$\langle \rho \rangle = \{\rho, \rho^2, i\} \quad |\rho| = 3$

$\sigma^3 = i$

$\rho^3 = i$

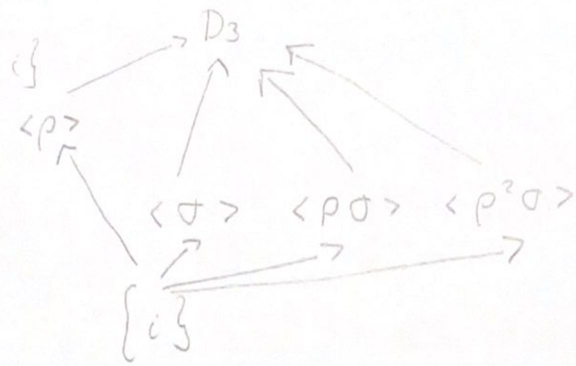
$\sigma\rho = \rho^2\sigma$

$\langle \sigma \rangle = \{\sigma, i\} \quad |\sigma| = 2$

$\rho\sigma\rho\sigma = \rho\rho^2\sigma\sigma = \rho^3 = \sigma^2 = i \cdot i = i$

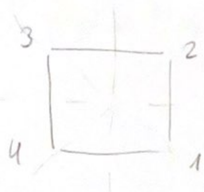
$\langle \rho\sigma \rangle = \{\rho\sigma, i\} \quad |\rho\sigma| = 2$

$\langle \rho^2\sigma \rangle = \{\rho^2\sigma, i\}$



$D_4 =$ hacerlo

$|D_4| = 8 \rightarrow |D_n| = 2n \qquad \boxed{\rho^4 = i \quad \sigma^2 = i \quad \sigma\rho = \rho^3\sigma}$



$D_4 = \{\rho, \rho^2, \rho^3, i, \sigma_d, \sigma_D, \sigma_R, \sigma_V\}$

$\{\rho, \rho^2, \rho^3, i, \rho\sigma, \sigma, \rho^3\sigma, \rho^2\sigma\}$

$\langle \rho\sigma, \rho^2 \rangle = \{\rho\sigma, \rho^2, \rho^3\sigma, i\}$

$\rho\sigma\rho^2 = \rho\rho^3\sigma\rho = \sigma\rho = \rho^3\sigma$

* Repaso de criterios para que un grupo sea normal:

Def: $xH = Hx$ $\qquad$ $\underbrace{xh = h'x}$

completa

i) $xHx^{-1} \subset H$

ii) H es el único subgrupo con $|H|$

iii) $[G:H] = 2 = \frac{|G|}{|H|}$

iv) G abeliano

v) $H \leq Z(G)$

$\boxed{32}$ $H \leq G \;/\; \underbrace{\forall x \in G \quad x^2 \in H}_{\text{hipótesis}}$ $\quad$ Dem: $\underbrace{H \trianglelefteq G}_{\text{Tesis (comp)}}$, G/H abeliano

$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \,/\, h \in H\}$

lo que queremos saber es que $x^2 \in H$

$xHx^{-1} \subset H$: $xhx^{-1} = xh\tilde{h}x = \underbrace{(xh\tilde{h})(xh\tilde{h})}_{\overset{\cap}{H}}\underbrace{(h\tilde{h})}_{\overset{\cap}{H}}{}^{-1} \in H$

$x^2 \in H$

$x^2 = h'$

$x = h'x^{-1}$, $x = x^{-1}h'$

$(h')^{-1}x = x^{-1}$

$\tilde{h}x = x^{-1}$

· Comprobamos si es abeliano la operación:

$$\left.\begin{array}{l} xH * yH = xyH \\ yH * xH = yxH \end{array}\right\} xyH = yxH : \quad \begin{array}{l} xyH \subset yxH \qquad yxh' \\ xyH \supset yxH \end{array}$$

$\overset{\cap}{H}\,\overset{\cap}{H}\,\overset{\cap}{H}\quad \overset{\cap}{H}\,) \in yx$ ...

