Investigación Operativa

Programación lineal continua

Índice

Conceptos básicos de programación lineal

Un modelo matemático o problema se dice que es de **programación lineal** si la **función objetivo** y las **restricciones** del problema son una **función lineal de las variables de decisión** y, además, éstas últimas pueden tomar cualquier valor real.

La **forma estándar de un problema lineal** es la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} max\ (min) & c^T x \\ sujeto\ a: & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}}$$

$x \in \mathbf{R}^n$ es el vector de variables de decisión,

$c \in \mathbf{R}^n$ es el vector de coeficientes de la función objetivo,

$A \in \mathbf{M}(\mathbf{R}, m\times n)$ es la matriz de restricciones del problema,

$b \in \mathbf{R}_+^m$ es el vector de términos independientes de las restricciones,

0_n es el vector n–dimensional con todas las coordenadas 0.

El rango de la matriz A se considerará que es siempre $m \leq n$. Con esto se pretende evitar la posibilidad de restricciones contradictorias o redundantes.

Nota: En general entenderemos que los vectores son vectores columna

Conceptos básicos de programación lineal

La forma estándar cumple que:

1. Todas las restricciones son igualdades con segundo miembro no negativo.
2. Todas las variables son no negativas.

REDUCCIÓN A LA FORMA ESTÁNDAR:

- ¿Cómo transformar una restricción de desigualdad en una de igualdad?

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + h = b, \quad h \geq 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - e = b, \quad e \geq 0 \end{array}}$$

h se denomina **variable de holgura**

e se denomina **variable de exceso**

$$\boxed{\begin{array}{lll} 4x_1 + 3x_2 \leq 240 & \rightarrow & 4x_1 + 3x_2 + h = 240 \\ 2x_1 + x_2 \geq 100 & \rightarrow & 2x_1 + x_2 - e = 100 \end{array}}$$

Conceptos básicos de programación lineal

- ¿Cómo transformar una variable real en una no negativa?

$$x \in \mathbf{R} \rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ u, v \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max & 3x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[u, v \geq 0]{x_1 = u - v} \begin{cases} Max & 3u - 3v + x_2 \\ s.a: & u - v + x_2 \leq 5 \\ & u, v, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Conceptos básicos de programación lineal

- ¿Cómo transformar una variable real no positiva en una no negativa?

$$x \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max & 3x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[y \geq 0]{y = -x_1} \begin{cases} Max & -3y + x_2 \\ s.a: & -y + x_2 \leq 5 \\ & y, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

Escribir la forma estándar del siguiente problema lineal:

$$
\begin{array}{ll}
Max & 2x_1 + x_2 \\
s.a: & x_1 + x_2 \geq -5 \\
 & x_1 - x_2 \geq 3 \\
 & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

EJEMPLO:

Escribir la forma estándar del siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \geq -5 \\ & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Paso 1: Conseguir que los **términos independientes** sean ≥ 0

Paso 2: Conseguir que todas las **variables** sean ≥ 0

Paso 3: Conseguir que todas las **restricciones** sean de igualdad

EJEMPLO:

Escribir la forma estándar del siguiente problema lineal:

Paso 1

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \geq -5 \quad \longrightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0 \end{array}$$

EJEMPLO:

Escribir la forma estándar del siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \geq -5 \quad \longrightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max & 2u_1 - 2v_1 + x_2 \\ s.a: & -u_1 + v_1 - x_2 \leq 5 \\ & u_1 - v_1 - x_2 \geq 3 \\ & u_1, v_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Paso 2

EJEMPLO:

Escribir la forma estándar del siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \geq -5 \\ & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq 5$$

$$\begin{array}{ll} Max & 2u_1 - 2v_1 + x_2 \\ s.a: & -u_1 + v_1 - x_2 + h_1 \quad\quad = 5 \\ & u_1 - v_1 - x_2 \quad\quad - e_2 = 3 \\ & u_1, v_1, x_2, h_1, e_2 \geq 0. \end{array}$$

Paso 3

Conceptos básicos de programación lineal

Al conjunto de todas las posibles alternativas que satisfacen las restricciones del problema se le denomina **conjunto factible**, y a sus elementos **soluciones factibles**. Además, a aquellas alternativas de entre las factibles que son las mejores para el objetivo que se persigue se les denomina **soluciones óptimas**. En un problema lineal el conjunto factible es un **poliedro convexo**.

El número de alternativas a evaluar para buscar una solución óptima puede ser muy grande (infinitas alternativas). Sin embargo, la estructura lineal de los problemas conduce al siguiente resultado:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL (TFPL)
Dado un problema lineal se satisface lo siguiente:

1) Si el conjunto factible es no vacío entonces este tiene al menos un vértice.

2) Si el problema tiene solución óptima (finita) entonces al menos un vértice es solución óptima del problema.

El TFPL implica que **la búsqueda de la solución óptima se reduce a buscar en un número finito de puntos que son los vértices de un poliedro**.

Si el conjunto factible es vacío, es decir, no existen alternativas que satisfacen todas las restricciones del problema lineal, entonces se dice que el problema es **infactible**.

El conjunto de soluciones óptimas puede ser un **único punto**, diciéndose entonces que el problema tiene **solución única**.

El conjunto de soluciones óptimas puede contener **infinitas soluciones** (cuya estructura geométrica también es un poliedro).

El problema lineal puede no tener solución finita, es decir, existe una dirección en el conjunto factible a lo largo de la cual se puede mejorar indefinidamente el valor de la función objetivo, en ese caso decimos que tiene **solución no acotada**.

EJERCICIO:

Un productor que tiene una disponibilidad semanal de 180, 150 y 160 horas de tres recursos diferentes que usa para producir 2 productos, A y B, cuyas necesidades y beneficios por kg vienen dados por la siguiente tabla:

Producto	**A**	**B**
R1 (h/kg)	4	3
R2 (h/kg)	2	3
R3 (h/kg)	4	2
Beneficio (€/kg)	9	12

¿Cuál es la producción que le proporcionaría el máximo beneficio?

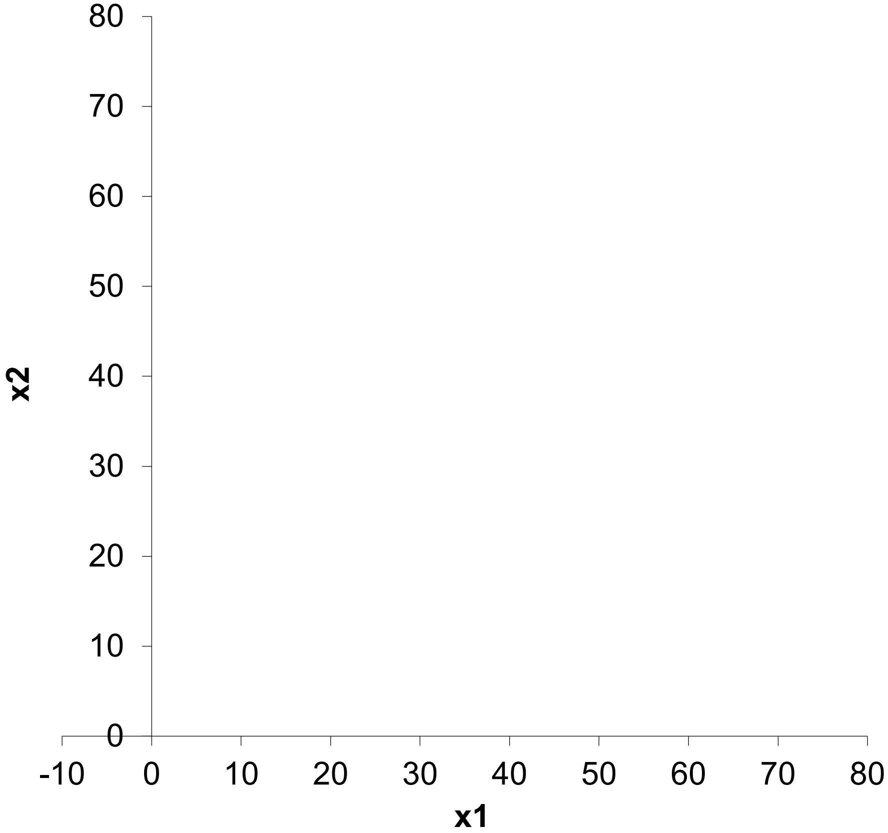
EJERCICIO:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

1. Representar gráficamente el problema y comprobar que el **único** punto óptimo es el vértice (punto extremo) del conjunto factible (15,40).
2. Supongamos que el beneficio unitario del producto A pasa a ser 8 €/kg. Resolver de nuevo el problema y comprobar que existen **infinitos** óptimos comprendidos en el segmento cuyos extremos son (0,50) y (15,40).
3. En el problema del apartado 1, cambiar el signo de las inecuaciones de ≤ a ≥ y comprobar que el problema es **no acotado**.
4. Añadir al problema del apartado 1 la restricción $x_1 \geq 45$ y comprobar que el problema es **infactible**.

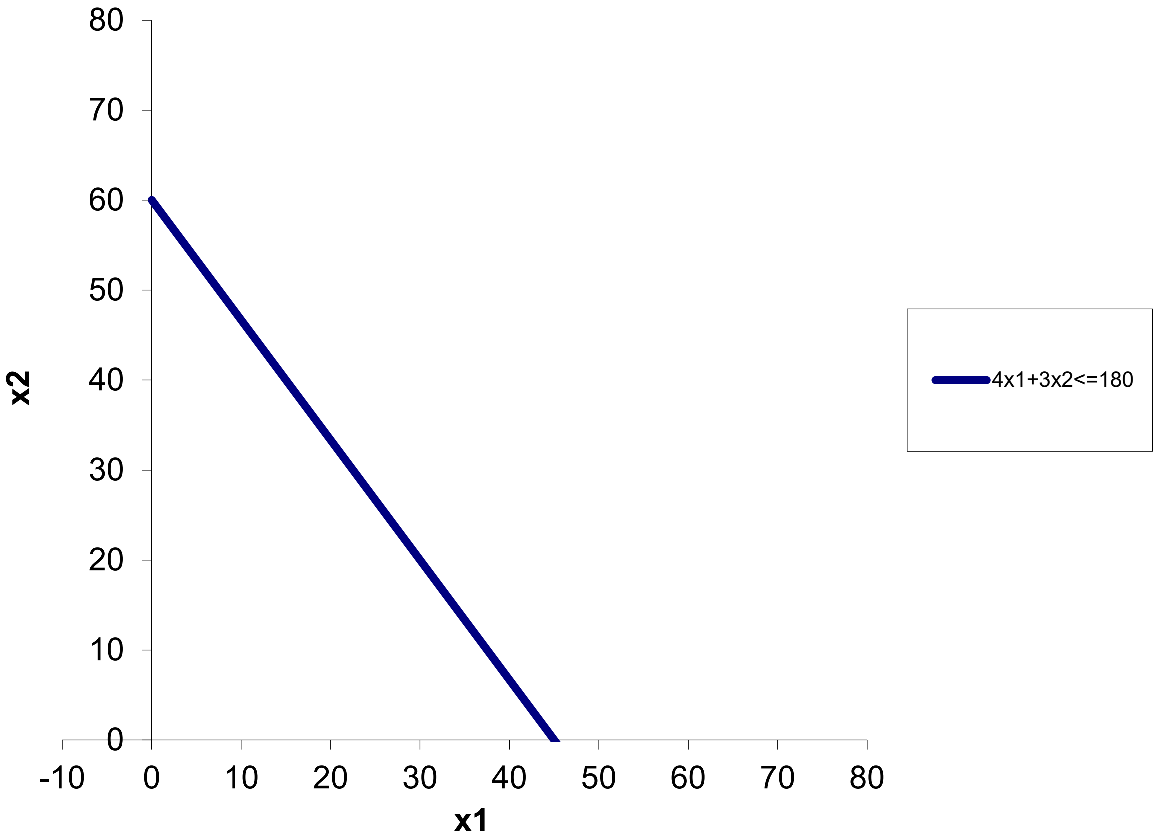
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$



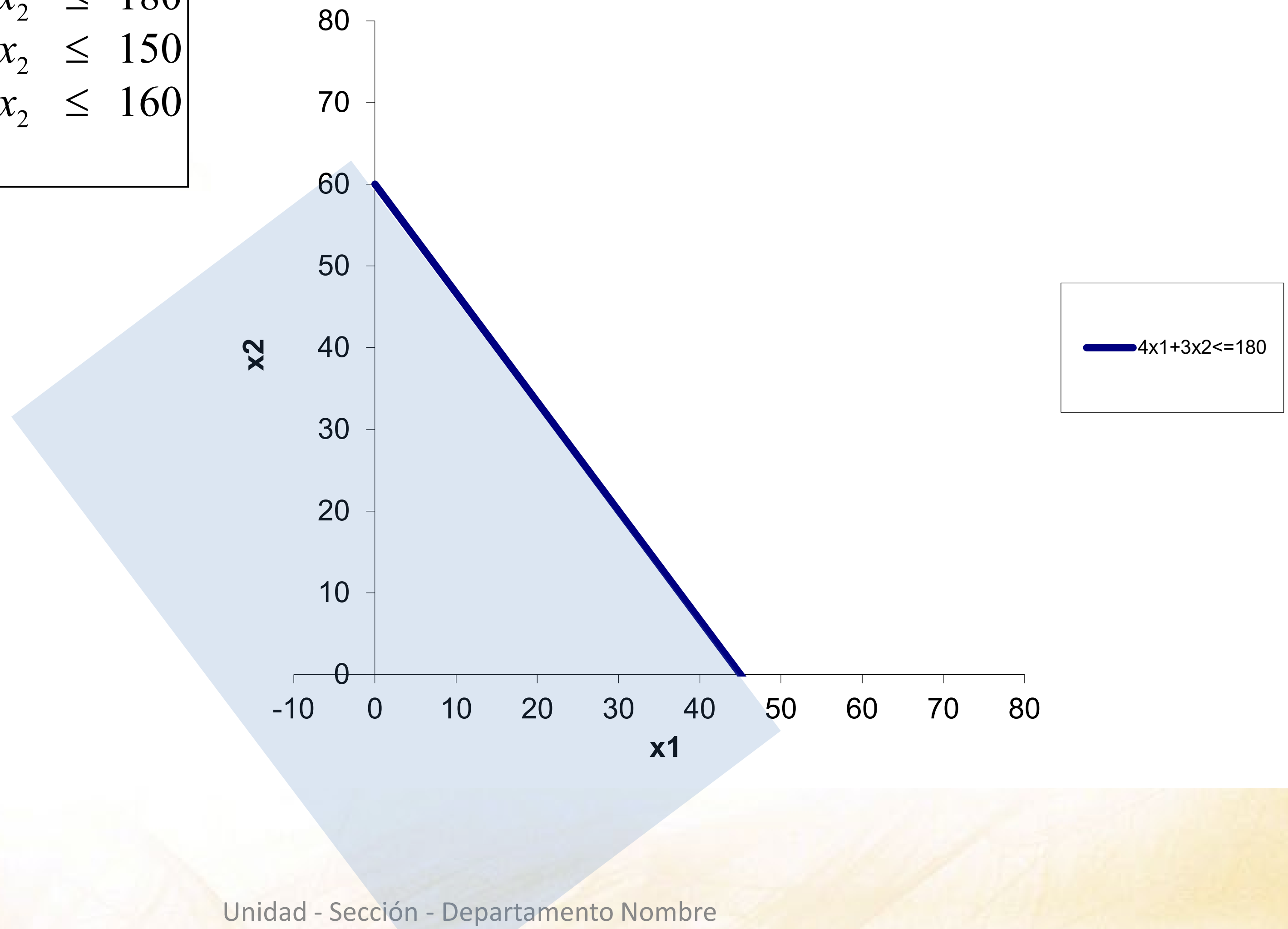
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$



