ÁLGEBRA

Tema 5. Diagonalización.

Curso 2017 - 2018

José Juan Carreño Carreño

Departamento de **Matemática Aplicada**
a las Tecnologías de la Información
y las Comunicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de
Sistemas Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Contenido [1]

1. Endomorfismo diagonalizable: autovalor y autovector
2. Polinomio característico. Propiedades
3. Subespacios propios
4. Aplicaciones
   - Potencias de una matriz diagonalizable
   - Resolución de ecuaciones en diferencias

[1] Transparencias elaboradas a partir de las de Luis Pozo y del esquema preparado por el equipo docente.

Definición

Un endomorfismo $f : V \to V$ es **diagonalizable** si existe una base $B = \left[e_1, \dots, e_n \right]$ de V tal que

$$f(e_i) = \lambda_i e_i \qquad \forall i \in \{1, \cdots n\}$$

para ciertos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
Esto significa, en particular, que en la expresión matricial de f respecto de esa base B, la matriz asociada es diagonal:

$$Y_B = D \cdot X_B \qquad \text{con} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo

El endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con expresión matricial

$$Y_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} X_{B_c}$$

es diagonalizable.

Basta considerar la base $B = [(1,1,0),(0,1,1),(1,1,2)]$.

La expresión matricial respecto a B es

$$Y_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X_B$$

Ejemplo

El endomorfismo $g : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ con expresión matricial

$$Y_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X_{B_c}$$

es diagonalizable.

Basta considerar la base $B = [(1,0,4),(0,1,1),(1,3,3)]$.

La expresión matricial respecto a B es

$$Y_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X_B$$

Definición

Un vector no nulo $v \in V$, se dice que es un **autovector** del endomorfismo f con **autovalor** $\lambda \in \mathbb{K}$ si $f(v) = \lambda\, v$.

Observaciones

Por tanto, f es diagonalizable si y solo si existe en V una base de autovectores de f.

Ejemplo

En los ejemplos anteriores, $(0,1,1)$ es autovector de:

- f con autovalor -2: $f(0,1,1) = (-2)\,(0,1,1)$.
- y también de g con autovalor 2: $g(0,1,1) = 2\,(0,1,1)$.

Definición

Si f es diagonalizable, A es la matriz de f respecto de cierta base B, y B' es una base de autovectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

siendo P la **matriz de paso** de B' a B cuyas columnas son las coordenadas de los vectores e_i respecto de la base B.

También podemos escribir $A = P D P^{-1}$

Ejemplo

Para el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del ejemplo anterior,

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Para el endomorfismo $g\colon (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ del ejemplo anterior

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomio característico

Proposición

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. λ *es autovalor de* f.
2. *Existe un vector no nulo* $v \in V$ *tal que* $f(v) = \lambda v$.
3. *Matricialmente, se verifica que* $AX_B = \lambda X_B$ *para algún vector no nulo* X, *donde* A *es la matriz asociada a* f *respecto de alguna base* B.
4. *La ecuación* $(A - \lambda I)\, X = 0$ *no tiene solución única (y trivial), donde* I *es la matriz identidad de orden* $n = \dim V$.
5. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Observaciones

$\det(A - \lambda I)$ *es un polinomio en* λ *de grado* $n = \dim V$.

Definición

El **polinomio característico de** f se define como

$$p(t) = \det(A - tI) \qquad \text{en} \qquad \mathbb{K}[t]$$

donde A es una de las matrices asociadas a f respecto de cierta base.

Propiedades

1. *El polinomio característico de* f *no depende de la base respecto de la cual se toma la matriz asociada a* f*.*
2. λ *es autovalor de* f *si y solo si es raíz del polinomio característico de* f*.*