homomorfismo de grupos

def. $(G, \circ)$, $(F, *)$ grupos → está siempre definida y la imagen es única

Es una aplicación que muestra que operar en G es lo mismo que operar en F, es

$$G \xrightarrow{f} F \qquad f(gh) = f(g) * f(h)$$

$$g, h \qquad f(g), f(h)$$

$$gh \qquad f(gh)$$

ejemplos:

1) $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$x \qquad f(x) = e^x$ aplicación

$e^{x+y} = f(x+y) = f(x)f(y) = e^x e^y$ } se cumple

da igual sumar que multiplicar, es lo mismo

$f(0) = 1 \quad f(-2) = e^{-2} \quad f(2)^{-1} = (e^2)^{-1}$

2) $GL(n) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$A \qquad |A|$

$|AB| = g(AB) = g(A) \cdot g(B) = |A||B|$ } se cumple

3) $D_3 \xrightarrow{h} S_3$

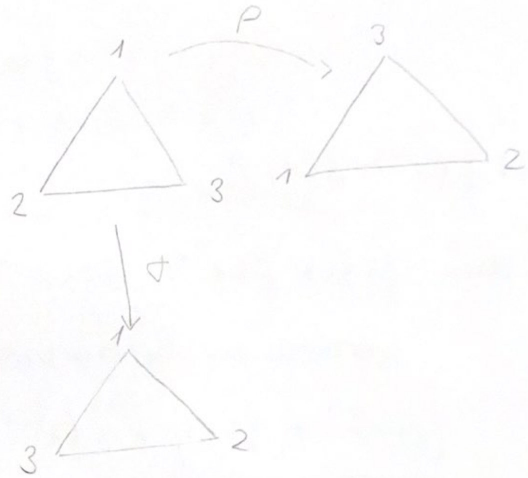
$\rho \qquad (1\ 2\ 3)$

$\sigma \qquad (1\ 2)$

$\rho^2 \qquad (1\ 3\ 2)$

i

$\rho\sigma$



en vez de ver si $h(xy) = h(x) * h(y)$ se cumple, vamos a ver que las relaciones de grupo dihédrico se cumpla en el grupo de permutaciones:

$\rho^3 = i$ $\qquad (1\ 2\ 3)^3 = i$

$\sigma^2 = i$ $\qquad (2\ 3)^2 = i$

$\sigma\rho = \rho^2\sigma$ $\qquad (2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)^2 (2\ 3)$

$\rightarrow (2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3)$

$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(2\ 3) = (1\ 3)$

* <u>Propiedades de los homomorfismos:</u> $f: (G, \cdot) \longrightarrow (F, *)$

1) $f(e_1) = e_2$ $\qquad e_1$ neutro de G, e_2 neutro de F.

dem: Sea $g \in G$, $\left.\begin{array}{l} f(g) * f(e_1) = f(g e_1) = f(g) \\ f(e_1) * f(g) = \underset{\uparrow}{=} f(e_1 g) = f(g) \end{array}\right\} \Rightarrow f(e_1) = e_2$

f es homomorfismo.

2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

dem: $f(x) * f(x^{-1}) = f(x x^{-1}) = f(e_1) = e_2$

operamos por la izquierda con $f(x)^{-1}$

$\underbrace{\left(f(x)^{-1} * f(x)\right)}_{e_2} * f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Def. El núcleo de un homomorfismo son los elementos que van a parar al neutro

/relación homo. núcleo

$$f : (G, \cdot) \longrightarrow (F, *)$$

$$\ker(f) = \{ g \in G \,/\, f(g) = e_2 \}$$

* Teorema 1

EXAMEN

$\ker f \trianglelefteq G$

2º ver si es normal

1º ver si es subgrupo

El núcleo es un subgrupo normal de G.

dem. 1) $\ker f \leq G$: $g, h \in \ker f$ $\; gh^{-1} \in \ker f$:

$f(gh^{-1}) = f(g) * f(h^{-1}) = f(g) * f(h)^{-1}$ $f(gh^{-1}) = \ldots = e_2$

$= e_2 * e_2^{-1} = e_2$ ⊘ homomorfismo

2) $\ker f \trianglelefteq G$: $\; g(\ker f)g^{-1} \subset \ker f$: Sea $k \in \ker f$

$gkg^{-1} \in \ker f$: →

→ : $f(gkg^{-1}) = \ldots \qquad = e_2$

$f(gkg^{-1}) = f(g) * f(k) * f(g^{-1}) =$

$= f(g) * e_2 * f(g)^{-1} = e_2$

* Teorema 2

f es inyectivo $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{ e_1 \}$

clases: multiplicar un elemento por todos [illegible]

Grupo cociente $G/H \times G/H \longrightarrow G/H$

$gH \quad g'H \qquad gg'H$

Teorema

a) $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq F$

caso particular $\mathrm{Im} f \equiv f(G) \leq F$

B

f

Teoremas de isomorfía

¿Cuándo 2 grupos son isomorfía? $(G, \cdot)$ $(F, *)$ gr

Cuando son iguales como conjuntos. $f: G \longrightarrow F$ a. biyectiva (uno a uno) aplicación

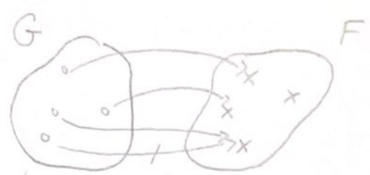
Cuando son iguales sus operaciones f homomorfismo

siempre imagen definida única

$*$ isomorfismos

$G \sim F$

G es isomorfo de F



2 elementos no tengan la misma imagen - inyectiva
cada elemento tiene - sobreyectiva
} biyectiva o biyección

→ Notación:

f. homom. inyectivo = monomorfismo

f. homom. sobrectivo = epimorfismo

Un isomorfismo de G a G = automorfismo

Teorema: $G \sim F$ $\quad f: G \longrightarrow F$

a) G abeliano $\Longleftrightarrow$ F abeliano

b) G cíclico $\Longleftrightarrow$ F cíclico

dem: la hipótesis es que G es abeliano entonces la tesis es abeliano

a) $\Longrightarrow$) $\quad$ G abel

1º empiezo por la tesis $\quad x, y \in F \qquad x * y = f(a) * f(b) = f(ab) =$ ⊛

$\uparrow$ f sobreyectiva $\qquad \uparrow$ f homomorfismo

¿?

r que
taciones

b) G cíclico $G = \langle g \rangle = \langle g' \rangle$ $\quad f: G \xrightarrow{\sim} F$

Sea $x \in F$ $\quad x = f(a) = f(g^m) = f(g)^m \Rightarrow F = \langle f(g) \rangle$

$a \in G$ $\uparrow$ $\uparrow$

f sobreyectiva $\quad$ hipot $\quad$ f homomorfismo

$a = g^m$

$m \in \mathbb{N}$

ejemplo: $\mathbb{Z}_6 \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ⊛

-)

def: el producto cartesiano de conjuntos G, F

$$G \times F = \{(g, f) / g \in G \ f \in F\} \quad G \times F \times H = (g, f, h)$$

el producto cartesiano de grupos $(G, \cdot)(F, *)$

$$(G \times F) \times (G \times F) \longrightarrow G \times F$$
$$(g, f) \quad (g', f') \qquad (g, f) \circ (g', f') = (gg', f * f')$$

$|(g, f)| = mcm(|g|, |f|)$

$\mathbb{Z}_6$ ⊛ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{\bar{a}, \bar{b} / \bar{a} \in \mathbb{Z}_2, \bar{b} \in \mathbb{Z}_3\} = \langle(\bar{1}, \bar{1})\rangle$ ⊙

$(\bar{1}, \bar{2}) + (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0}) = e$

opuestos (es como el inverso pero en la suma)

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$

⊙ $|(\bar{1}, \bar{1})| = mcm(2, 3) = 6$

abeliano

teoremas de isomorfía

$f : (G, \cdot) \longrightarrow (F, *)$ homom $\Rightarrow \ker f \trianglelefteq G$