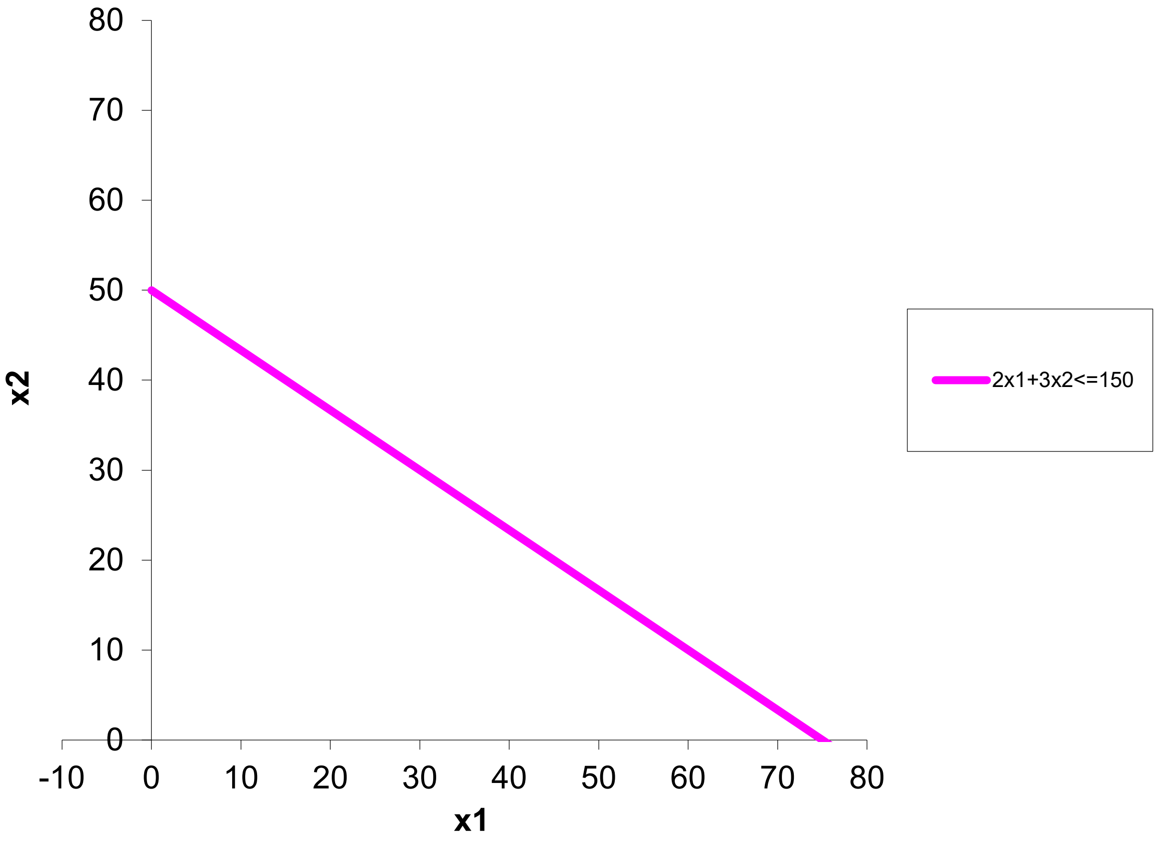
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$



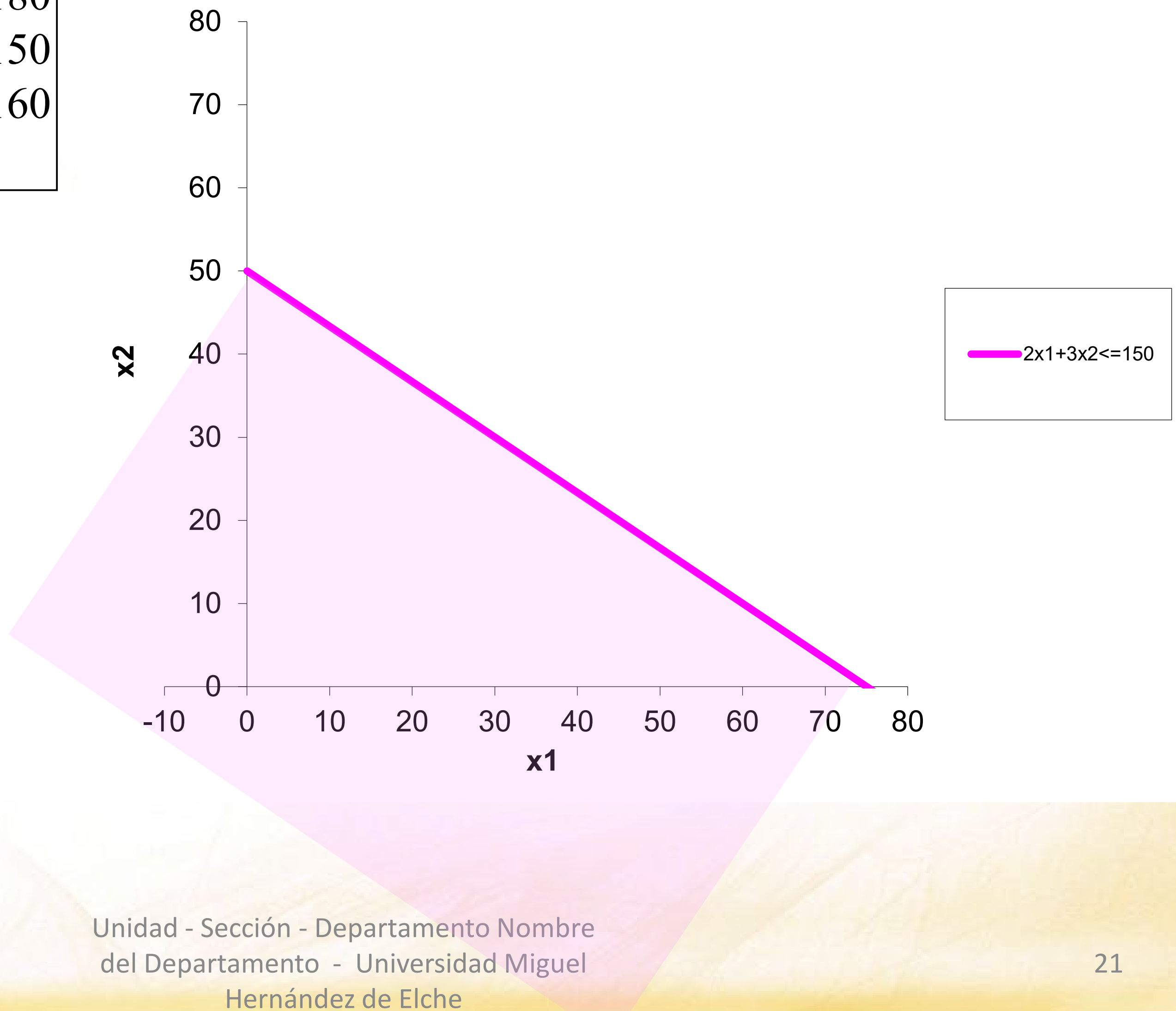
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



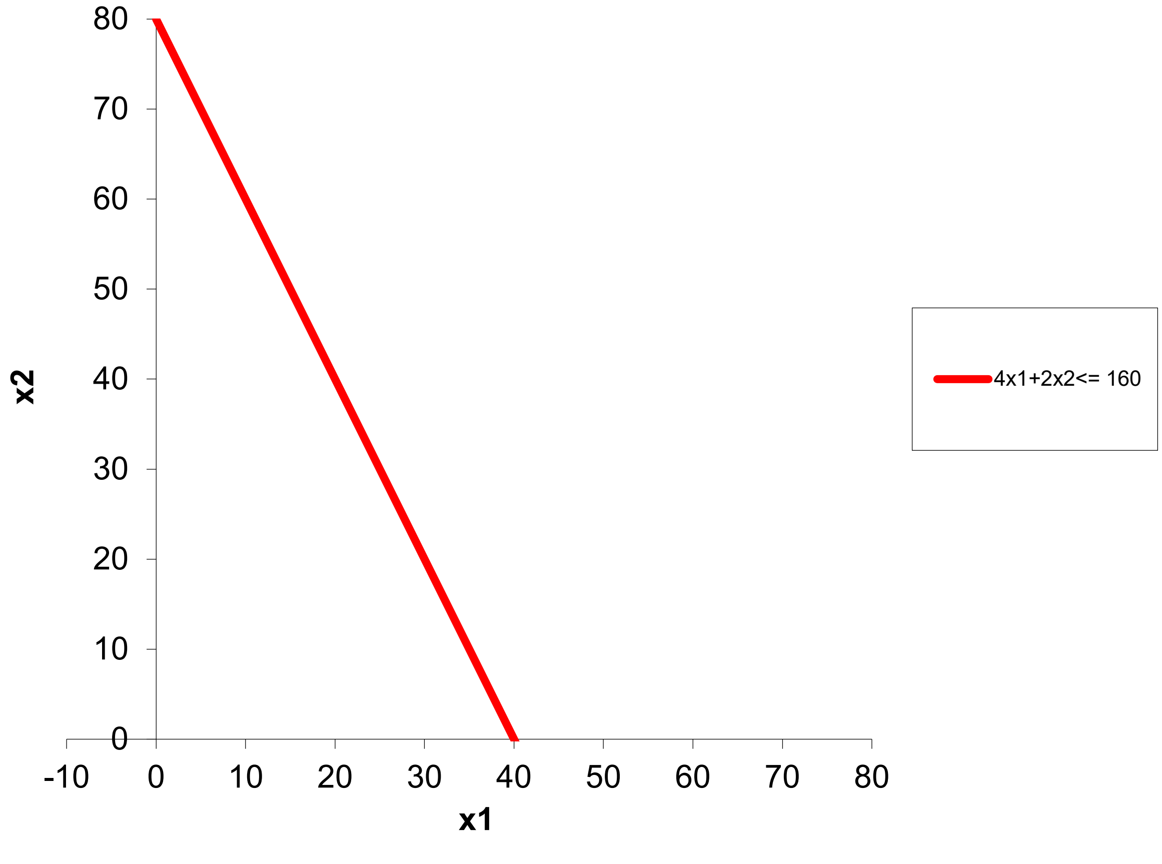
Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{llcll} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq 160 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$



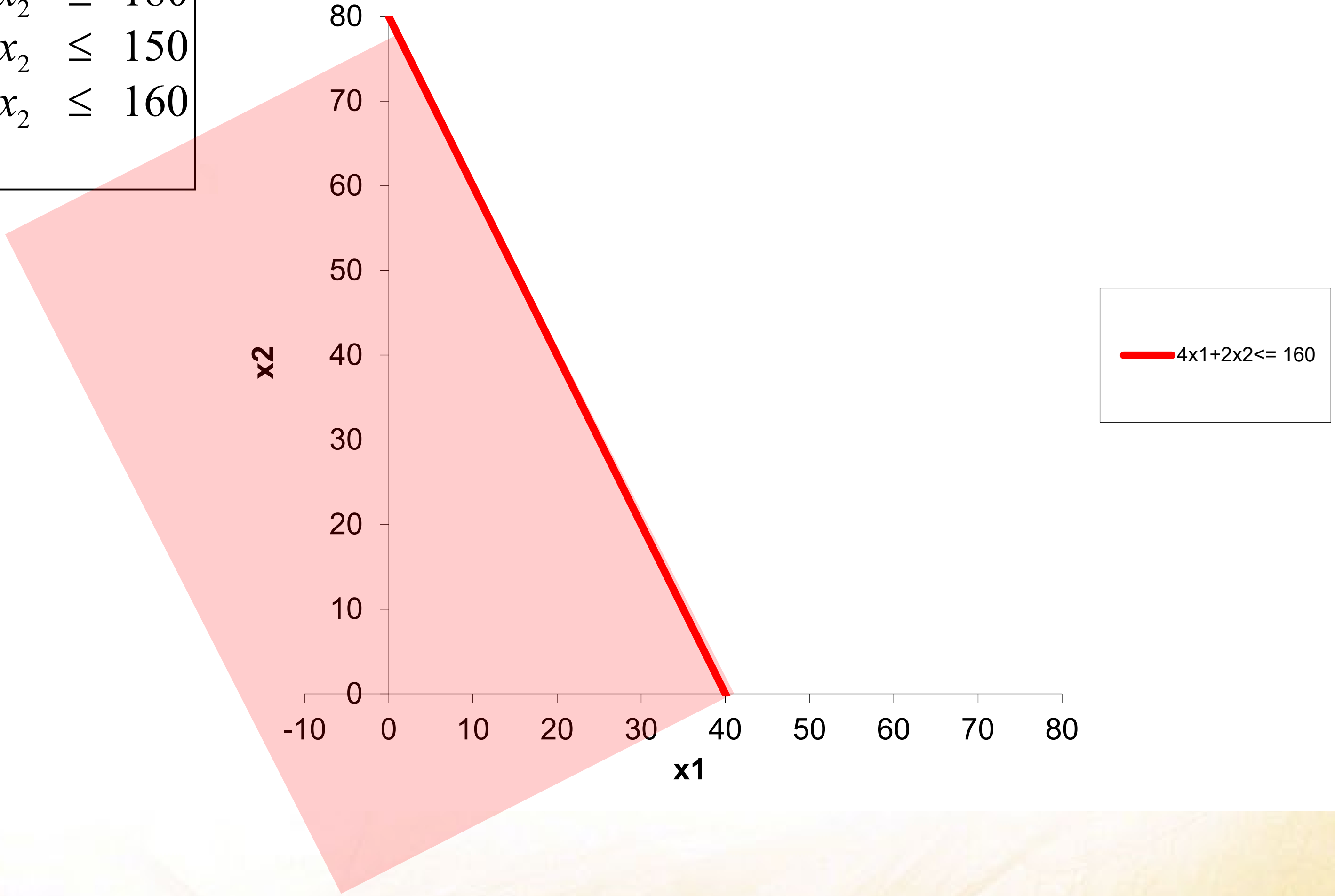
Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{llllll} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$



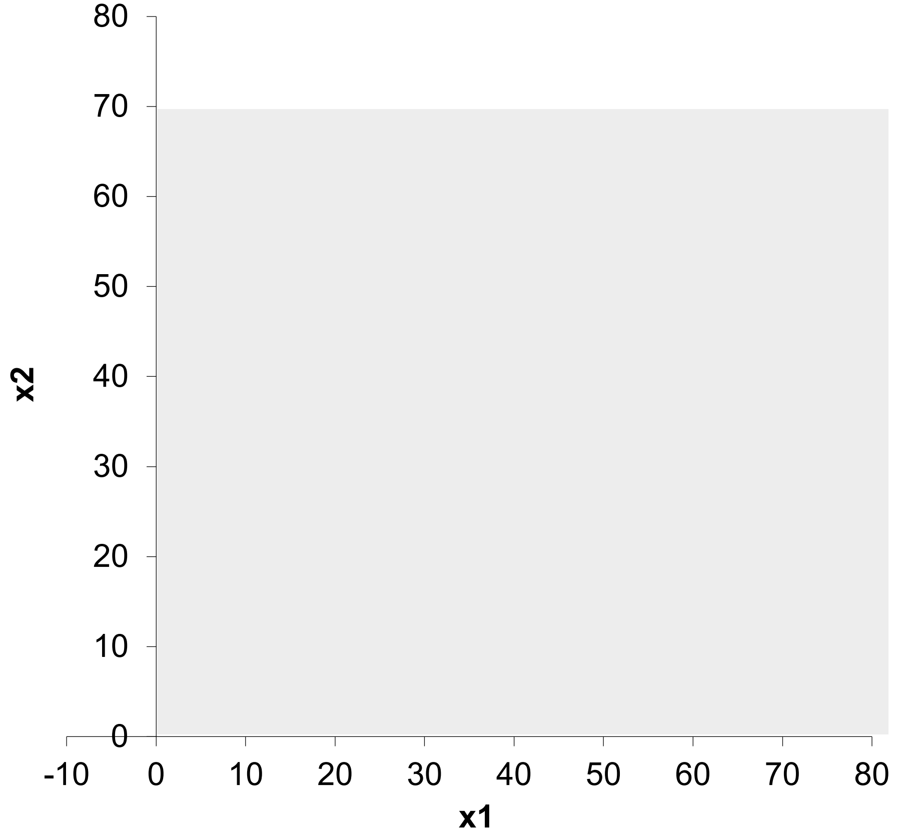
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$



Conceptos básicos de programación lineal

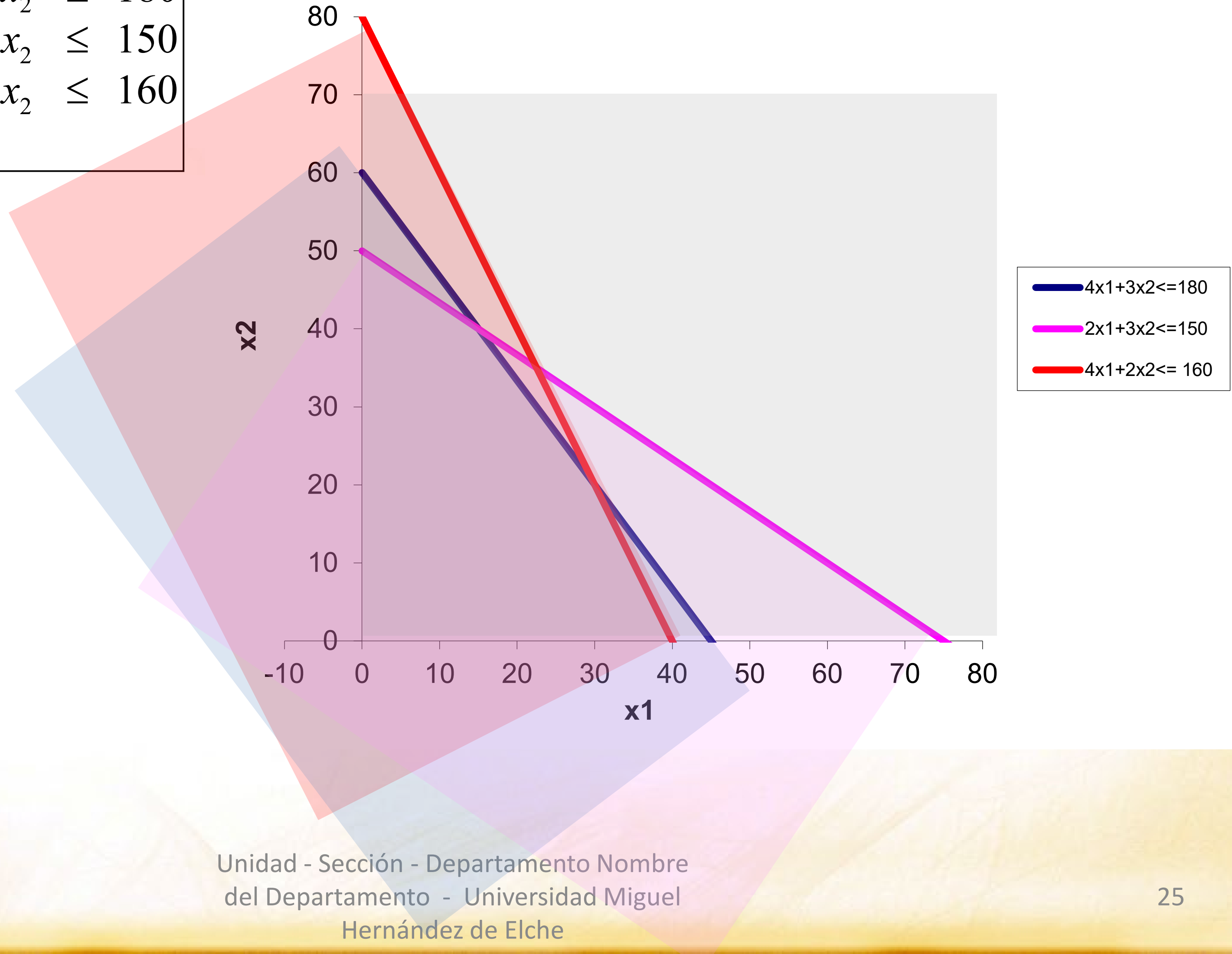
$$
\begin{array}{llcccc}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



