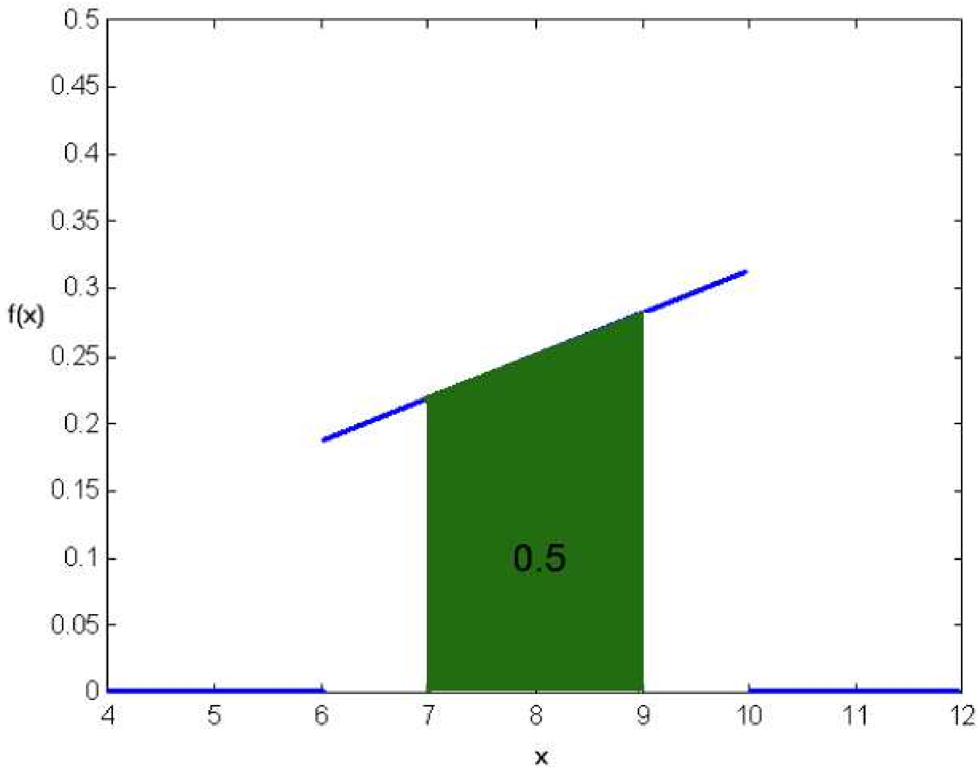
- Por tanto f_D es, en efecto, una función de densidad.

Solución al Ejercicio 12 (continuación)

2. Las probabilidades de que D tome un valor dentro de un o conjunto se calcularán integrando f_D en ese conjunto.

   Por ejemplo, la probabilidad de que el diámetro de un e al azar mida entre 7 y 9 metros es

$$P(7 < D < 9) = \int_7^9 \frac{x}{32}\,dx = \left[\frac{x^2}{64}\right]_7^9 = \frac{81-49}{64} = \frac{1}{2}$$