1er Th. de isomorfía:

$f : (G, \cdot) \longrightarrow (F, *)$ homom $\Rightarrow \ker f \trianglelefteq G$

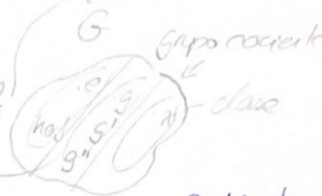
$G/_{\ker f} \sim \operatorname{Im} f$

dem: $\tilde{f} : G/_{\ker f} \longrightarrow \operatorname{Im} f$

$g \ker f$ $\qquad f(g) = f(g')$ ¿es igual?

$\shortparallel$ $\qquad = \{g'k / k \in \ker f\}$

811) $\{gh / h \in \ker f\}$



$g \ker f = g' \ker f$
$g \in g' \ker f$
$g' \in g \ker f$

1º) ¿Bien definido?

e_2 Neutro de F

$g' \in g \ker f$; $g' = gk$ / $k \in \ker f$ → además $e_2 \in \ker$ (núcleo)

se pasa ahí porque

$f(g') = f(gk) = f(g) * f(k) = f(g) * e_2 = f(g)$

2º) ¿La imagen es única?

a. porque f es aplicación.

3º) Sobreyectiva (porque todos los elementos con a la imagen de f)

4º) Inyectiva $\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

no hay dos elementos con la misma imagen

$g \ker f$; $g' \ker f$ $\qquad \tilde{f}(g \ker f) = \tilde{f}(g' \ker f) \Rightarrow g \ker f = g' \ker f$

$f(g) = f(g') \Rightarrow \boxed{g \in g' \ker f}$;

5) $\tilde{f}$ homomorfismos $\left(G/_{\ker f}, \circledast\right)$ $g\ker f \circledast g'\ker f = gg'\ker f$

$$\tilde{f}(g\ker f \circledast g'\ker f) = \tilde{f}(g\ker f) * \tilde{f}(g'\ker f)$$

grupo cociente

$$\tilde{f}(g\ker f \circledast g'\ker f) = \tilde{f}(gg'\ker f) = f(gg') = f(g) * f(g') =$$

$\tilde{f}$ de una clase $g\ker f$ es $f(g)$ homomorfismo

$$= f(g) * f(g') = \tilde{f}(g\ker f) * \tilde{f}(g'\ker f)$$

1er parcial

14

381 Ser subgrupo es ser grupo por sí mismo, independiente del ambiente.

Ser subgrupo normal depende del ambiente

Si $K \trianglelefteq G \Longrightarrow K \trianglelefteq H$ | $K \trianglelefteq H \not\Rightarrow K \trianglelefteq G$. aunque $H \trianglelefteq G$

subgr. norm. $gK = Kg \Longrightarrow hK = Kh$ | la propiedad transitiva

$\forall g \in G$ $\forall h \in H$

$K \leq G \Longrightarrow K \leq H$

$K \leq H$ y $H \leq G \Longrightarrow K \leq G$

a) S_4 $H = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle = \{(12)(34), (13)(24), \underbrace{(14)(23)}_{\text{subgrupo}}, \varepsilon\}$

$(12)(34) \circ (13)(24)$

elegimos K...

$K = \{(12)(34), \underbrace{\varepsilon}_{\text{inverso}}\}$

$K \trianglelefteq H$: 1) H abeliano

2) $[H:K] = \dfrac{|H|}{|K|} = \dfrac{4}{2} = 2 \Longrightarrow K \trianglelefteq H$

$H \trianglelefteq S_4$: probamos

para H no

$(123)H = \begin{cases} (123)(12)(34) = (134) \\ (123)(13)(24) = (243) \quad (123) \\ (123)(14)(23) = (142) \end{cases}$

$H(123) \begin{cases} (12)(34)(123) = (243) \\ (13)(24)(123) = (142) \quad (123) \\ (14)(23)(123) = (134) \end{cases}$

$(243)H = H(243)$