$x_1, x_2 \geq 0$

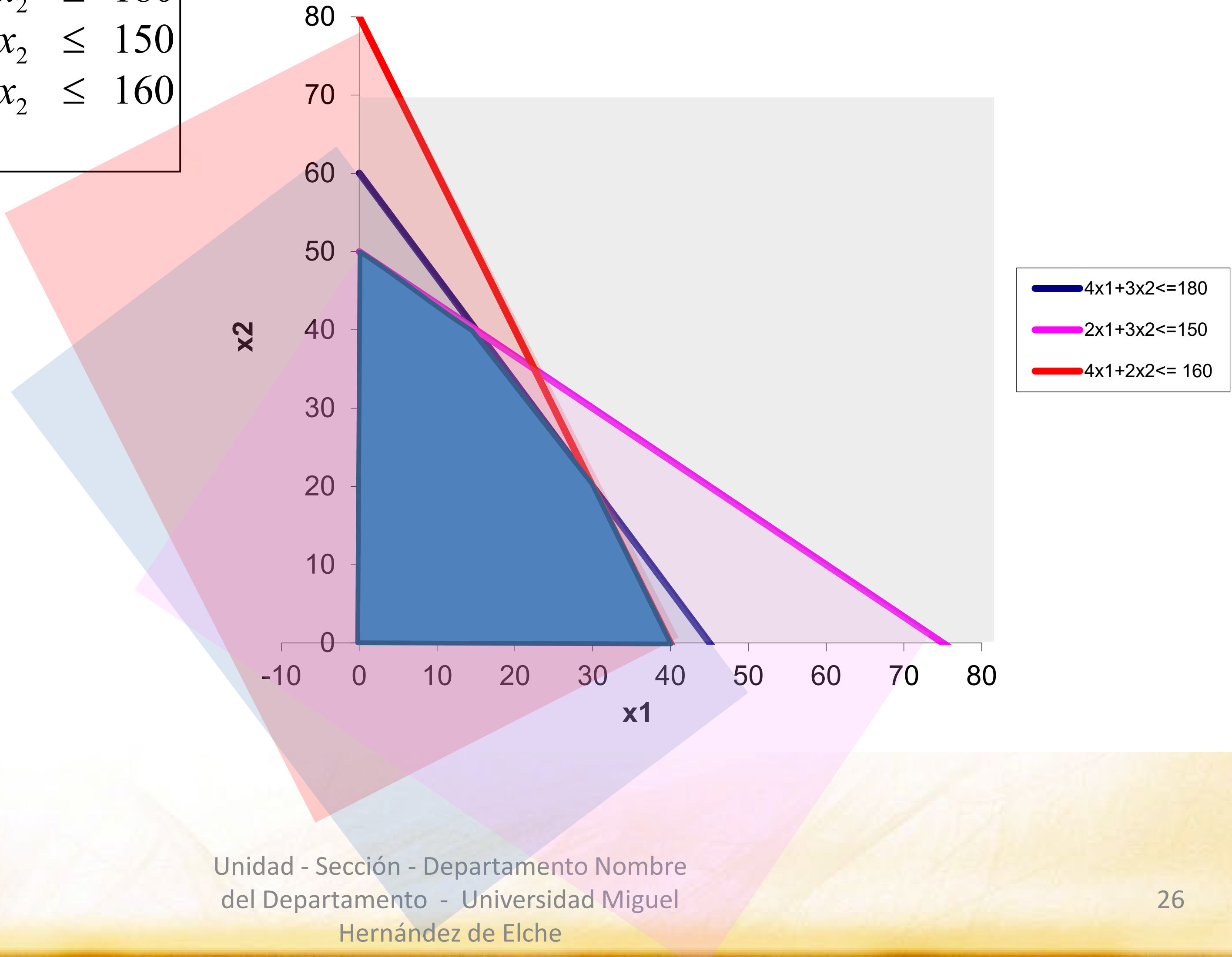
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$



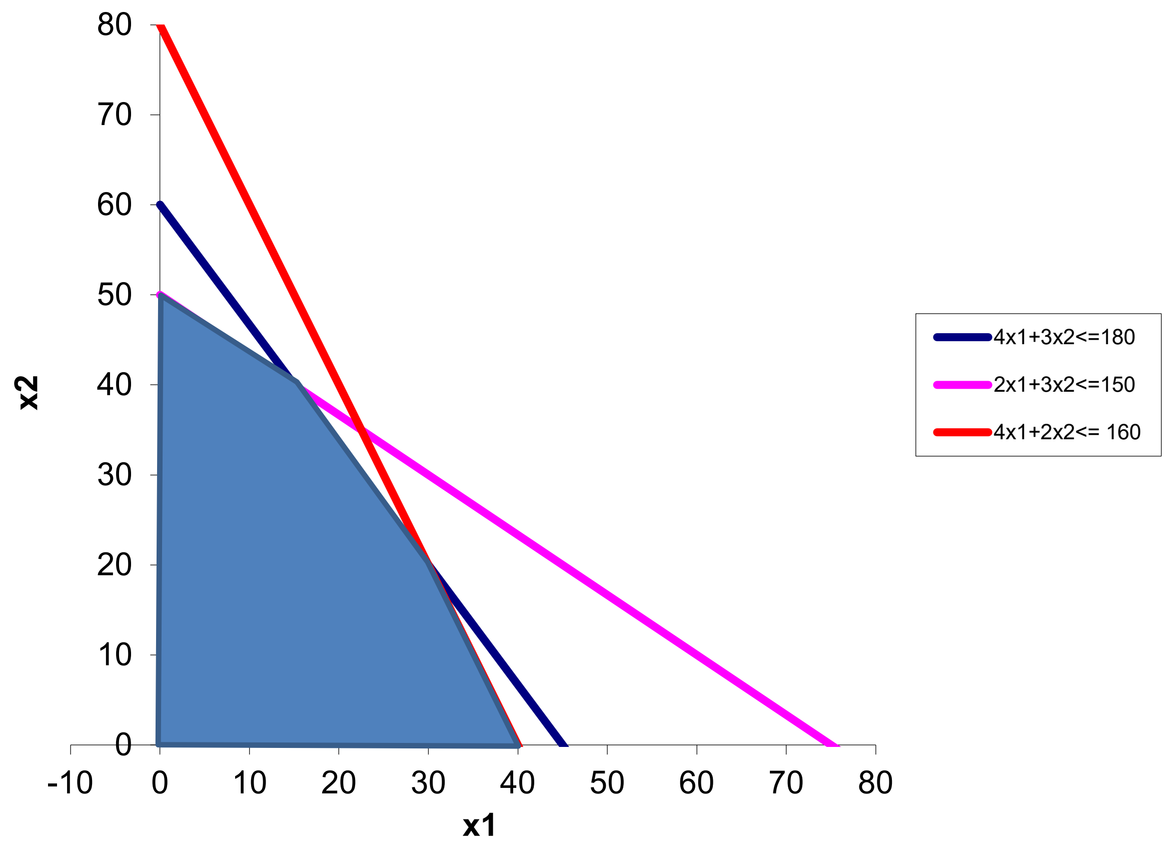
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

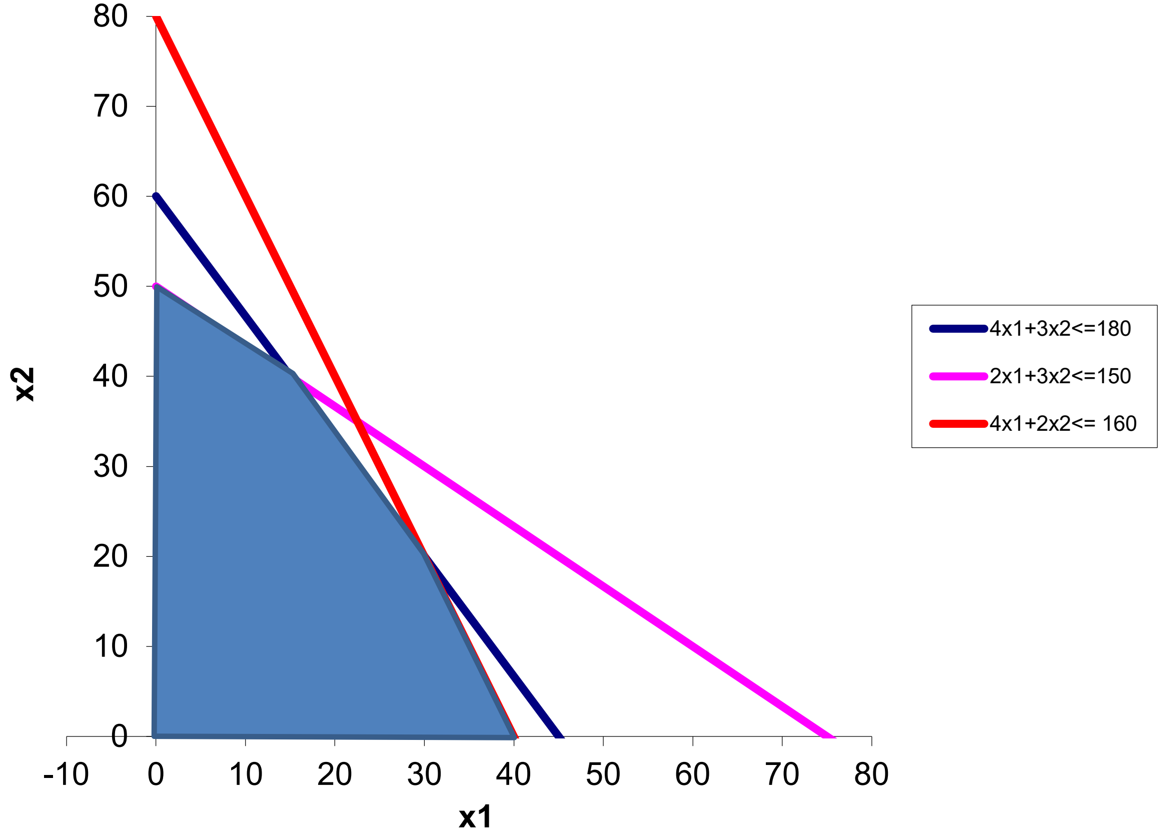


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

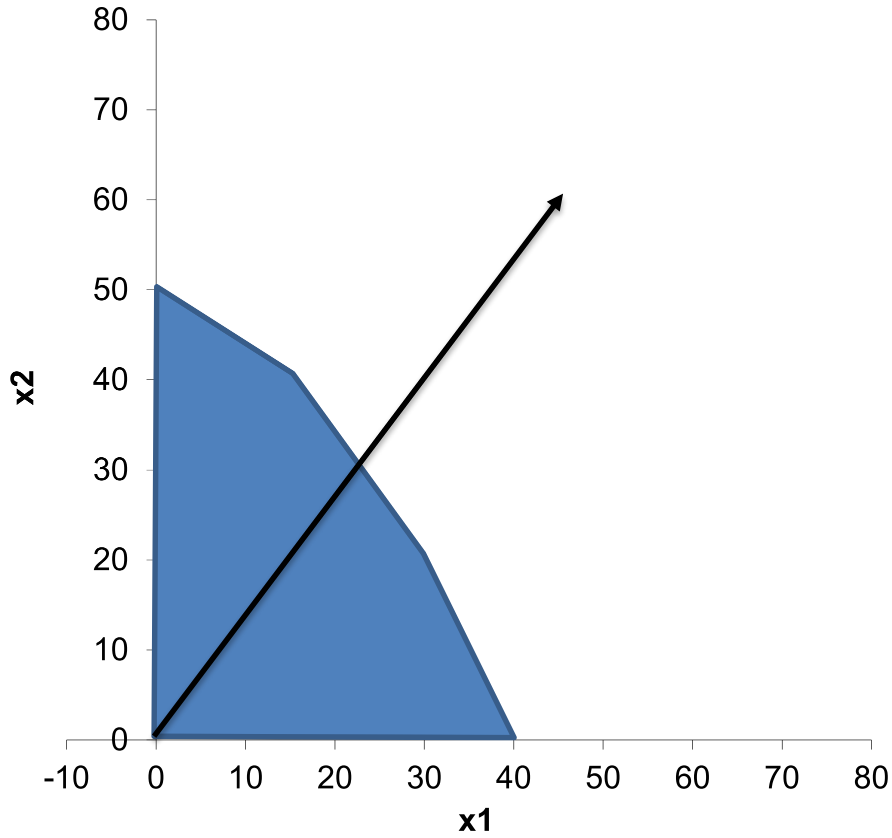


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

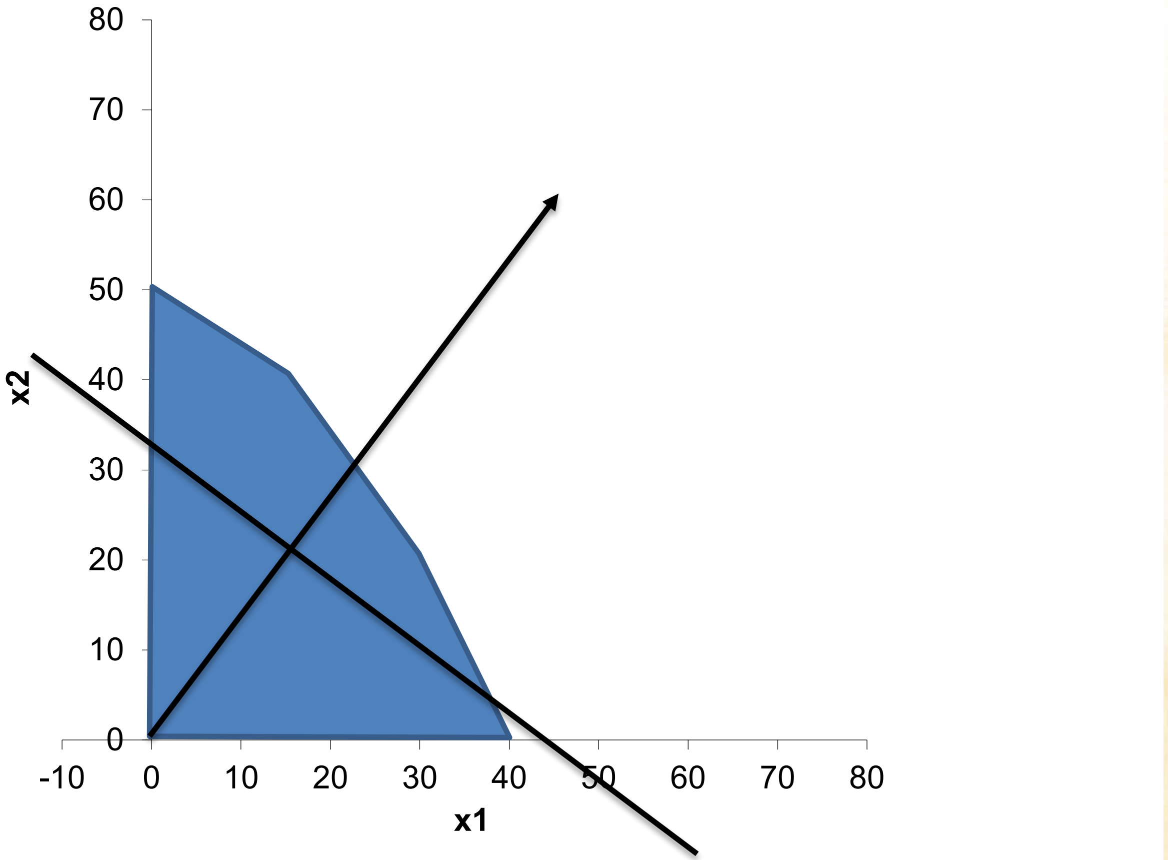


Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{lllll} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq 160 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