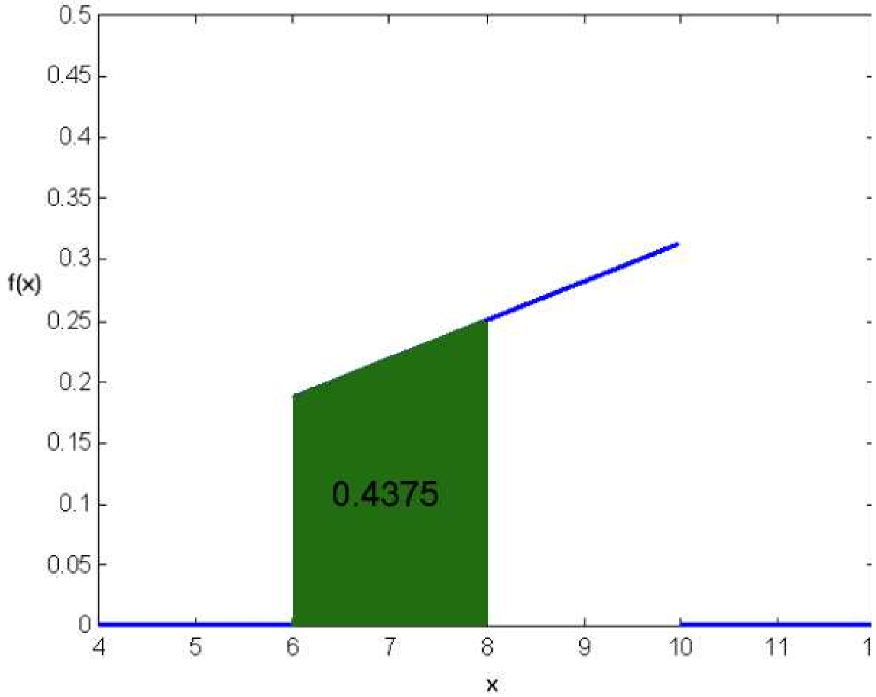


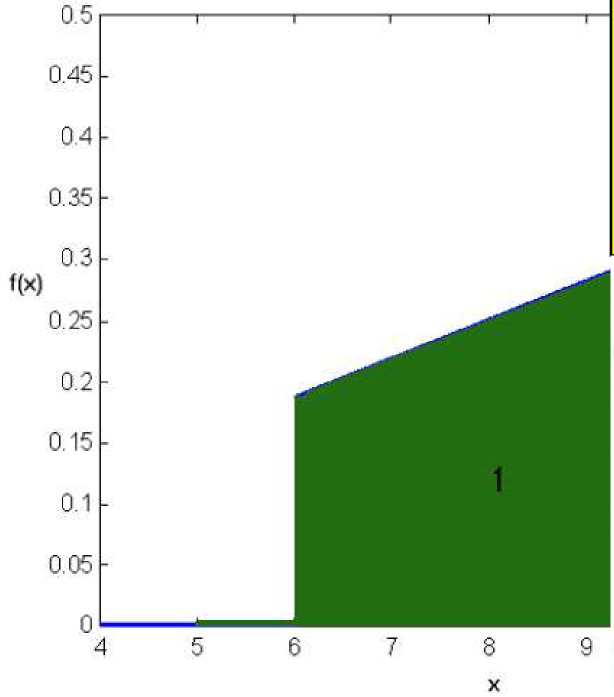
Solución al Ejercicio 12 (continuación)

- De manera análoga podemos calcular la probabilidad d… e mida menos de 8 metros o la de que mida más de 5 met…

$$P(D<8) = \int_6^8 \frac{x}{32}\,dx = \left[\frac{x^2}{64}\right]_6^8 = \frac{64-36}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$$

$$P(D>5) = 1$$





Función de distribución

de variables aleatorias continuas

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Función de distribución para X continua

- Recordemos que la **función de distribución** de una varia a X es la función F_X que asigna a cada $t \in \mathbb{R}$ la probabilid X tome un valor menor o igual que t:

$$\begin{aligned} F_X : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow (0,1) \\ & t \longrightarrow F_X(t) = P(X \leq t) \end{aligned}$$

- Para las variables continuas, la forma de calcular esta fun o-babilidad acumulada es **integrando la función de den a variable hasta el punto t:**

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx.$$

Ejemplo: función de distribución

- **Ejercicio 13:** Retomemos la variable aleatoria D que ind e-tro de los ejes, con función de densidad

$$f_D(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{32} & \text{si } x \in [6, 10], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

¿Cuál es la función de distribución de D?

Solución al Ejercicio 13

- La función de distribución de la variable D es

$$F_D\,(t) = P\,[D \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ \dfrac{t^2 - 36}{64} & \text{si } 6 \leq t \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 13: cálculo de probabilidades con

- Conociendo la función de distribución de D se puede calcu er probabilidad de esta variable sin necesidad de integrar.