Ejemplo

El polinomio característico de f es

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} -\det \begin{pmatrix} 6 & -6 & 4-t \\ 3 & -5-t & 3 \\ 1-t & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_2-\frac{1}{2}F_1 \\ F_3-\frac{(1-t)}{6}F_1}}{=} -\det \begin{pmatrix} 6 & -6 & 4-t \\ 0 & (-5-t)+3 & 3-\frac{4-t}{2} \\ 0 & -3+1-t & 3-\frac{(4-t)(1-t)}{6} \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 6 & -6 & 4-t \\ 0 & -2-t & \frac{t+2}{2} \\ 0 & -2-t & \frac{-t^2+5t+14}{6} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (continuación)

$$\underset{F_3:=F_3-F_2}{=} -\det\begin{pmatrix} 6 & -6 & 4-t \\ 0 & -2-t & \frac{t+2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-t^2+5t+14}{6} - \frac{t+2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -(-2-t)(-t^2+5t+14-3(t+2))$$

$$= -(t+2)(t^2-2t-8) = -(t+2)^2(t-4),$$

y también

$$p(t) = \det\begin{pmatrix} -2-t & 0 & 0 \\ 0 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix} = -(t+2)^2(t-4).$$

Ejemplo

El polinomio característico de g es

$$p(t) = \begin{pmatrix} 3-t & 4 & 1 \\ 3 & 4-t & 3 \\ 3 & 2 & -t \end{pmatrix}$$

$$= -t(t^2+3t+2)+1+1-3(4-t)-(3-t)+2t$$

$$= -t^3-3t^2-2t+2-2+3t-3+t+2t$$

$$= -t^3-3t^2+4t-3$$

$$= -(t-2)^2(t-3).$$

Subespacios propios

Definición

El **subespacio propio** (**autoespacio**) asociado al autovalor λ de f es

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \quad / \quad f(v) = \lambda v \right\}$$

Es decir, V_λ está formado por todos los autovectores de f con autovalor λ más el vector nulo.

Observaciones

Unas ecuaciones implícitas de V_λ*, expresadas matricialmente, son*

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Propiedades

1. $\dim(V_\lambda) \geq 1$
2. $\lambda \neq \mu \quad \Longrightarrow \quad V_\lambda \cap V_\mu = \{0_V\} \quad \Longrightarrow \quad V_\lambda + V_\mu = V_\lambda \oplus V_\mu$

Ejemplo

Los autovalores de f son $\{-2,4\}$ y los autoespacios asociados:

$$V(-2)=\left\{\begin{pmatrix} 1+2 & -3 & 3 \\ 3 & -5+2 & 3 \\ 6 & -6 & 4+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$V(-2) \equiv x-y+z=0\}$$

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$V(4) \equiv \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ -2x+z=0 \end{array}\right\}$$

Teorema

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *son las raíces del polinomio característico de* f*, entonces* f *es diagonalizable si y solo si*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

Observaciones

Por tanto, en tal caso, una base de autovectores se obtendrá juntando bases de cada uno de los subespacios propios en que se descompone V.

Corolario

En particular, si f *tiene* n *autovalores distintos, entonces* f *es diagonalizable.*

Proposición

Si λ *es raíz del polinomio característico de* f *y su multiplicidad es* k, *entonces* $\dim(V_\lambda) \leq k$, *y*

$$f \text{ diagonalizable} \iff \begin{cases} \dim(V_\lambda) = \text{multiplicidad de } \lambda, \quad \forall \lambda \text{ autovalor de } f. \\ \text{y} \\ n = \text{suma de las multiplicidades de todos los autovalores de } f. \end{cases}$$

es decir:

$$n = \sum_{\lambda} \dim(V_\lambda)$$

- Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ se puede interpretar como la expresión matricial de un endomorfismo $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ con respecto a una base B cualquiera (por ej., la canónica B_c).

- Si el endomorfismo f es diagonalizable, entonces existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det(P) \neq 0$, tal que

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{con} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(P es la matriz de paso de B' a B_c, siendo $B' = [\, e_1, \ldots, e_n \,]$ una base de autovectores, teniendo cada e_i el autovalor asociado λ_i).

- En ese caso,

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \overset{(k)}{\cdots} \left(PDP^{-1}\right) =$$

$$= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right) \overset{(k)}{\cdots} \left(P^{-1}P\right)D\,P^{-1} =$$

$$= PD^kP^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ejemplo

Calcular A^{100} siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea f el endomorfismo cuya expresión matricial respecto a la base canónica es A. El polinomio característico de f es

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 2 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 2 & 0 & -t \end{pmatrix} = -(t-2)(t+1)(t-4),$$

entonces f es diagonalizable con autovalores $\{-1, 2, 4\}$.