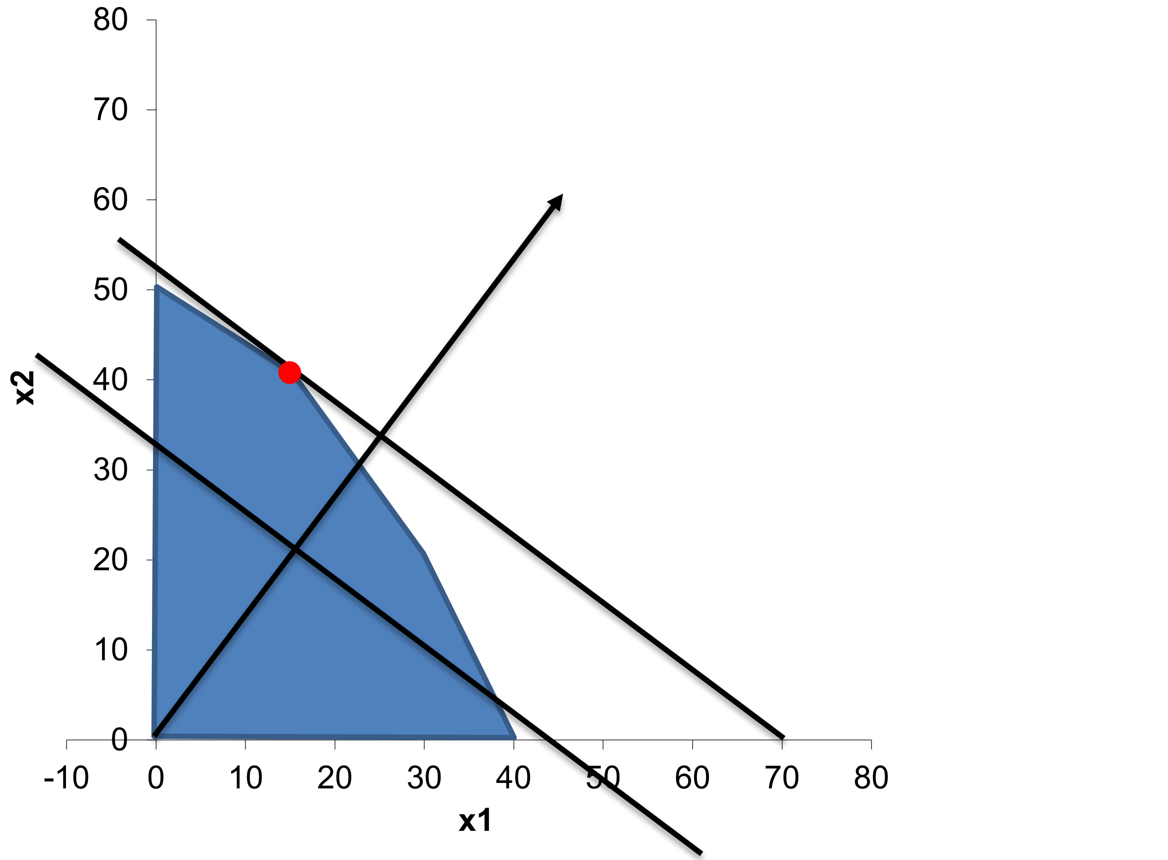


Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{llllll} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$



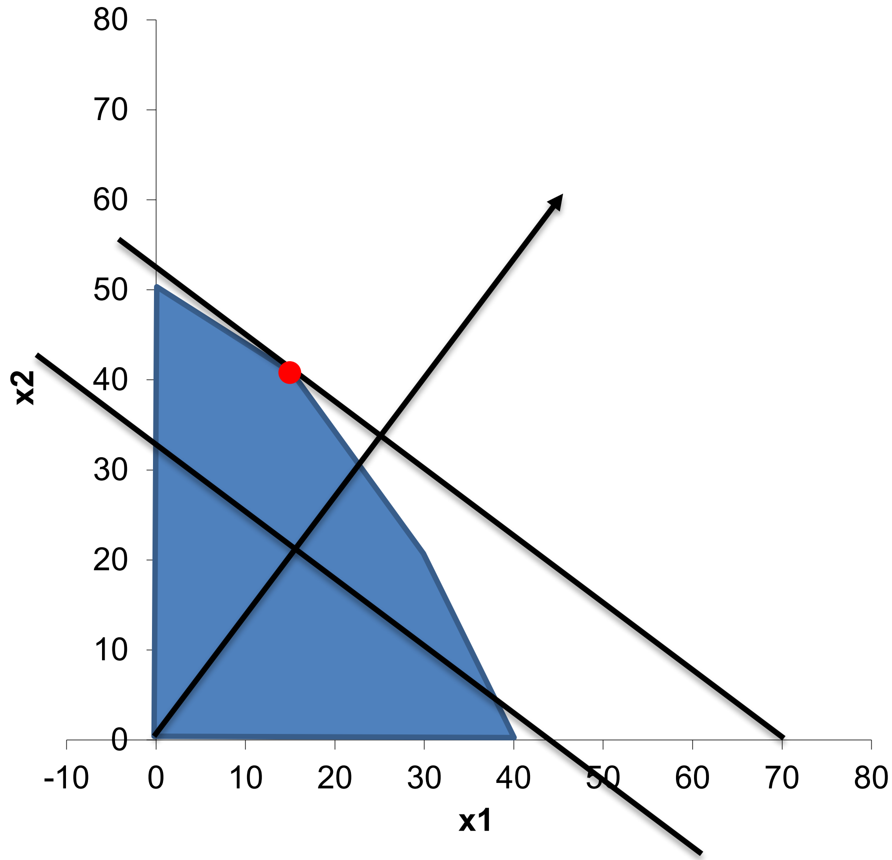
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

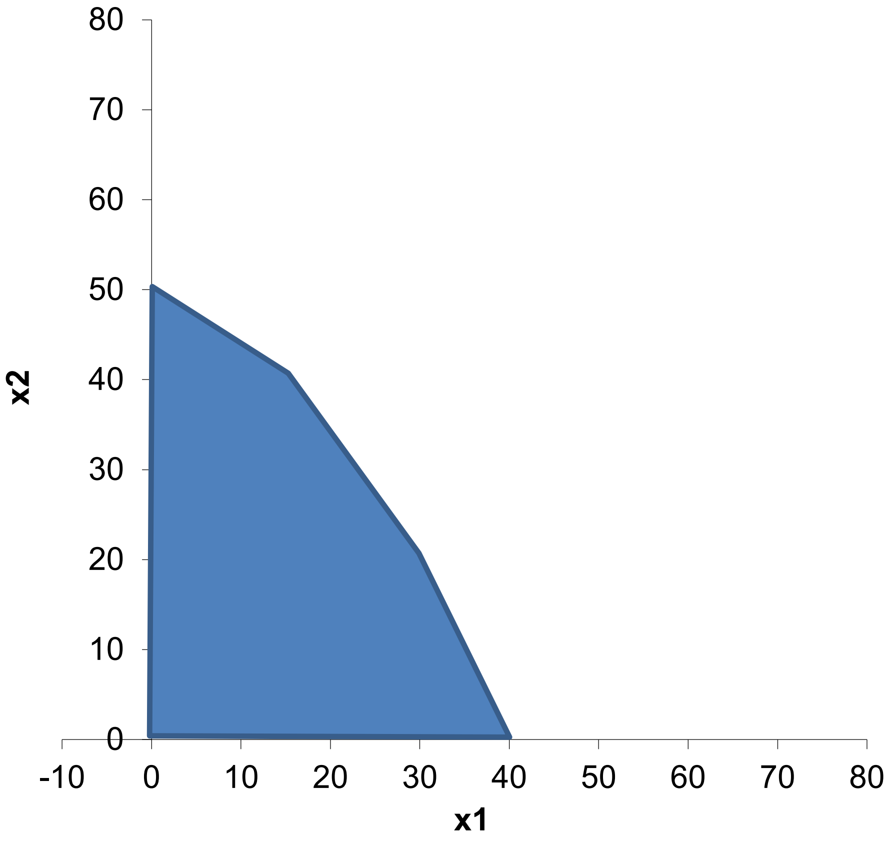
$$x^* = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \end{pmatrix}$$



Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

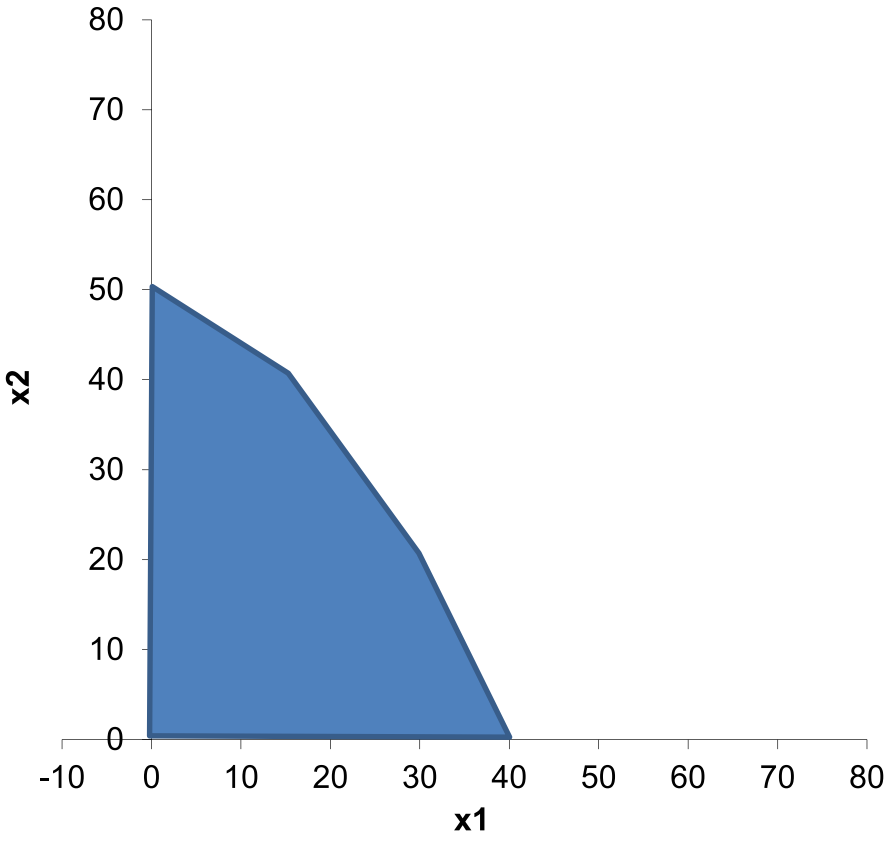


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\, 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

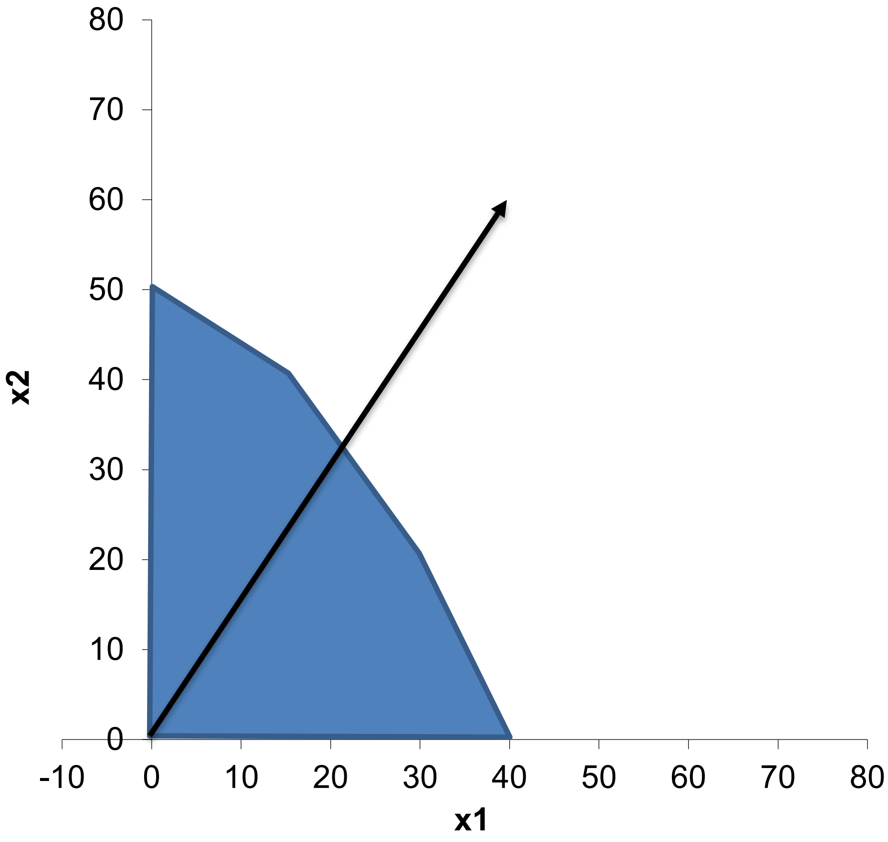


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llcll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

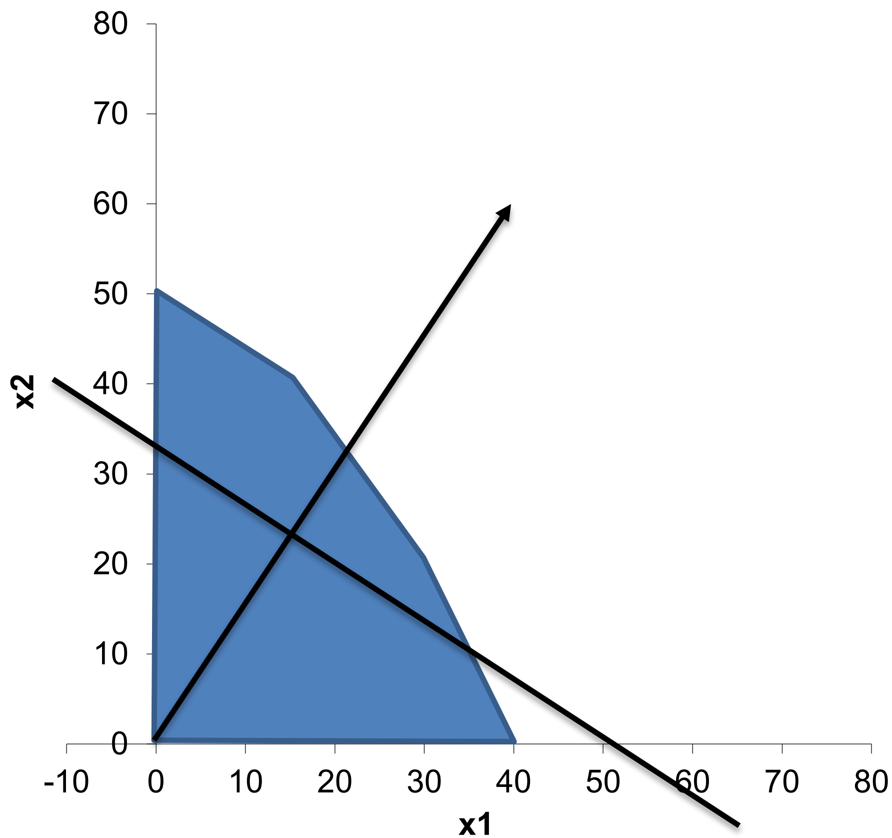


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llclcl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

