CAPÍTULO 5

# Transformada de Laplace

## 5.1. Transformada de Laplace

En este capítulo vamos a estudiar la transformada de Laplace real y cómo utilizarla en la resolución de ecuaciones diferenciales.

**Definición 5.1.1.** Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que la función $t \mapsto f(t)e^{-\sigma t}$ es integrable (en sentido impropio)[1] para algún $\sigma \in \mathbb{R}$. La

[1] Una función $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable (Riemann) en cada intervalo $[0, A]$, con $A > 0$, se dice que es integrable (en sentido impropio) si el límite

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A h(x)\,dx \tag{5.1}$$

existe. En este caso se denota

$$\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A h(x)\,dx.$$

La definición anterior se puede extender al caso en que $h$ no está acotada en un entorno de 0, pero es integrable en cada intervalo $[a, A]$ con $0 < a < A$. En este caso se dice que $h$ es integrable (en sentido impropio) si el límite

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}} \int_a^A h(x)\,dx \tag{5.2}$$

existe. También en este caso se denota por $\int_0^\infty h$ al límite anterior, si existe.

Si el límite (5.1), o en su caso (5.2), existe cuando se remplaza $h$ por $|h|$, se dice que la función $h$ es absolutamente integrable (en sentido impropio) o que la integral de $h$ es absolutamente convergente. Se comprueba que toda función absolutamente integrable es integrable y que

$$\left|\int_0^{+\infty} h(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |h(x)|\,dx.$$

función
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$
definida en el conjunto
$$D_{\mathcal{L}[f]} = \{s \in \mathbb{R} : \ t \mapsto f(t)e^{-st} \text{ es integrable}\}$$
se denomina **transformada de Laplace** de $f$.

El nombre de esta transformada proviene de que la integral que la define aparece en la *Théorie analytique des probabilités* que Laplace publicó en 1812.

**Ejemplo 5.1.2.** Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $f \equiv a$ en $[0, +\infty)$, la función $t \mapsto ae^{-st}$ es integrable si, y solo si, $s > 0$ y
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} ae^{-st}dt = \frac{a}{s}.$$
En este caso, $D_{\mathcal{L}[f]} = (0, +\infty)$.

**Ejemplo 5.1.3.** Sean $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $f(t) = e^{at}$, para $t \in [0, +\infty)$. La función $t \mapsto f(t)e^{-st}$ es integrable si, y solo si, $s > a$ y
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a}.$$
En este caso, $D_{\mathcal{L}[f]} = (a, +\infty)$.

Lamentablemente, no toda función, incluso de clase $C^\infty$, tiene transformada de Laplace.

**Ejemplo 5.1.4.** La función $f(t) = e^{t^2}$, $t \in [0, +\infty)$, no tiene transformada de Laplace, porque para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ la función $t \mapsto f(t)e^{-\sigma t}$ no es integrable ya que $f(t)e^{-\sigma t} \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

El hecho de que la transformada de Laplace de una función arbitraria pueda no estar definida o lo esté en un conjunto muy pequeño la hace poco útil si no se restringe la clase de funciones a las que se aplica. Por este motivo vamos a limitarnos a considerar sólo aquellas funciones para las que la integral que aparece en la definición de la transformada es absolutamente convergente. Para simplificar la escritura, en el resto de este capítulo vamos a denotar por $e_a$, para $a \in \mathbb{R}$, a la función $t \in [0, +\infty) \mapsto e^{at}$.

**Definición 5.1.5.** Denotaremos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las funciones $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable para algún $\sigma \in \mathbb{R}$.