- Así, por ejemplo,

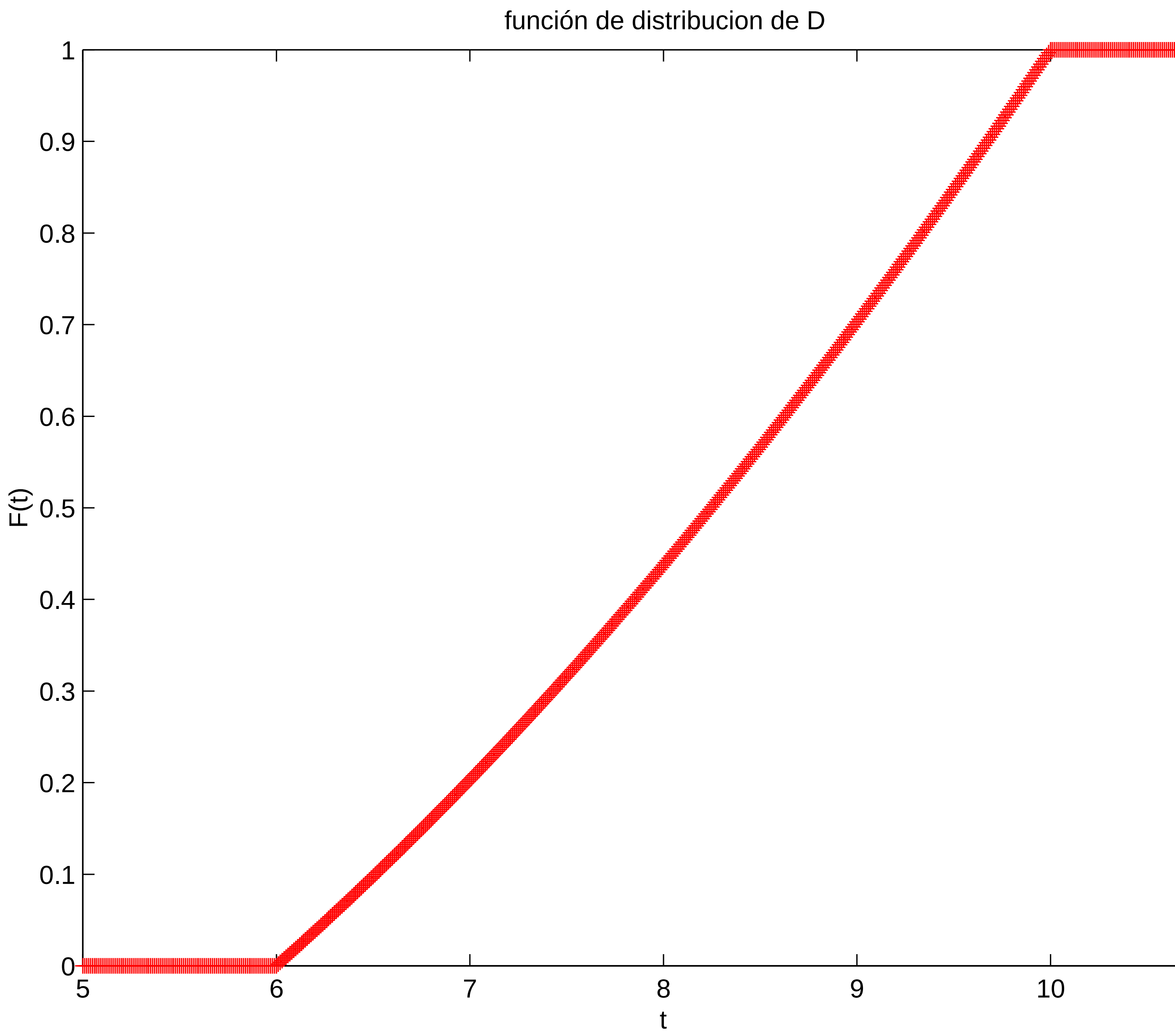
$$P(D<8)=F_D(8)=\frac{8^2-36}{64}=0.4375$$

$$P(D>9)=1-F_D(9)=1-\frac{9^2-36}{64}=1-0.7031=$$

$$P(7<X<9)=F_D(9)-F_D(7)=\frac{9^2-36}{64}-\frac{7^2-36}{64}$$

$$P(8<X<11)=F_D(11)-F_D(8)=1-\frac{8^2-36}{64}=0$$

Gráfico: función de distribución de D (F_D)



Ejercicio 13: propiedades de F_D

- Observamos que F_D:
  - Comienza en 0, ya que $F_D(t) = 0$ para todo $t < 6$.
  - Termina en 1, ya que $F_D(t) = 1$ para todo $t \geq 10$.
  - Es monótona no decreciente.
  - Es una función continua.
- Este es el aspecto que presentan en general las funciones [...]n-ción de las variables aleatorias continuas.

Relación entre F_X y f_X

- El **teorema fundamental del cálculo** implica que, para v… -tinuas,

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x).$$

- **Ejercicio 14:** Hallar la función de densidad de la varia… a con función de distribución

$$F_H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^5 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

resolución:.........pizarra

Esperanza y varianza

de variables aleatorias continuas

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Esperanza de una variable aleatoria contin