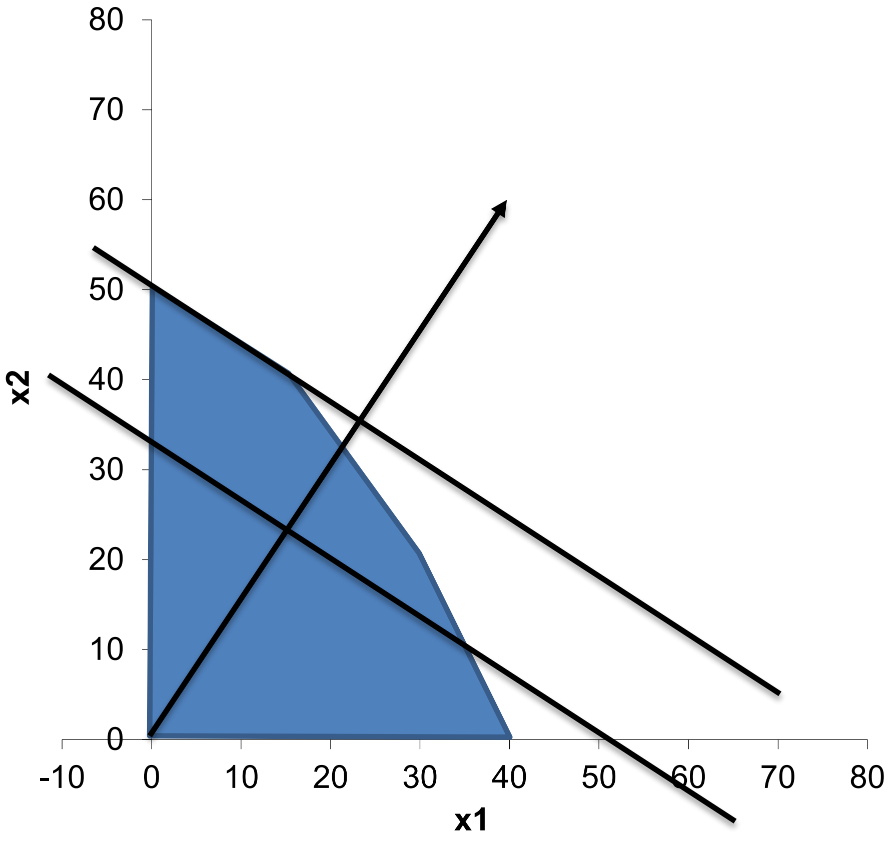


Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

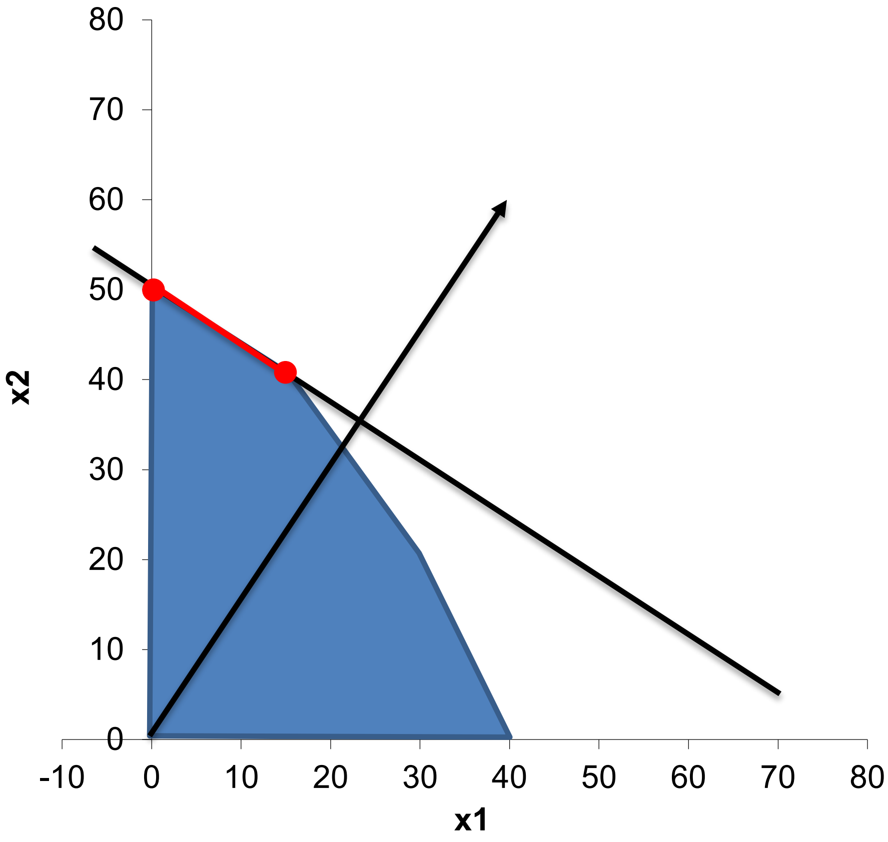


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

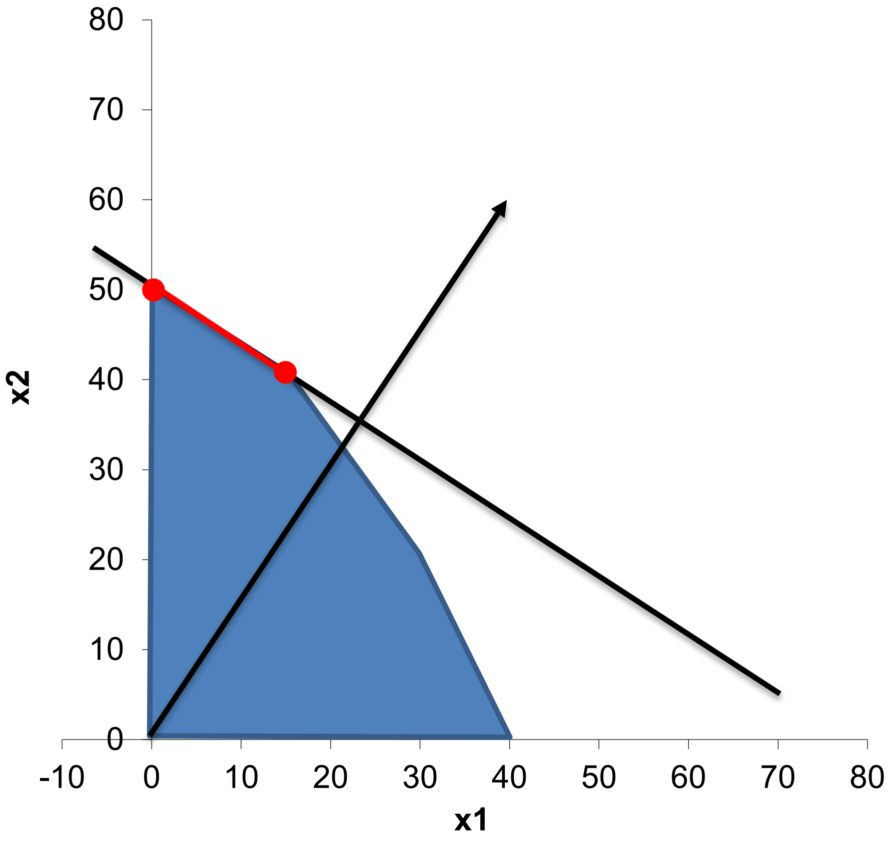


Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lccccl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



$$x^* = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \end{pmatrix} \quad y \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

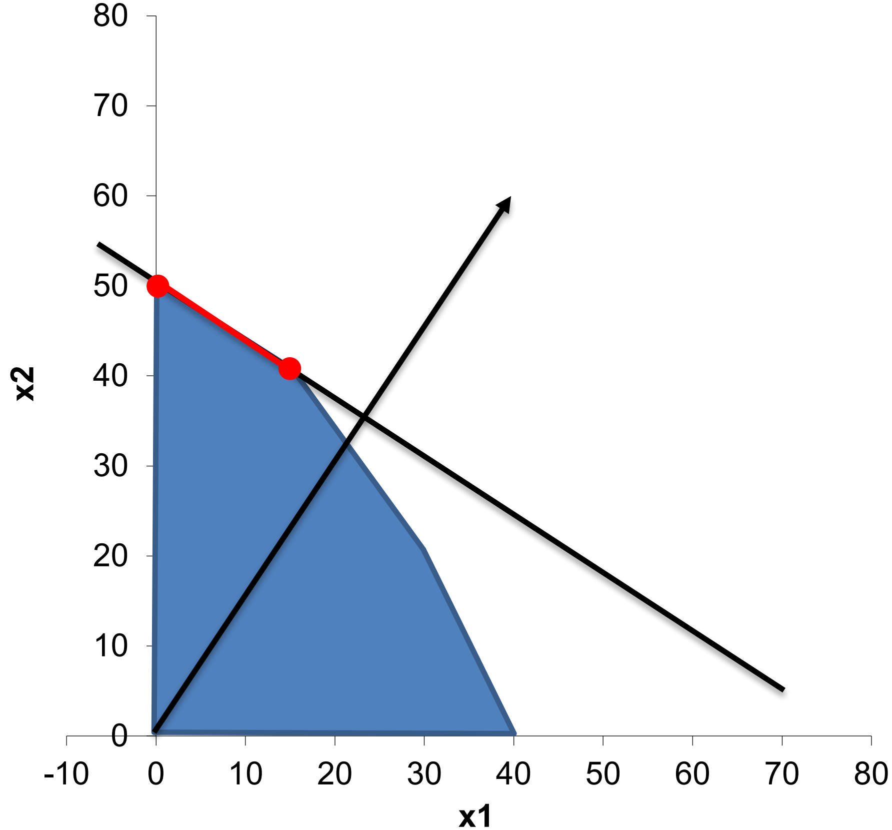
y todos los puntos del segmento entre ambas soluciones

Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llcllcl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$max\ 8x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$



$$x^* = \begin{pmatrix} 15 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

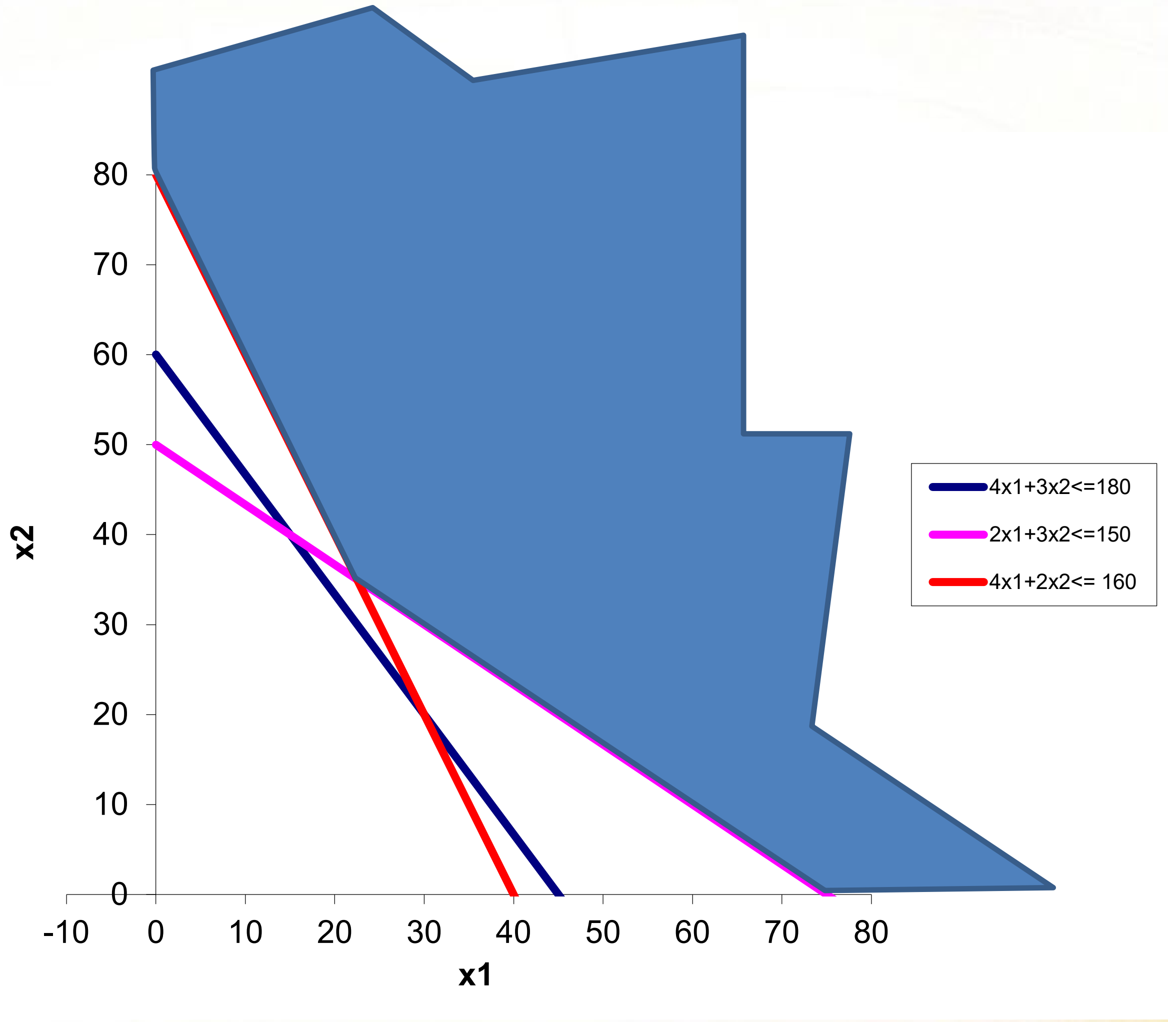
y todos los puntos del segmento entre ambas soluciones

$$z^* = 8 \times 15 + 12 \times 40 = 600$$

$$z^* = 8 \times 0 + 12 \times 50 = 600$$

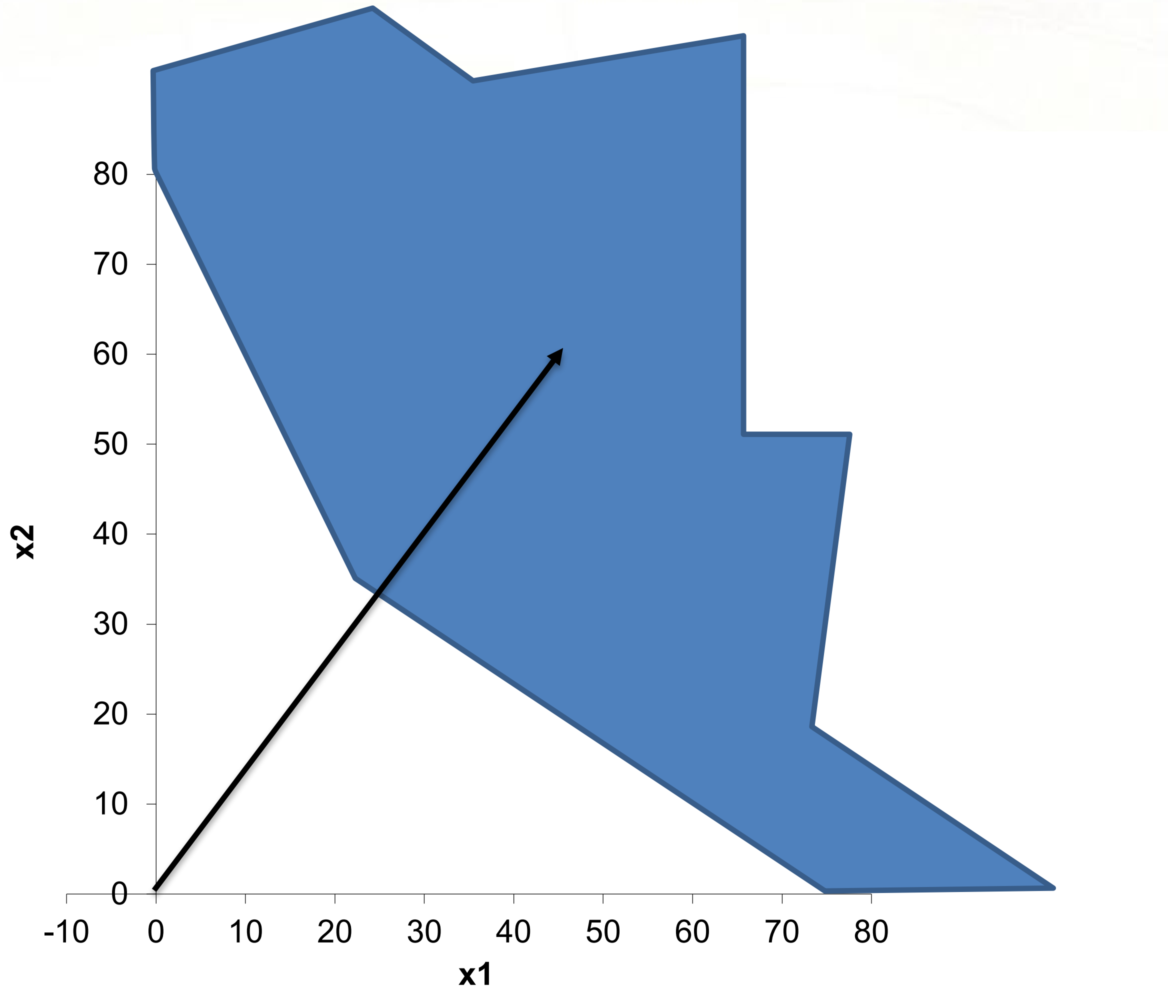
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llclcl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