Ejemplo (continuación)

Los autoespacios son

$$V(-1) = \left\{ (x,y,z) : \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{c} 4x + 2z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad V(-1) \equiv \left. \begin{array}{c} 2x + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad V(-1) = L(1,0,-2),$$

$$V(2) = \left\{ (x,y,z) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad V(2) \equiv x = z = 0\} \quad \Longrightarrow \quad V(2) = L(0,1,0).$$

Ejemplo (continuación)

$$V(4)=\left\{(x,y,z): \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad V(4)\equiv \left.\begin{array}{c} x-2z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad V(4)=L(2,0,1),$$

de modo que una base de autovectores es

$$B= \;[\,(1,0,-2),\ (0,1,0),\ (2,0,1)\,]$$

y se tiene

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejemplo (continuación)

Por tanto,

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{201} \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ -2 & 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2^{202}+1}{5} & 0 & \frac{2^{201}-2}{5} \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ \frac{2^{201}-2}{5} & 0 & \frac{2^{200}+4}{5} \end{pmatrix}.$$

Aplicación: Resolución de ecuaciones en diferencias lineales homogéneas con coeficientes constantes

Si puede modelizarse un problema de modo que se conozca el comportamiento de ciertas variables $x_1, \ldots, x_n$ en un momento k a partir del valor de esas variables en el momento $k-1$, mediante una expresión matricial

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ \vdots \\ x_n(k-1) \end{pmatrix},$$

entonces, por recurrencia, se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix},$$

siendo $x_i(0)$ el **valor inicial** de la variable x_i (valor en el instante cero)

Ejemplo

El 90% de los hijos de médicos cursan estudios de medicina, mientras que solo el 20% de los hijos de padres no médicos estudian esa carrera. Si cada familia tiene un único hijo, ¿cuál será el porcentaje de estudiantes de medicina después de muchas generaciones?

Si $x_1(n)$ es la proporción de estudiantes de medicina tras n generaciones, y $x_2(n)$ es la proporción de no estudiantes de medicina, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 0.9x_1(n) + 0.2x_2(n) \\ x_2(n+1) &= 0.1x_1(n) + 0.8x_2(n), \end{aligned}$$

es decir,

$$X(n+1) = AX(n) \text{ , con } X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \text{ , y } A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix},$$

(siempre $x_1(n) + x_2(n) = 1$, y las columnas de la matriz también suman 1).

Ejemplo (continuación)

Si la proporción inicial de estudiantes de medicina es x_0, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix}.$$

Veamos si A es diagonalizable, y, en su caso, cuál es su forma diagonal:

$$\begin{aligned} p(t) &= \det \begin{pmatrix} 0.9 - t & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - t \end{pmatrix} = t^2 - 1.7t + 0.7 \\ &= (t-1)(t-0.7). \end{aligned}$$

Al haber dos autovalores distintos, 1 y 0.7, A es diagonalizable.

Ejemplo (continuación)

Los autoespacios son

$$V(1) = \left\{ (x, y) \ / \ \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \ V(1) \equiv x = 2y\} \Longrightarrow \ V(1) = L(2, 1)$$

$$V(0.7) = \left\{ (x, y, z) \ / \ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \ V(0.7) \equiv x + y = 0\} \Longrightarrow \ V(0.7) = L(1, -1)$$

y por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejemplo (continuación)

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0.7^n \\ 1 & 0.7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+0.7^n}{3} & \frac{2(1-0.7^n)}{3} \\ \frac{1+0.7^n}{3} & \frac{1-2\cdot 0.7^n}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (continuación)

En conclusión, cuando n es muy grande, $0.7^n \to 0$, y entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 - x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

y dos terceras partes de los estudiantes acaban estudiando medicina.

Nótese que el resultado no depende de cuál fuese la proporción inicial de estudiantes de medicina.