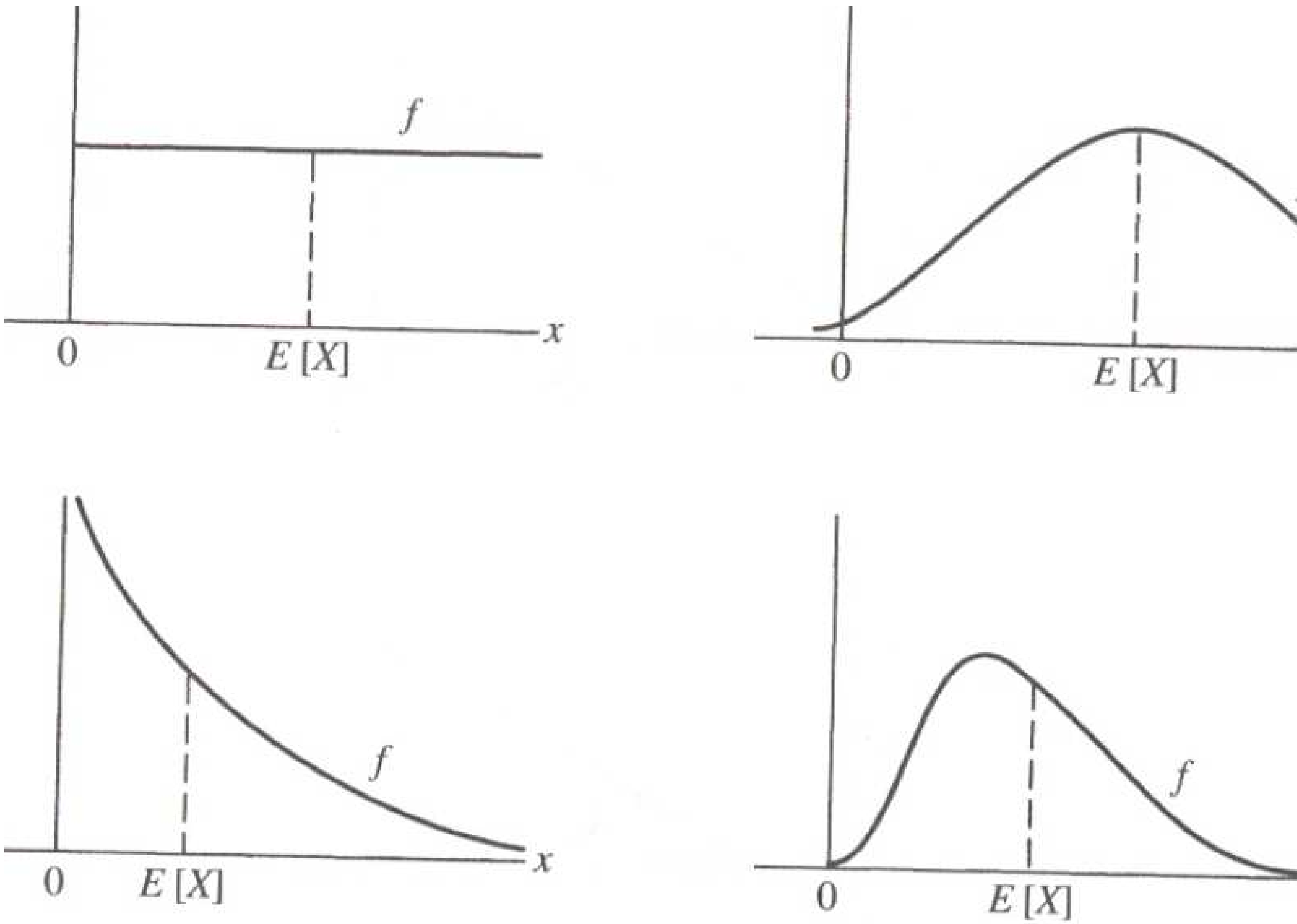
- La **esperanza** o **media** de una variable aleatoria conti e dada por

$$\boxed{E(X) = \int_{S_X} x f_X(x)\, dx}$$

- Al igual que en el caso de las variables discretas, es hab r la esperanza de una variable continua X por μ_X, o por μ
- μ_X indica dónde se encuentra el **centro de gravedad** e equilibrio de la distribución de probabilidad de X.

Visualización gráfica de $E(X)$

- Excepto en los casos triviales, como por ejemplo las varia n-sidad simétrica, no es posible hallar $E(X)$ sin recurrir a la n. Pero sí es posible visualizar geométricamente la esperanz



Ejemplo: esperanza de una variable contin

- **Ejercicio 15:** Consideremos de nuevo la variable alea e modela el diámetro de los ejes, cuya función de densidad