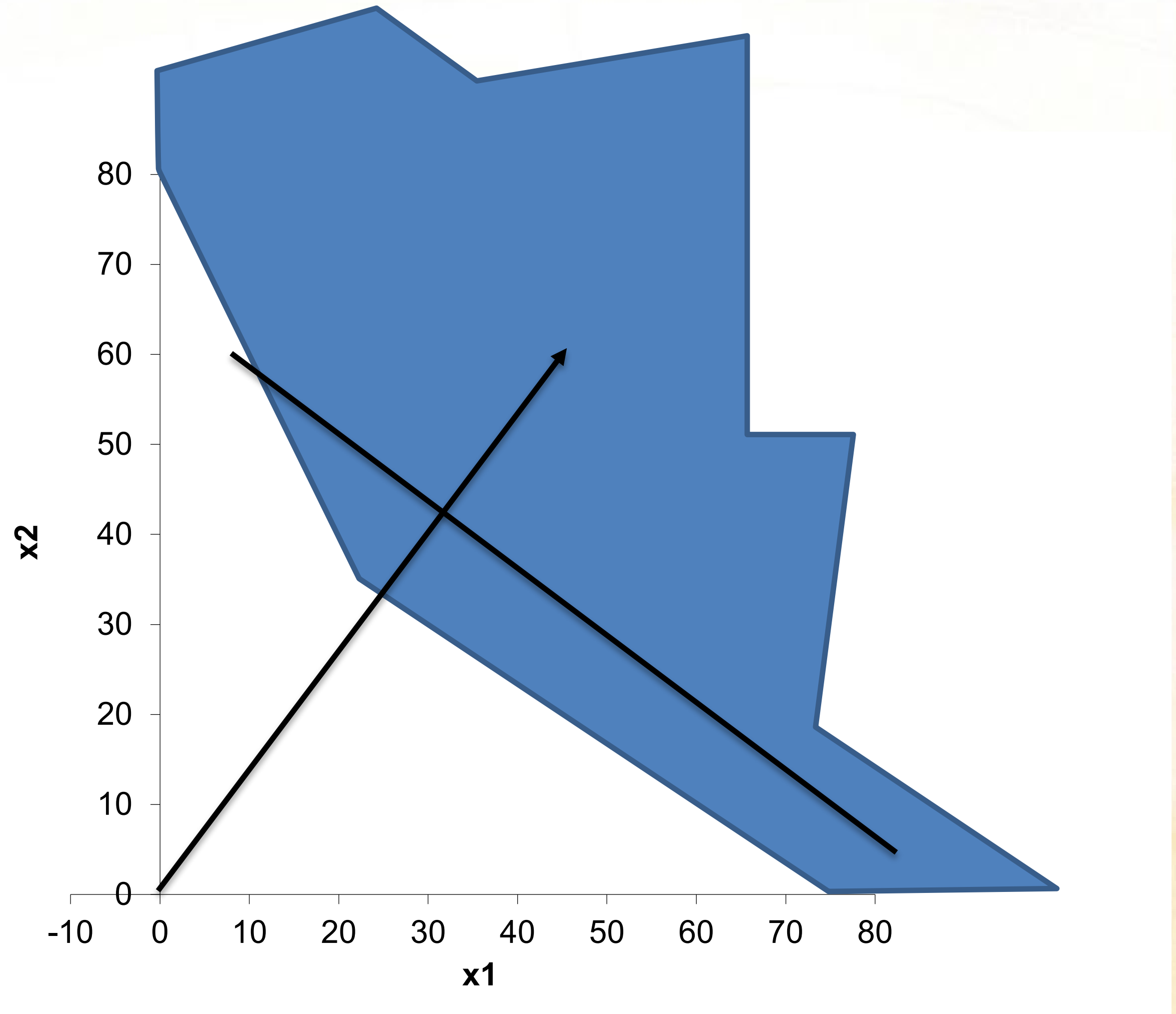
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{llllll} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

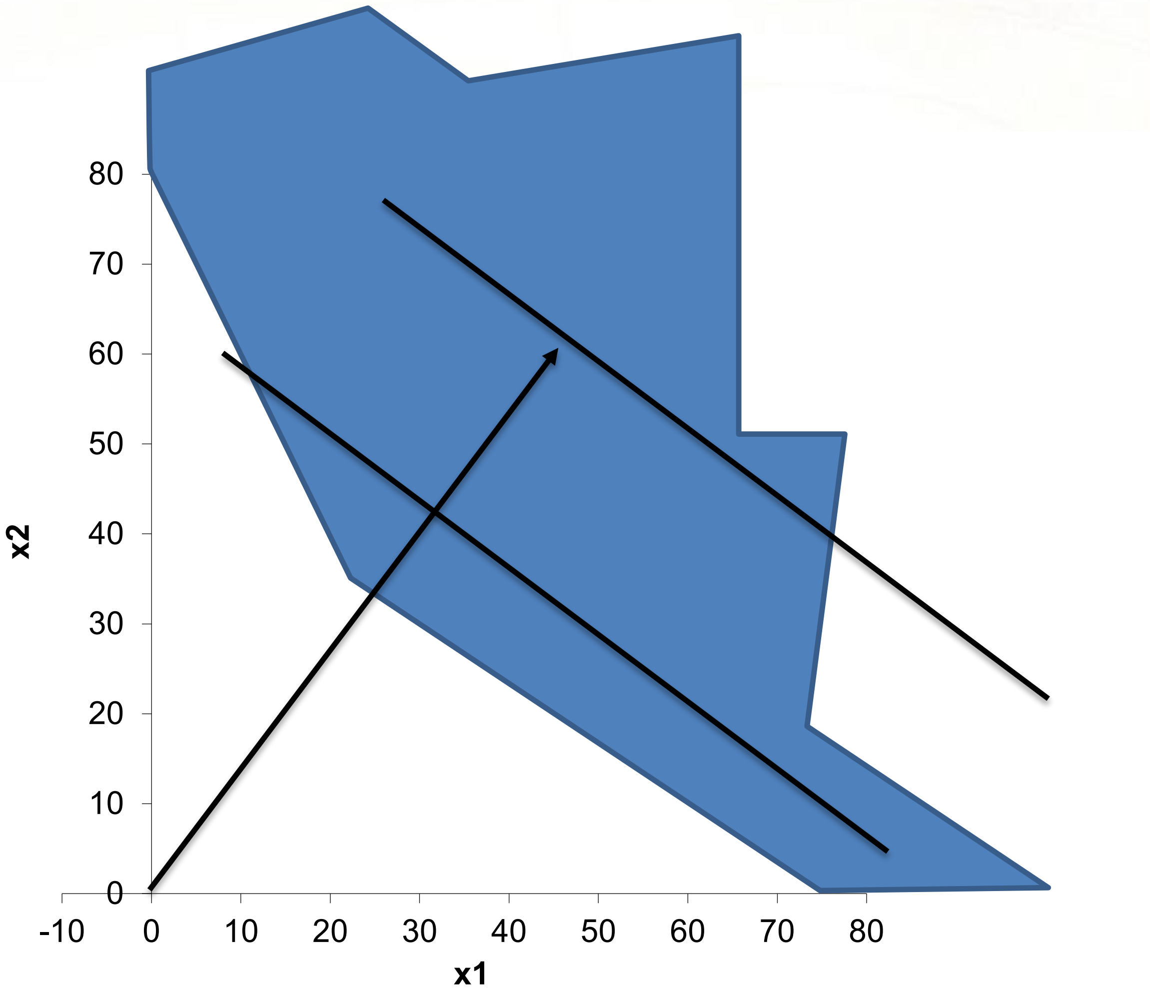


Conceptos básicos de programación lineal

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\ s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 180 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 150 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 160 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$



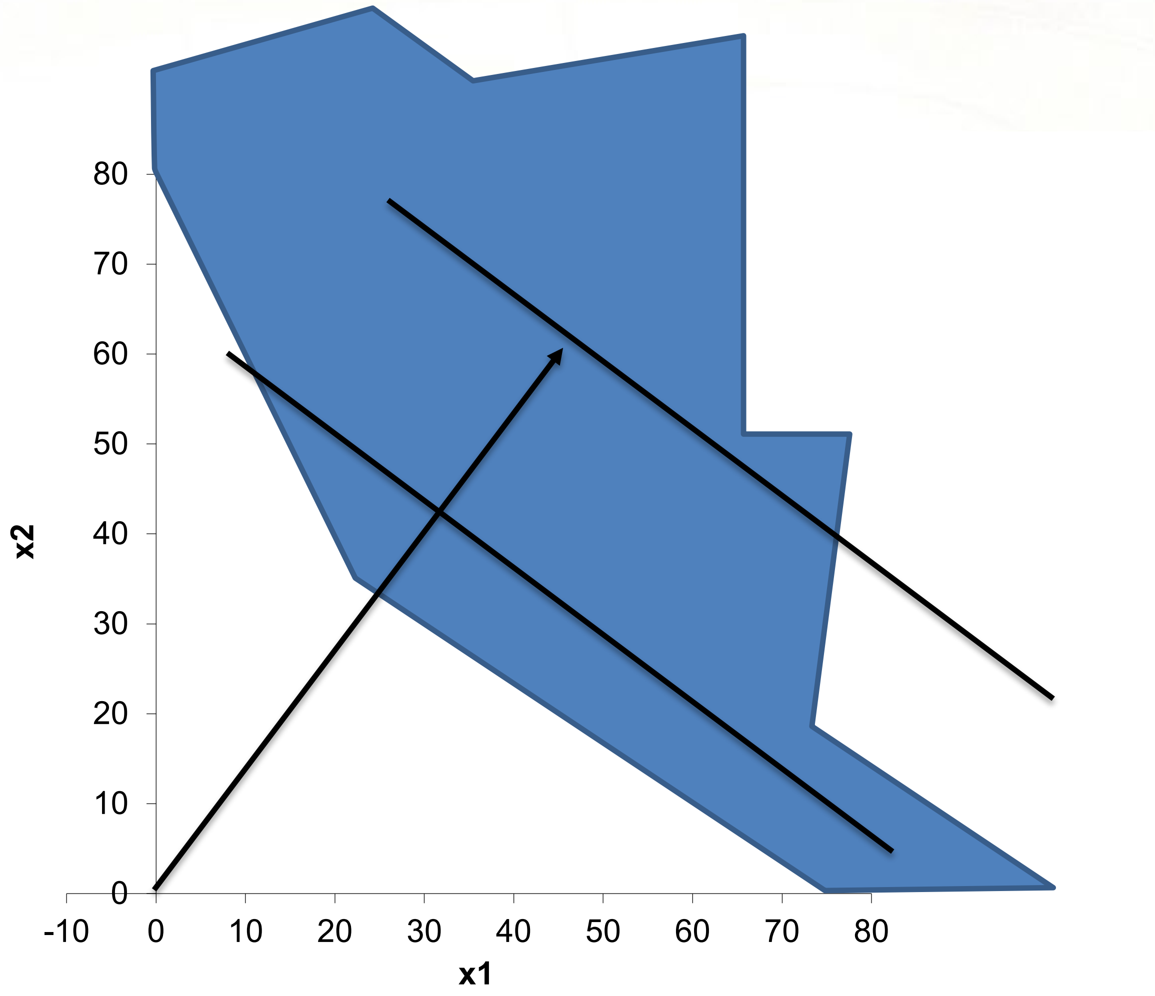
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$max\ 9x_1 + 12x_2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$$

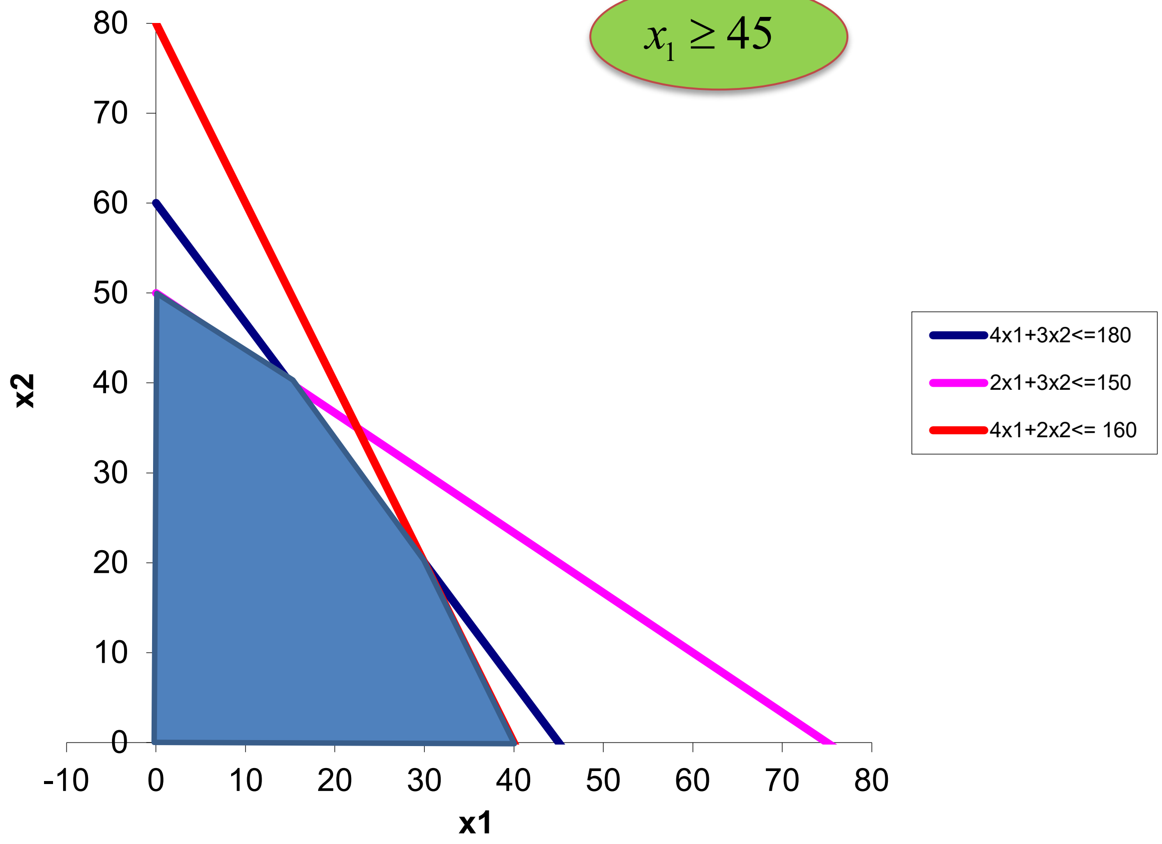
No acotado!!!



Conceptos básicos de programación lineal

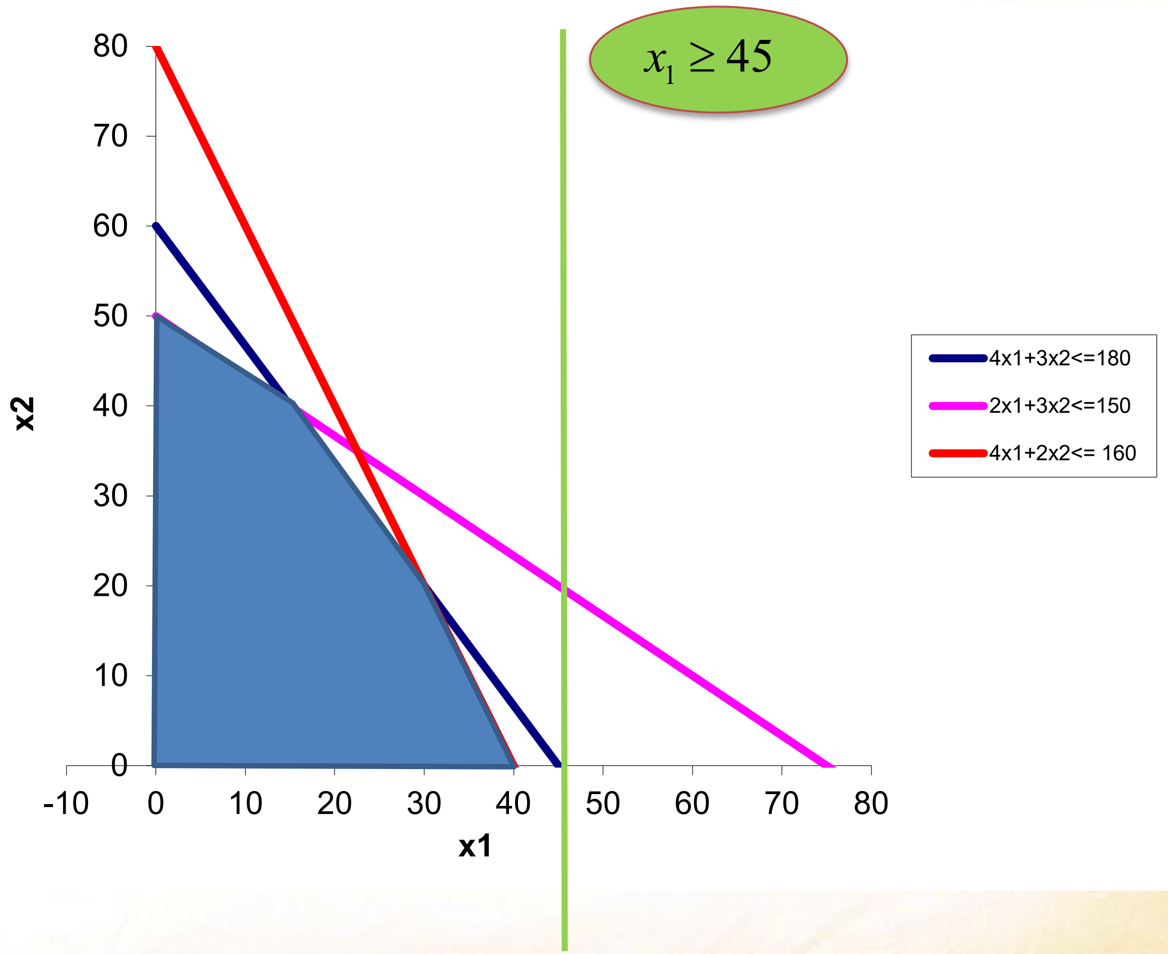
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$x_1 \geq 45$



