RELACIONES DE ORDEN

Definición

Una relación de orden R en un conjunto A es una relación que verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva

Reflexiva: $a\,R\,a,\ \ \forall\, a \in A$

Antisimétrica: si $\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$

(Definición equivalente de la propiedad Antisimétrica: Si aRb y a≠b $\Rightarrow$ b $\not R$ a)

Transitiva: si $\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\,R\,c$

Un conjunto ordenado (A, R) es un par formado por un conjunto A y una relación de orden R definida en él.

Ejemplos

1. En el conjunto A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} se define la relación $a\,R\,b$ si $a \le b$

   Es reflexiva ya que todo número es menor o igual a si mismo.

   Es antisimétrica ya que $a \le b$ y $b \le a$ sólo puede cumplirse cuando a = b.

   Es transitiva ya que si $a \le b$ y $b \le c$, entonces $a \le c$.

   Por tanto es una relación de orden.
2. La relación de divisibilidad en el mismo conjunto A, a S b si a|b también es una relación de orden.
3. $(\mathbb{N}, \le)$ y $(\mathbb{Z}, \le)$ son conjuntos ordenados ($a \le b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b = a + n$).
4. $(\mathbb{N}, \mid)$, donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ ($a \mid b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a\,n$), es un conjunto ordenado.
5. La relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ ($a \mid b \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a\,k$) NO es una relación de orden (falla la propiedad antisimétrica) y por tanto, $(\mathbb{Z}, \mid)$ NO es un conjunto ordenado.
6. $(D_n, \mid)$, donde D_n es el conjunto de los divisores positivos de n ($D_n=\{k \in \mathbb{N} \ /\ k|n\}$) y $\mid$ indica la relación de orden de divisibilidad en D_n, es un conjunto ordenado.

Observación: Si $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{k_j}$ se tiene que $|D_n|=(k_1+1)\,(k_2+1)\,\ldots\,(k_j+1)$. Por ejemplo, $|D_{2^2 3}|=3\cdot 2=6$.

7. $(\wp(S), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

   Hay una diferencia esencial entre las dos primeras relaciones: en la primera dados dos elementos cualesquiera del conjunto, o bien $a \le b$, o bien $b \le a$. Sin embargo, en la segunda, al elegir los elementos 3 y 5, 3 | 5 y $5 \nmid 3$. Esta diferencia se expresa en la siguiente definición:

Definición

R es una relación de orden total en A si R es una relación de orden en A que verifica que dados cualquier par de elementos $a, b \in A$, $a\,R\,b$ o $b\,R\,a$. Cuando R es una relación de orden total en A se dice que (A,R) es un **conjunto totalmente ordenado**.

Dos elementos *a* y *b* de un conjunto ordenado (A, R) se dicen que son comparables si *a*R*b* o *b*R*a*.

Ejemplos

1. La relación $\leq$ es una relación de orden total en A y (A, $\leq$) es un conjunto totalmente ordenado. ($\mathbb{N}$**,** $\leq$) también es un conjunto totalmente ordenado.
2. La relación de divisibilidad | no es un orden total en A, aunque sí lo es en el conjunto D_8={1,2,4,8}. También se verifica que, ($\mathbb{N}$, $\mid$) y por ejemplo (D_6, $\mid$), donde $\mid$ indica la relación de orden de divisibilidad, son conjuntos parcialmente ordenados.

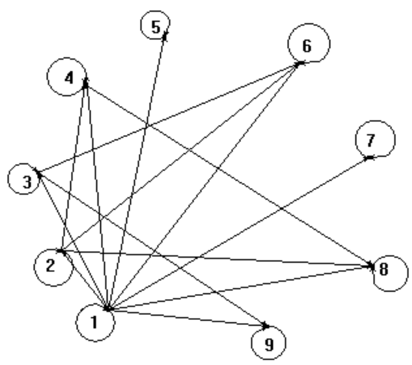
REPRESENTACIÓN DE CONJUNTOS ORDENADOS: DIAGRAMAS DE HASSE

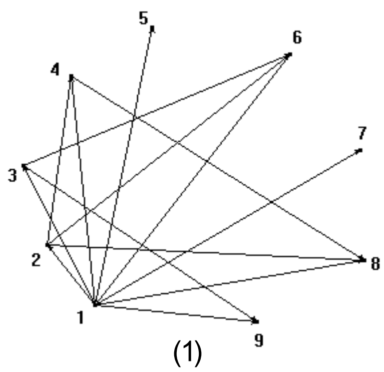
Una relación de orden, como cualquier otra relación en un conjunto A, puede ser representada mediante un digrafo, pero en el digrafo de una relación de orden, hay muchas aristas que no es necesario representar, ya que es seguro que están ahí debido a las propiedades de la relación. El diagrama de Hasse (Helmut Hasse, 1898-1979) suprime esas aristas para ganar en simplicidad y claridad. Se obtiene en tres pasos:

1. Como la relación es reflexiva, cada elemento tiene un bucle, por lo que se pueden eliminar.
2. Como la relación es transitiva, se eliminan todas las aristas que puedan ser obtenidas por transitividad.
3. Por último se colocan los vértices de manera que la dirección de las aristas sea de abajo hacia arriba y se eliminan las flechas de las aristas.