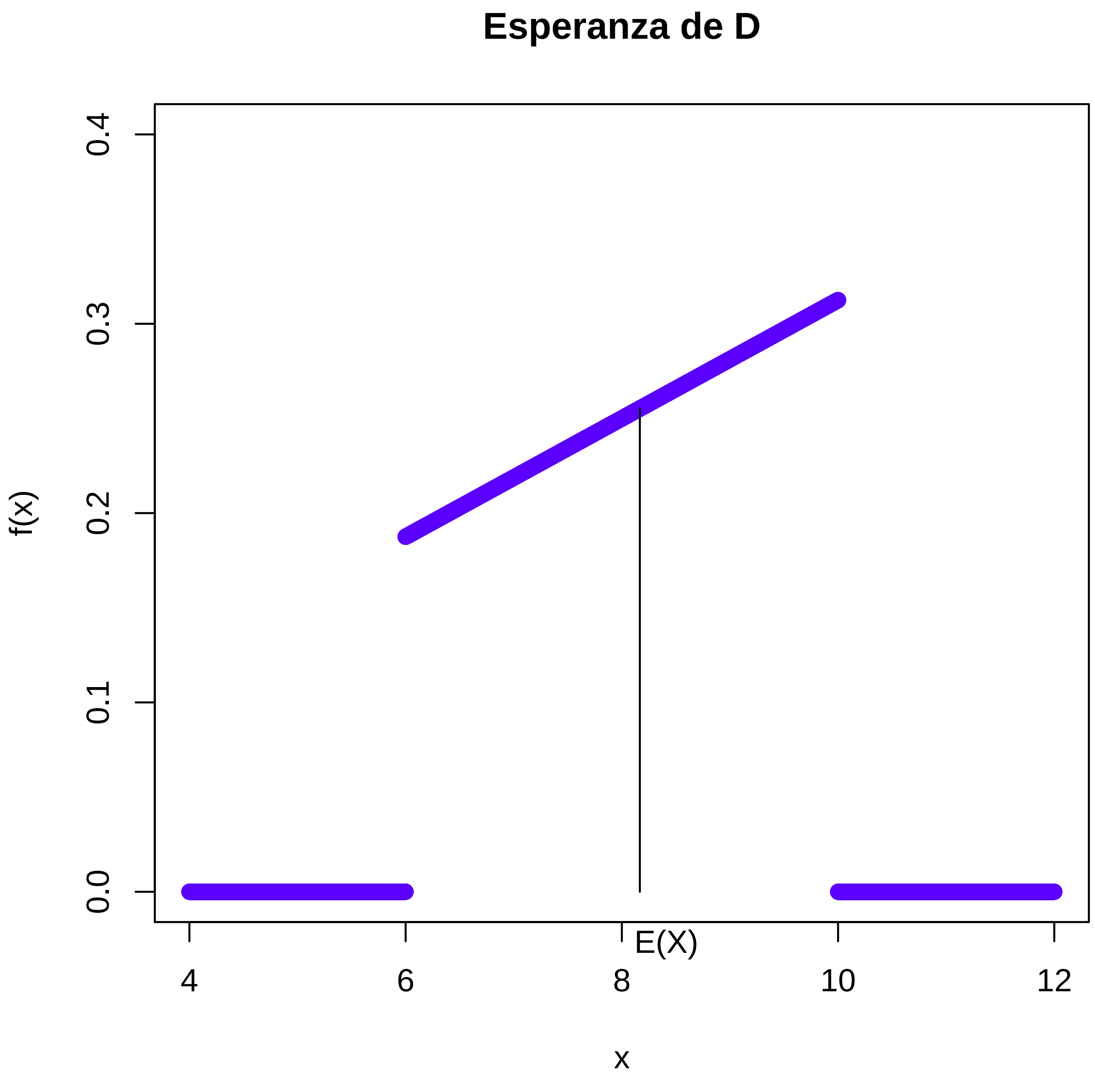
$$f_D(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{32} & \text{si } x \in [6, 10], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- La esperanza de D es

$$\begin{aligned} E(D) &= \int_{S_D} x f_D(x)\, dx = \int_6^{10} x \frac{x}{32}\, dx = \int_6^{10} \frac{x^2}{32}\, d \\ &= \left[\frac{x^3}{32 \times 3}\right]_6^{10} = \frac{10^3 - 6^3}{96} = \frac{784}{96} = \mathbf{8.1667} \end{aligned}$$

- Luego la **longitud esperada** de los díametros de los eje a esta máquina es **8,1667 metros**.

Gráfico: esperanza de una variable continu



Varianza de una variable aleatoria continu

- La **varianza** de una variable aleatoria continua,

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left(X^2\right) - E^2(X),$$

puede calcularse como

$$\boxed{V(X) = \int_{S_X} x^2 f_X(x)\,dx - \mu_X^2}$$

- $V(X)$ mide la **dispersión** de X alrededor de su punto de es decir, alrededor de $E(X)$.
- Al igual que en el caso de las variables discretas, es comu a varianza de una variable aleatoria continua σ_X^2, o simplem
- La **desviación típica** de X es la raiz cuadrada de su v e denota σ_X, o simplemente σ.

Ejemplo: varianza de una variable continua

- **Ejercicio 16:** Para los diámetros de los ejes de los ejemp... ...s tenemos que

$$E(D) = \int_{S_D} x f_D(x)\, dx = \int_6^{10} \frac{x^2}{32}\, dx = 8.1667 \text{ m}\ldots$$

y

$$E(D^2) = \int_{S_D} x^2 f_D(x)\, dx = \int_6^{10} x^2 \frac{x}{32}\, dx = \int_6^{10} \frac{x^3}{32}\, dx = \frac{87\ldots}{1\ldots}\ldots^2.$$

- Por tanto, la **varianza** de los diámetros de los ejes es

$$V(D) = E(D^2) - E^2(D) = 68 - 8.1667^2 = 1.3056\ldots$$

- La **desviación típica** de D es

$$\sigma_D = \sqrt{1.3056} = 1.1426 \text{ m}.$$

Modelos continuos especiales

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Familias de modelos continuos

- Al igual que en el caso discreto, hay ciertos modelos s aleatorias continuas que se repiten con mucha frecuencia
- Vamos a analizar tres de las familias de distribuciones co - recen con mayor frecuencia: la distribución uniforme, la l, y la distribución normal o gaussiana.

Distribución uniforme

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

URJC

Probabilidad uniformemente repartida

- Hay muchas situaciones en las cuales la probabilidad está ... e manera uniforme entre los valores del soporte

- Consideremos por ejemplo una "rueda de la fortuna" co ... n dejar girar una aguja hasta que se para y medir el ángu ... a esta aguja con el eje horizontal. En este caso, el resulta ... er cualquier ángulo entre 0^0 y 360^0, y los ángulos de igual am ... n la misma probabilidad de aparecer.