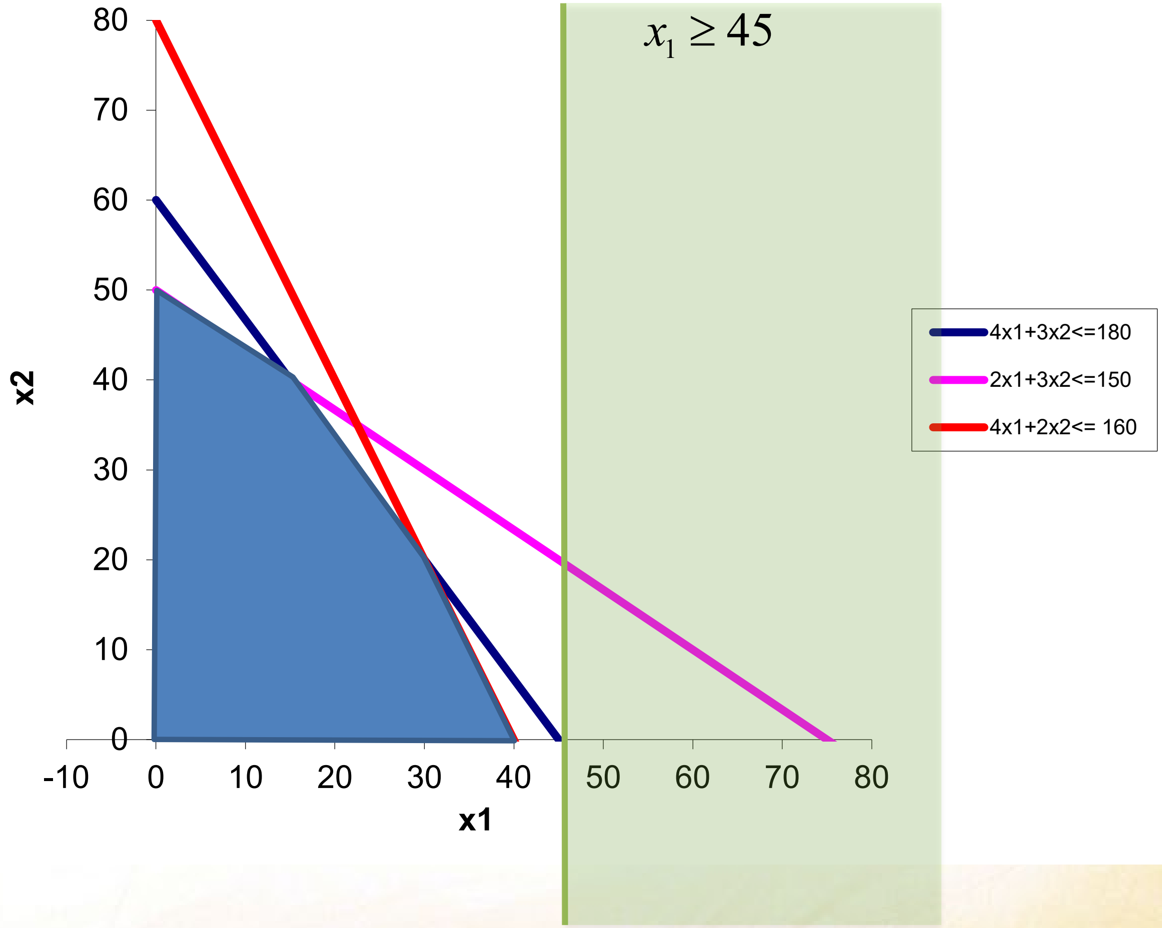
Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



Conceptos básicos de programación lineal

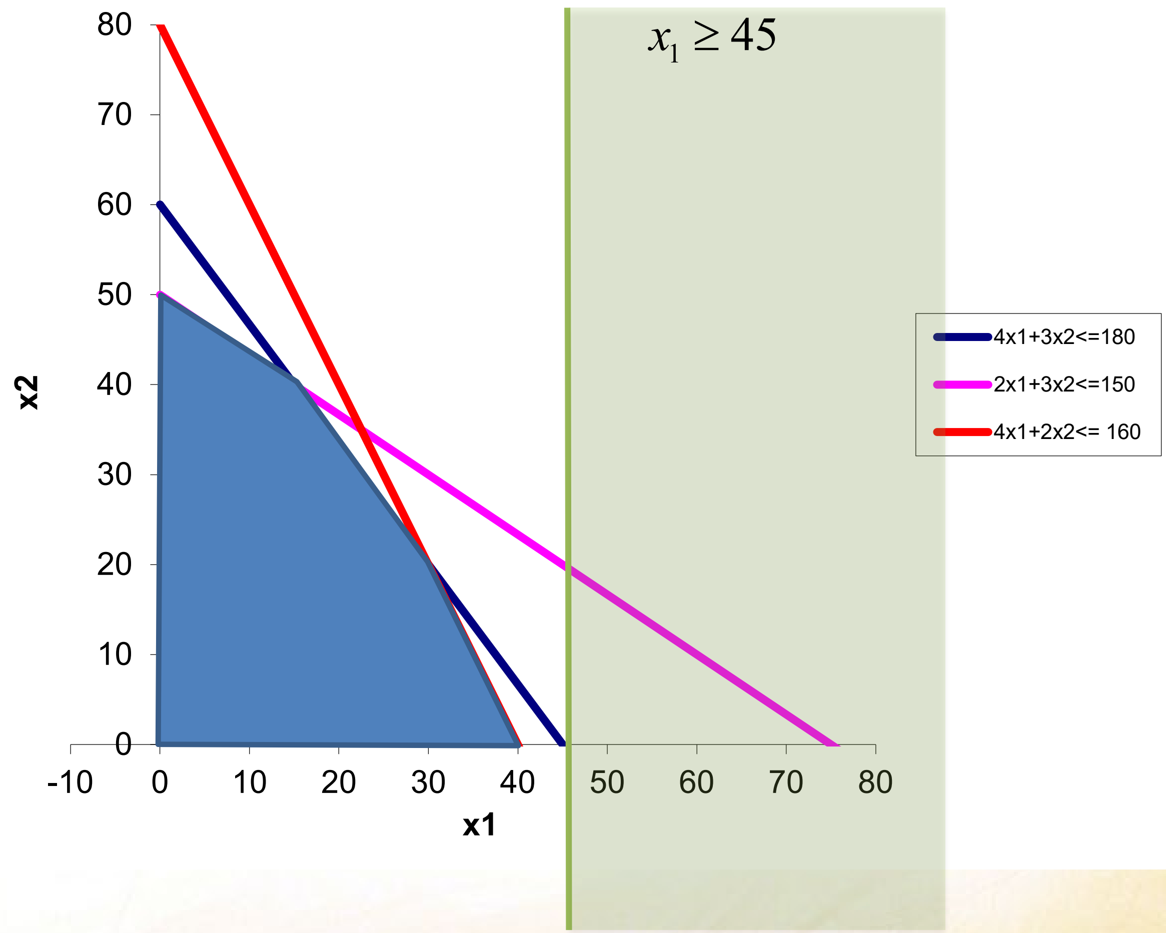
$$
\begin{array}{lccccc}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



Conceptos básicos de programación lineal

$$
\begin{array}{llcllcl}
\max & 9x_1 & + & 12x_2 & & \\
s.a: & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 180 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Infactible!!!



TFPL $\rightarrow$ La búsqueda de la solución óptima se reduce a buscar en un número finito de puntos que son los vértices de un poliedro.

La tarea de hallar todos los vértices de un poliedro en más de dos o tres dimensiones es complicado $\rightarrow$ Método algebraico que los identifique.

Consideremos un problema lineal en forma estándar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} max\ (min) & c^T x \\ sujeto\ a: & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}}$$

$\rightarrow$ **Soluciones** = $\{x \in \mathbf{R}^n \ / \ Ax = b\}$

$\rightarrow$ **Soluciones factibles** = $\{x \in \mathbf{R}^n \ / \ Ax = b, x \geq 0_n\}$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ s.a: & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

$$\textbf{Soluciones} = \{x \in \mathbf{R}^{n} \ / \ Ax = b\}$$

Como rango(A) = m = nº de filas ≤ n = nº de variables → Sistema compatible.

- Si m = n → Sistema compatible determinado → La solución única es óptima.
- Si m < n → Sistema compatible indeterminado → Podemos expresar las infinitas soluciones despejando m variables en función de las m–n restantes.

Matricialmente: Si tomamos m columnas linealmente independientes de la matriz A, entonces, reordenando las columnas si fuese necesario, se puede escribir el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

$$Bx_B + Dx_D = b$$

donde B es una matriz con m columnas linealmente independientes y D son las restantes columnas de la matriz A, y $x_B \in \mathbf{R}^{m}$ y $x_D \in \mathbf{R}^{n-m}$ son los vectores de las variables asociadas a B y D respectivamente.

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}
$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \color{red}{B} & \color{blue}{D} \\ \left(\boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}\right. & \left.\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}\right) \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \color{red}{x_B} \\ \\ \color{blue}{x_D} \end{matrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & B & D \\ A = & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} & x_B \\ x = & & \\ & \boxed{\begin{matrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{matrix}} & x_D \end{array}$$

$$\boxed{Bx_B + Dx_D = b}$$

$$\begin{array}{ccccccc} B & x_B & & D & x_D & & b \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como rango(B) = m → ∃ B^{-1}. Por lo tanto, las soluciones del sistema $Ax = b$ se obtienen:

$$Bx_B + Dx_D = b$$

$$Bx_B = b - Dx_D$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D, \quad x_D \in R^{n-m}}$$

Y las **soluciones factibles** serán:

$$\left.\begin{array}{l} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D, \leftarrow \text{Soluciones} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \\ x_D \geq 0_{n-m}, \quad x_B \geq 0_m \leftarrow \text{Factibles} \end{array}\right\}$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10 \end{array}$$

$$\boxed{Bx_B + Dx_D = b}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{x_B}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} + \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{x_D}{\begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

EJEMPLO:

$$\boxed{Bx_B + Dx_D = b}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} B & x_B & & D & x_D & & b \\ \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x_3\\ h_1\\ h_2\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}60\\ 10\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{Bx_B = b - Dx_D}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 60 & - & x_3 & - & h_1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 10 & - & 2x_3 & - & h_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\ 10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ h_1\\ h_2\end{pmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\boxed{Bx_B + Dx_D = b}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & h_1 & = & 60 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & h_2 & = & 10 \end{array}$$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{x_B}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{x_D}{\begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Bx_B = b - Dx_D}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 60 & - & x_3 & - & h_1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 10 & - & 2x_3 & - & h_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} - B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

Soluciones del sistema $Ax=b$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{70}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}h_1 - \frac{1}{4}h_2 \\ x_2 = \frac{30}{4} + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}h_1 + \frac{3}{4}h_2 \end{cases} \longleftarrow$$

Las soluciones del sistema $Ax=b$ son todos los valores x_1 , x_2 , x_3 , h_1 , h_2 que satisfacen estas relaciones.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$+$$

$$x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0$$

Soluciones factibles

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{70}{4} - \dfrac{3}{4}x_3 - \dfrac{1}{4}h_1 - \dfrac{1}{4}h_2 \\ x_2 = \dfrac{30}{4} + \dfrac{5}{4}x_3 - \dfrac{1}{4}h_1 + \dfrac{3}{4}h_2 \end{cases}$$

Las **soluciones factibles** son todos los valores x_1 , x_2 , x_3 , h_1 , h_2 ≥ 0 que satisfacen estas relaciones.

Conceptos básicos de programación lineal

A las soluciones del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_D = 0_{n-m}$, se les denomina **soluciones básicas** y si, además, son factibles, esto es, verifican $x_B \geq 0_m$, entonces se les llama **soluciones básicas factibles**.

Conceptos básicos de programación lineal

A las soluciones del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_D = 0_{n-m}$, se les denomina **soluciones básicas** y si, además, son factibles, esto es, verifican $x_B \geq 0_m$, entonces se les llama **soluciones básicas factibles**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Haciendo $x_3=h_1=h_2=0$, obtenemos una solución básica:

A las soluciones del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_D = 0_{n-m}$, se les denomina **soluciones básicas** y si, además, son factibles, esto es, verifican $x_B \geq 0_m$, entonces se les llama **soluciones básicas factibles**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix}$$

Haciendo $x_3=h_1=h_2=0$, obtenemos una solución básica:

Conceptos básicos de programación lineal

A las soluciones del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_D = 0_{n-m}$, se les denomina **soluciones básicas** y si, además, son factibles, esto es, verifican $x_B \geq 0_m$, entonces se les llama **soluciones básicas factibles**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancelto{0}{x_3} \\ \cancelto{0}{h_1} \\ \cancelto{0}{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix}$$

Haciendo $x_3 = h_1 = h_2 = 0$, obtenemos una solución básica:

A las soluciones del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_D = 0_{n-m}$, se les denomina **soluciones básicas** y si, además, son factibles, esto es, verifican $x_B \geq 0_m$, entonces se les llama **soluciones básicas factibles**.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -5/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Haciendo $x_3=h_1=h_2=0$, obtenemos una solución básica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, además, como x_1 , $x_2 \geq 0$, la solución **básica** es **factible**.

Dada una solución básica factible diremos que es **NO degenerada**, si todos los valores de las variables básicas son **estrictamente positivos**. En caso contrario, diremos que es degenerada.

Dada una solución básica factible diremos que es **NO degenerada**, si todos los valores de las variables básicas son **estrictamente positivos**. En caso contrario, diremos que es degenerada.

EJEMPLO:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70/4 \\ 30/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Como } x_1 , x_2 > 0, \text{ la solución es no degenerada}}$

✓ ¿Cuál es el interés de las soluciones básicas factibles?

TEOREMA (RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES BÁSICAS FACTIBLES Y LOS VÉRTICES DEL CONJUNTO FACTIBLE)

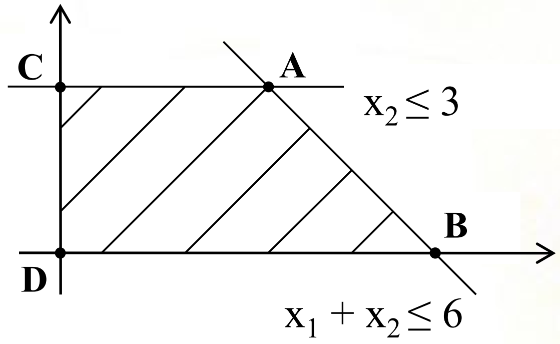
Dado un problema lineal en forma estándar se satisface que **toda solución básica factible es un vértice del conjunto factible y viceversa**.

Importancia de este resultado:

1. Proporciona una versión algebraica del T. Fundamental de la PL.
2. Proporciona un método de búsqueda de una solución óptima: evaluar la f.o. en las soluciones básicas factibles.