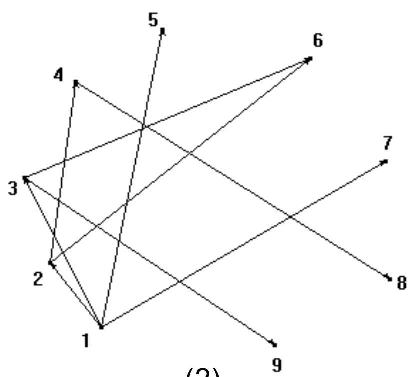
Ejemplo

Construcción del diagrama de Hasse del conjunto ordenado (A,|) a partir de su digrafo:

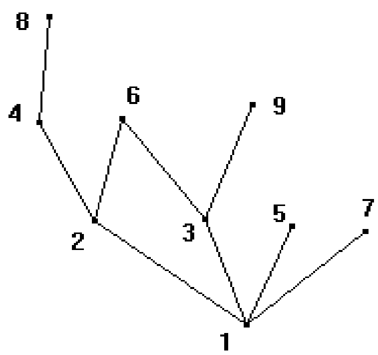




(1)



(2)



(3)

ORDEN PRODUCTO Y ORDEN LEXICOGRÁFICO

Si (A,R) y (B,S) son dos conjuntos ordenados, en el conjunto producto cartesiano AxB se pueden definir dos relaciones de orden:

- ORDEN PRODUCTO en AxB: (a,b) R_{Prod} (c,d) $\Leftrightarrow$ aRc y bSd.
- ORDEN LEXICOGRÁFICO en AxB: (a,b) R_{Lex} (c,d) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a \neq c \text{ y aRc} \\ a = c \text{ y bSd} \end{cases}$.

Si (A,R) y (B,S) son dos conjuntos totalmente ordenados, entonces el conjunto producto (AxB,R_{Lex}) es totalmente ordenado, sin embargo, el conjunto producto (AxB, R_{Prod}) no es necesariamente totalmente ordenado.

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS EN CONJUNTOS ORDENADOS

(COTAS SUPERIORES E INFERIORES, SUPREMO E ÍNFIMO, MAXIMALES Y MINIMALES, MÁXIMO Y MÍNIMO)

Definiciones: Sea (A,R) un conjunto ordenado y B un subconjunto de A no vacio:

$c_s \in$ A es cota superior de B si bRc_s, $\forall b \in B$ (*si todos los elementos de B están relacionados con c_s*)

$c_i \in$ A es cota inferior de B si c_i R b, $\forall b \in B$ (*si c_i está relacionado con todos los elementos de B*).

s $\in$ A es supremo de B si s es cota superior y s R c_s $\forall$ c_s cota superior de B
(s *es la "menor" de las cotas superiores de B*).

i $\in$ A es ínfimo de B si i es cota inferior y c_i R i $\forall$ c_i cota inferior de B
(i *es la "mayor" de las cotas inferiores de B*).

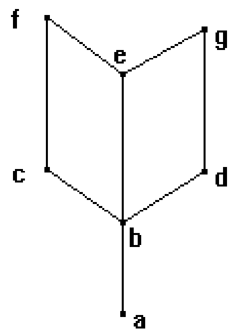
M$\in$B es máximo de B si $\forall b \in B$ se tiene bRM (i.e. si M es cota superior de B y M $\in$ B)

m$\in$B es mínimo de B si $\forall b \in B$ se tiene mRb (i.e. si m es cota inferior de B y m $\in$ B)

a$\in$B es maximal de B si **NO existe** x$\in$B con x≠a tal que aRx

a$\in$B es minimal de B si **NO existe** x$\in$B con x≠a tal que xRa

Ejemplo: Sea A={a,b,c,d,e,f,g} con el orden definido por el diagrama de Hasse, B={b,c,e} y C={a,b,e}



Cotas inferiores de B = {a, b}	ínfimo = b = mínimo
Cotas superiores de B = {f}	supremo = f no tiene máximo
Minimales de B={b}	Maximales de B={c,e}
Cotas inferiores de C = {a}	ínfimo = a = mínimo
Cotas superiores de C = {e, f, g}	supremo = e = máximo
Minimales de B={a}	Maximales de C={e}