- Otro ejemplo consiste en considerar un vehículo que reco ... o-cidad constante cierto tramo desde el principio al final y ... a posición de ese vehículo en un instante elegido al azar, es ... e aleatoria que puede tomar cualquier valor dentro del tra ... -rado, y los fragmentos de dicho tramo con la misma lon ... n también la misma probabilidad.

Soporte y función de distribución de $X \sim U$

- Consideremos dos números reales, a y b, con $a < b$.
- La variable aleatoria X sigue distribución **uniforme** en el i)
  si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

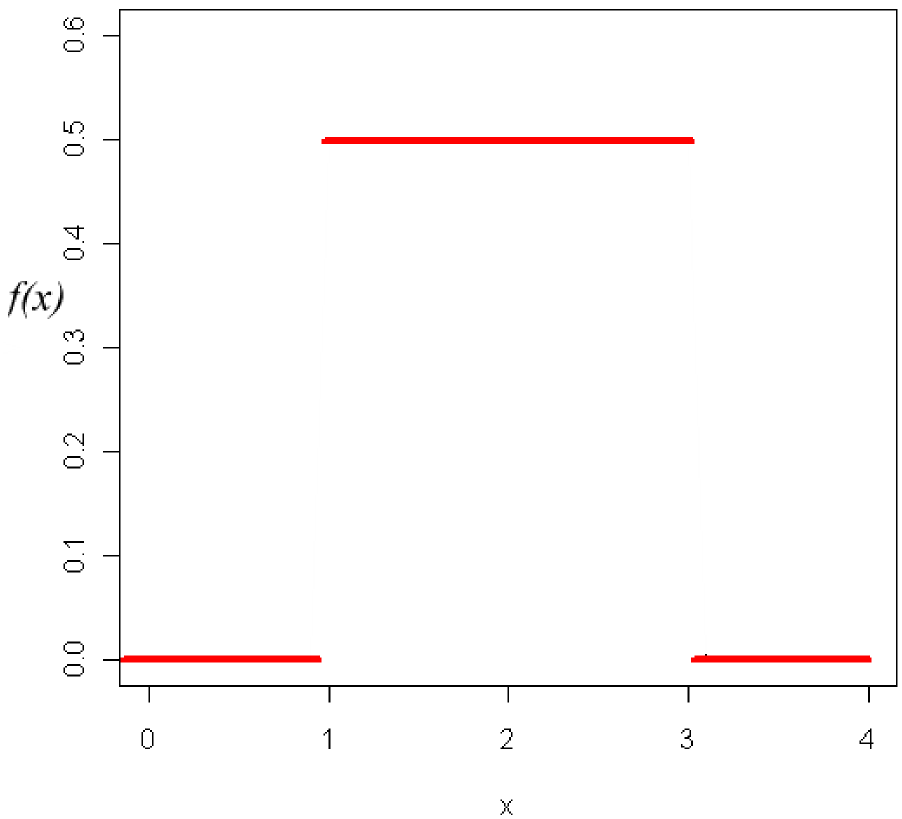
- De forma abreviada esto se denota

$$X \sim U\,(a, b)$$

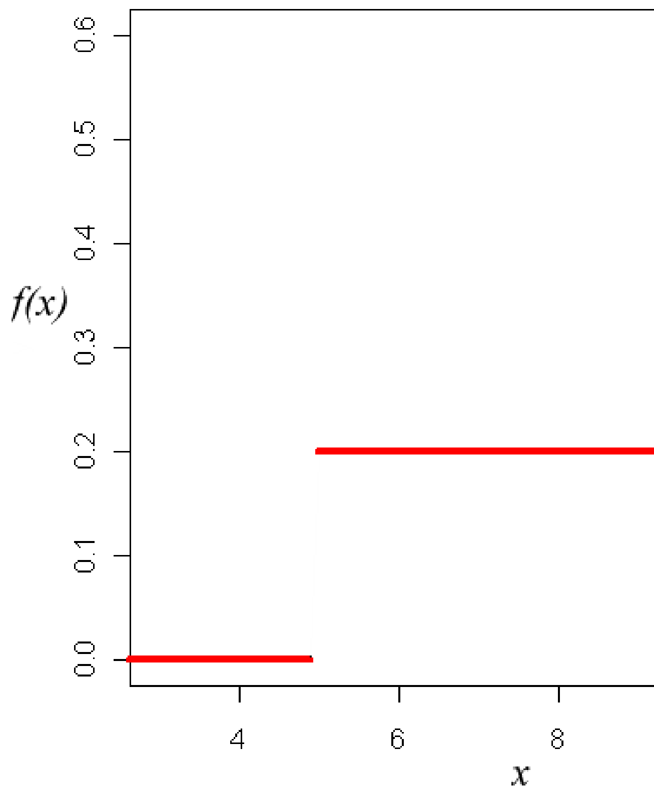
- La densidad de una variable uniforme es **constante a** e **su soporte**. Por consiguiente, la probabilidad de que e X esté comprendido en un subintervalo de (a, b) **depende** e **de la longitud del mismo, pero no de su posición.**

Gráficos de distribuciones uniformes

función de densidad de $U(1,3)$:



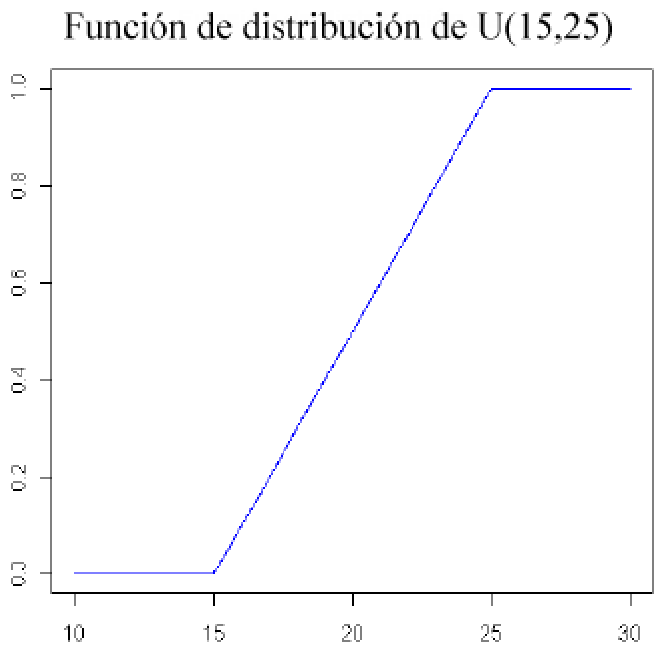
función de densidad d



Función de distribución de $X \sim U(a, b)$

- Es fácil (por ejemplo utilizando áreas de rectángulos) co e la **función de distribución** de una variable $X \sim U(a, b)$ e

$$F_X(t) = P[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{b-a}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq \\ 1 & \text{si } x > \end{cases}$$

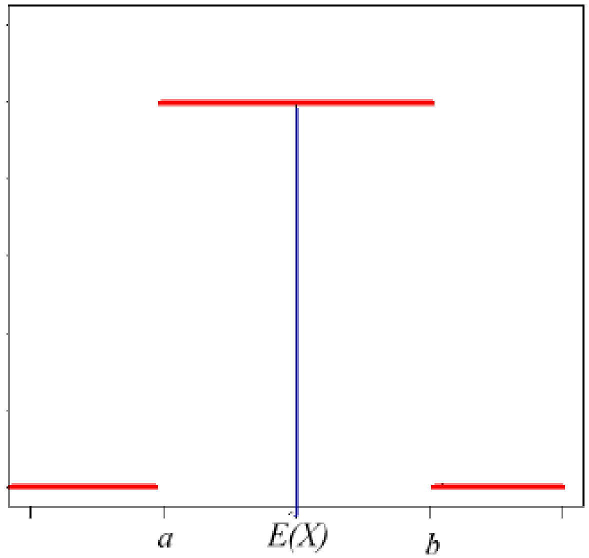


Esperanza de $X \sim U(a,b)$

- La **esperanza** de una variable $X \sim U(a,b)$ es

$$\boxed{E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}}$$

es decir, el punto medio del intervalo (a,b):



- En cuanto a la varianza de la distribución uniforme viene

$$V(X) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo: distribución uniforme

- **Ejercicio 17:** Un coche recorre con velocidad constante e va desde el kilómetro 15 hasta el kilómetro 25 de cierta

  Sea

  $C =$ posición del coche en un instante elegido al

  expresada en kilómetros.

  1. ¿Qué distribución tiene la variable C? ¿Cuál es su fun- sidad? ¿Y su función de distribución?
  2. ¿Cuál es la probabilidad de que el un instante aleatori e encuentre entre el kilómetro 18 y el kilómetro 22?
  3. ¿Cuál es valor esperado de C?

Solución al Ejercicio 17

1. Puesto el que el coche se despaza a velocidad constante y … s su posición en un instante aleatorio, la distribución de F … e a lo largo de su soporte, es decir, entre en kilómetro 15 …

$$C \sim U(15, 25)$$

Por tanto, su función de densidad es

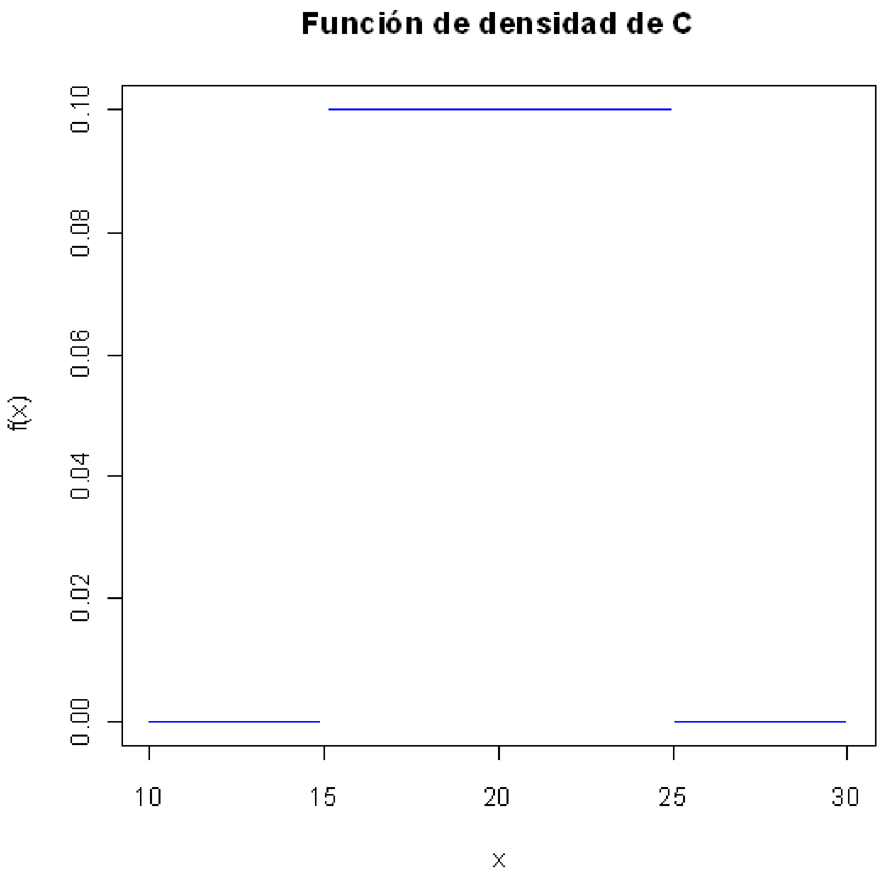
$$f_C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 15 < x < 25, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

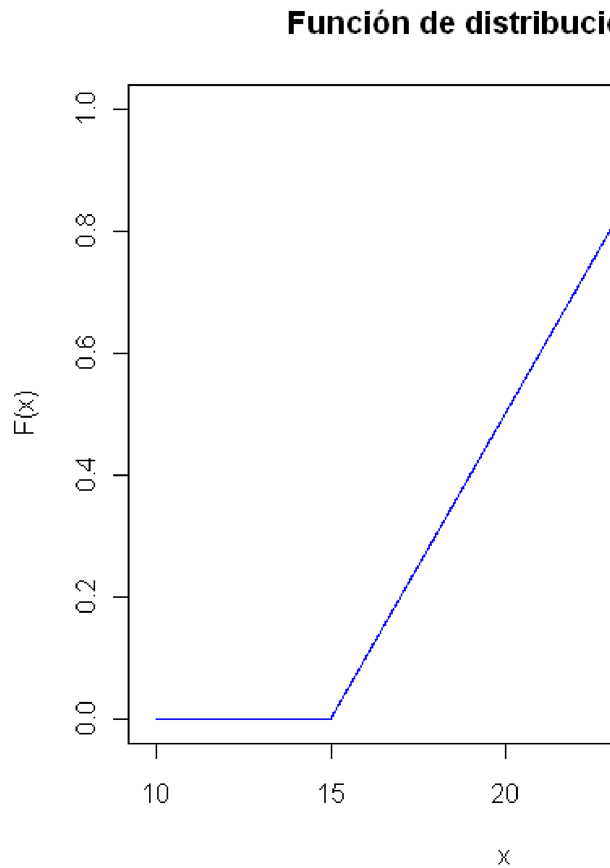
Integrando f_C se obtiene que la función de distribución c…

$$F_C(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 15, \\ \dfrac{x - 15}{10} & 15 < x < 25, \\ 1 & x \geq 25. \end{cases}$$

Solución al Ejercicio 17 (continuación)

- Gráficos:





Solución al Ejercicio 17 (continuación)

2. La probabilidad de que P tome un valor entre 18 y 22 es

$$P\left[C \in (18, 22)\right] = \int_{18}^{22} \frac{1}{10}\, dx = \frac{4}{10} = \mathbf{0.4},$$

que puede calcularde de forma más inmediata como

$$P\left[C \in (18, 22)\right] = \frac{\text{área favorable a } C \in (18, 22)}{\text{área posible}} = \frac{4}{1}$$

3. El valor esperado de C es

$$E(C) = \frac{15 + 25}{2} = \mathbf{20}$$

Esto indica que la posición en la que se espera que se ... el vehículo en un instante elegido al azar es el kilómetro ... a carretera.