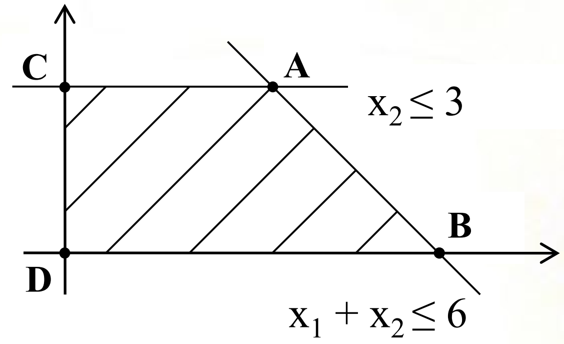
EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



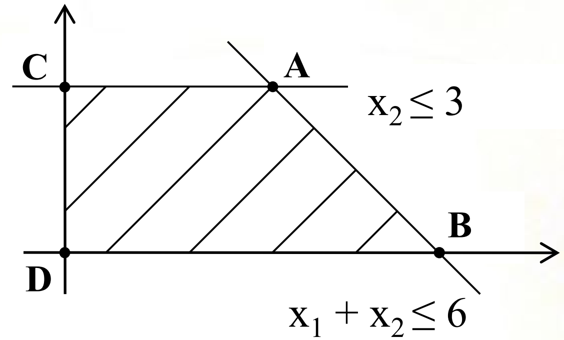
EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$



EJEMPLO:

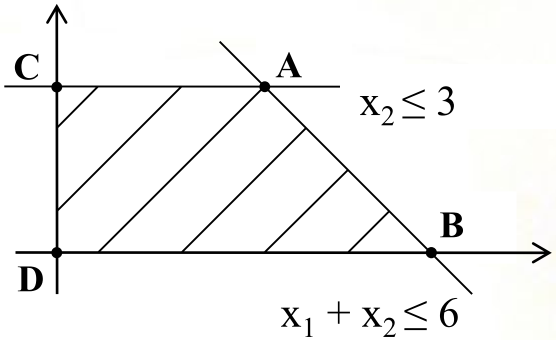
$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

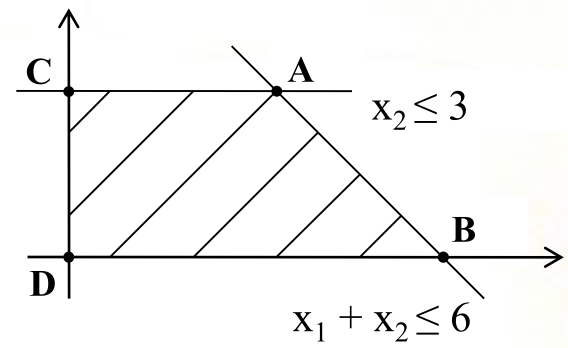


$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A tiene 4 columnas → 6 descomposiciones posibles A=(B | D)

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \color{red}{B} & \color{blue}{D} \end{array} \end{array}$$

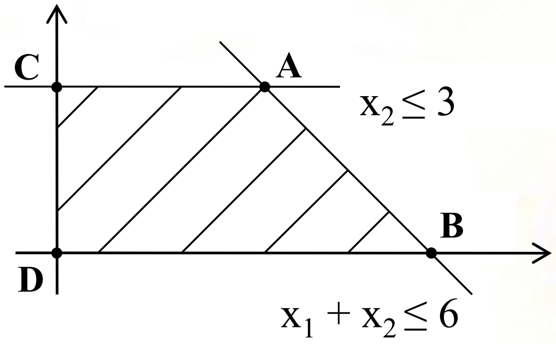
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \color{red}{x_B} \\ \\ \color{blue}{x_D} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



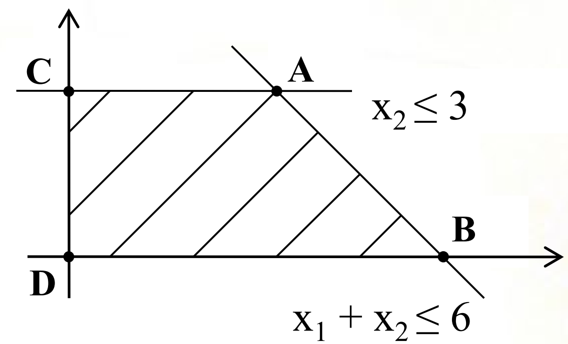
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{B} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{D} \right) \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \underbrace{\hspace{3em}}_{B} \quad \underbrace{\hspace{3em}}_{D} \end{array}$$

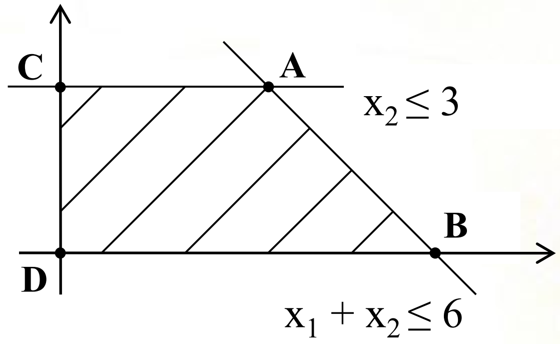
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \Big(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{B} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{D}\Big)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_B \qquad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = x_D$$

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

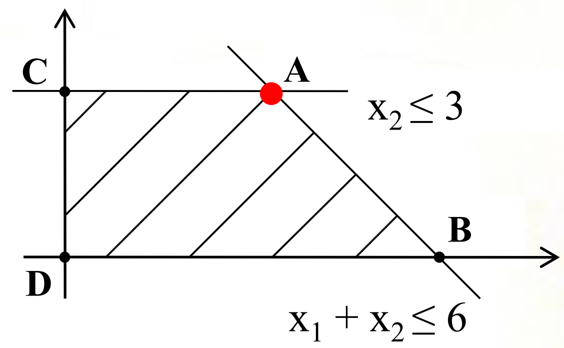
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = 3, x_2 = 3, h_1 = 0, h_2 = 0}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{B} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{D} \right)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ x_D \end{matrix}$$

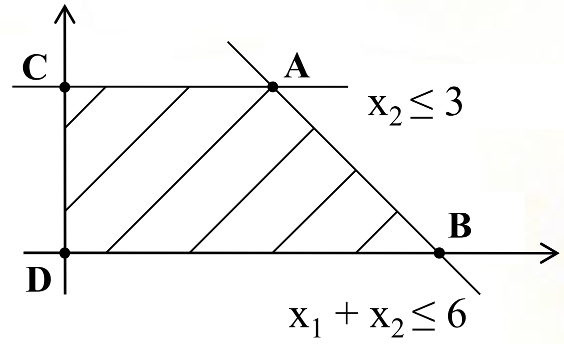
$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = 3, x_2 = 3, h_1 = 0, h_2 = 0} \longrightarrow \boxed{\text{Vértice A}}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



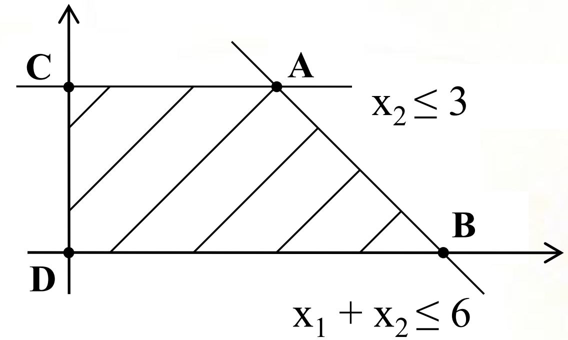
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & h_1 & x_2 & h_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc} B & D \end{array} \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ h_1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ h_2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & h_1 & x_2 & h_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\qquad B \qquad\qquad D$$

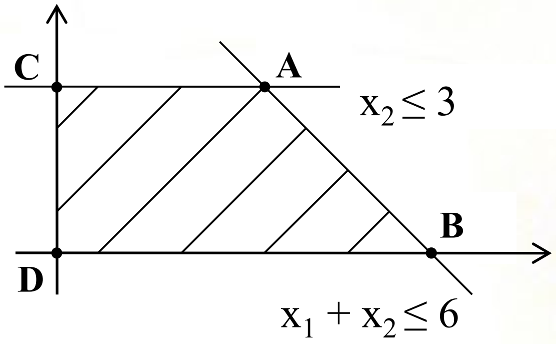
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ h_1 \\ x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\right\} x_B \\ \left.\right\} x_D \end{array}$$

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & h_1 & x_2 & h_2 \end{array} \\ \left(\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}} \right) \\ \begin{array}{cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{array} \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{array}{c} x_1 \\ h_1 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} x_2 \\ h_2 \end{array}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_B \\ \\ x_D \end{array}$$

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

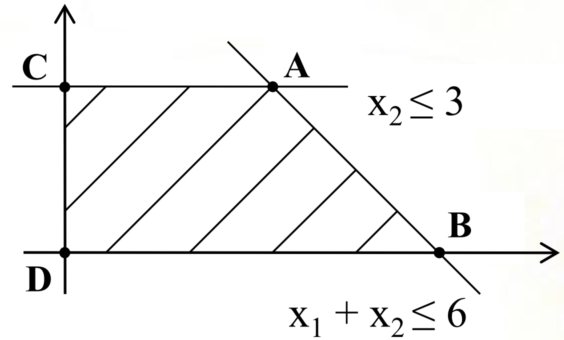
No existe B^{-1} !!!!!

No da lugar a una solución básica

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{cccccc} & x_2 & h_2 & x_1 & h_1 & \\ A = \Bigg(& 1 & 0 & 1 & 1 & \Bigg) \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \\ x_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

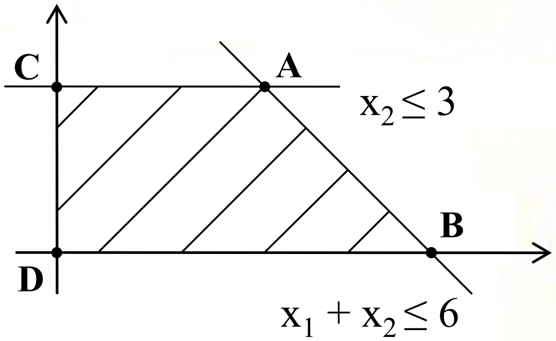
$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & h_1 & h_2 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} x_2 & h_2 & x_1 & h_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \\ x_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = x_B \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ h_1 \end{pmatrix} = x_D$$

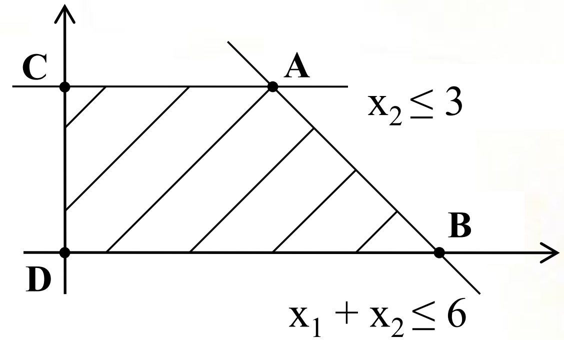
$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & h_2 & x_1 & h_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \color{red}{B} & \color{blue}{D} \end{array} \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \\ x_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ x_D = \begin{pmatrix} x_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

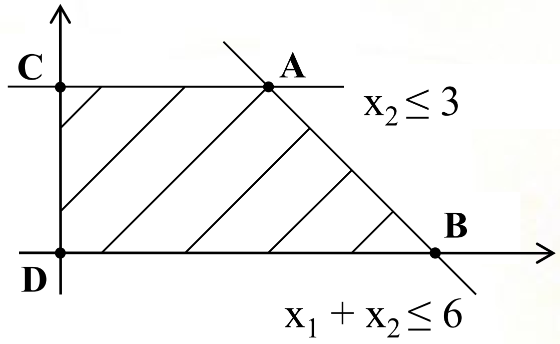
$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

No da lugar a una solución básica FACTIBLE

EJEMPLO:

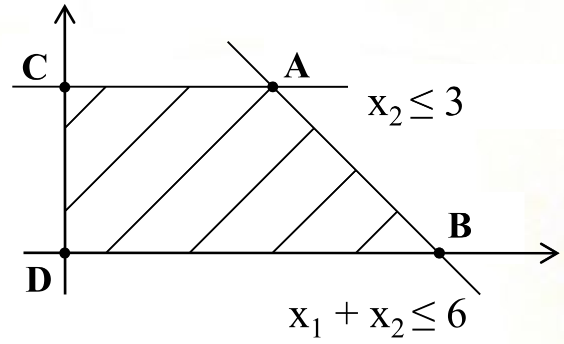
$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$



	x_1, x_2	x_1, h_1	x_1, h_2	x_2, h_1	x_2, h_2	h_1, h_2
B	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
B^{-1}	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	No	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$B^{-1}b$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	No	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
Factible?	Sí		Sí	Sí	No	Sí
Solución	(3,3,0,0) A		(6,0,0,3) B	(0,3,3,0) C		(0,0,6,3) D
Func. obj.	9	--	12	3	--	0

EJEMPLO:

$$\begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Max & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 + h_1 = 6 \\ & x_2 + h_2 = 3 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$



	x_1, x_2	x_1, h_1	x_1, h_2	x_2, h_1	x_2, h_2	h_1, h_2
B	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{B}^{-1}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	No	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	No	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
Factible?	Sí		Sí	Sí	No	Sí
Solución	(3,3,0,0) A		(6,0,0,3) B	(0,3,3,0) C		(0,0,6,3) D
Func. obj.	9	--	12	3	--	0

$\rightarrow$

$$x_1^* = 6$$
$$x_2^* = 0$$
$$h_1^* = 0$$
$$h_2^* = 3$$

EJEMPLO: Halla la solución óptima del siguiente problema si la base óptima la forman x_2 y h_2

$$\begin{cases} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ s.a: & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 60 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO: Halla la solución óptima del siguiente problema si la base óptima la forman x_2 y h_2

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

Base = $\{x_2, h_2\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

Base = $\{x_2 , h_2\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & \boxed{x_2} & x_3 & h_1 & \boxed{h_2} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} & x_2 & h_2 & x_1 & x_3 & h_1 \\ A = & \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \right. & & \left. \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}} \right) & & \end{array}$$

$$\underbrace{}_{B} \qquad \underbrace{}_{D}$$

B **D**

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 \\ A = & \left(\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right. & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \left. \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \right) \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ h_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ h_1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

Base = $\{x_2, h_2\}$

Conceptos básicos de programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & h_2 & x_1 & x_3 & h_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{array} \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ h_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ \\ x_D \end{matrix}$$

Base = {x_2 , h_2}

$$\boxed{x_B = B^{-1}b} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & h_2 & x_1 & x_3 & h_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cc} B & D \end{array} \end{array}$$

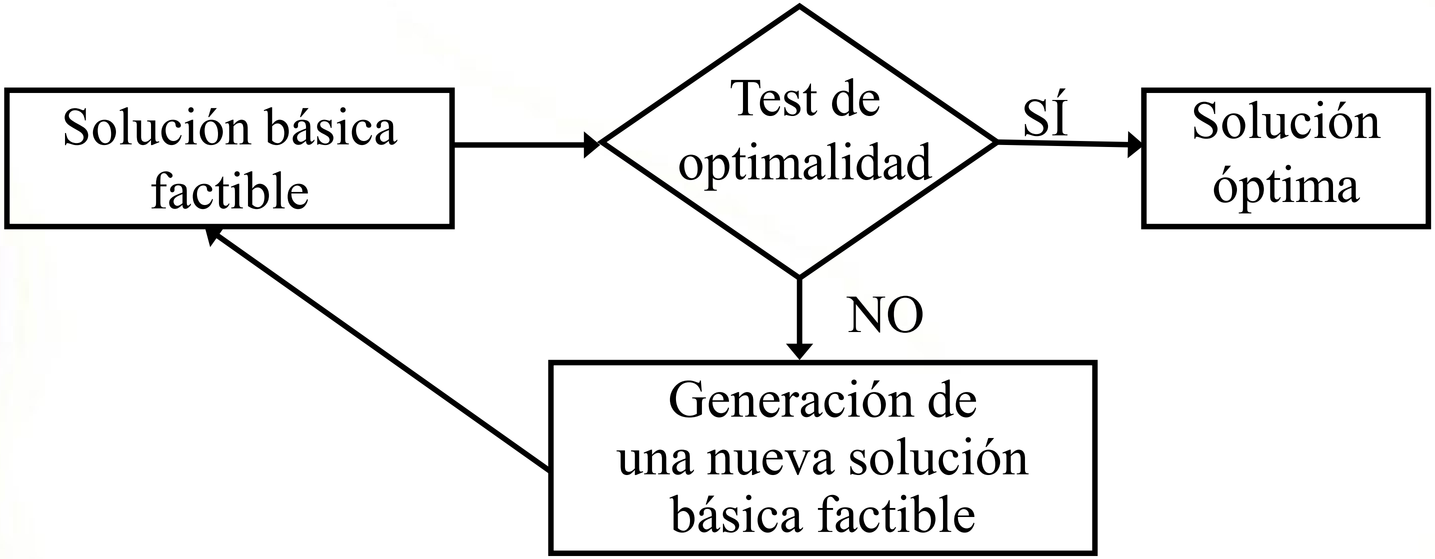
$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ h_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_B \\ \\ x_D \end{array}$$

Base = {x_2 , h_2}

$$\boxed{x_B = B^{-1}b} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad x_D = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El algoritmo del simplex

El **algoritmo del simplex** es un método para solucionar problemas de programación lineal que consiste en: partiendo de una solución básica factible buscar una nueva solución básica factible que mejore el valor de la función objetivo. Su estructura es la siguiente:



En resumen, el algoritmo de simplex es un proceso de sustitución de columnas que nos **permite explorar los vértices de un poliedro** siguiendo cada vez una dirección de mejora hasta alcanzar la solución óptima.

EJEMPLO: La producción de PET

Una petroquímica de la cuenca mediterránea se dedica a producir plástico para botellas (PET-botella) y fibra textil (PET-fibra) a partir de PTA (ácido tereftáltico puro) y de EtG (etilen-Glicol). Las cantidades de cada producto (en Tm.) que son necesarias para producir una tonelada de cada uno de estos derivados vienen dadas por:

	PET-botella	PET-fibra
PTA	0.966	0.912
EtG	0.365	0.344

La venta en el mercado de plástico da un beneficio de 60 € por Tm., mientras que la venta de fibra textil da un beneficio de 50 €/Tm.

Teniendo en cuenta que la petrolera dispone de 260.000 Tm. de PTA y 150.000 Tm. de EtG, ¿cuáles serían sus niveles óptimos de producción de fibra textil y de plástico?

UNIVERSITAS Miguel Hernández

EJEMPLO: La producción de PET

Si definimos las variables: x_1 = Tm fabricadas de plástico para botellas
x_2 = Tm fabricadas de fibra textil

la respuesta a la pregunta anterior vendría dada por la solución del siguiente PL:

$$\begin{aligned} Max \quad & 60x_1 + 50x_2 \\ s.a: \quad & 0.966x_1 + 0.912x_2 \quad \leq 260000 \\ & 0.365x_1 + 0.344x_2 \quad \leq 150000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} & x_1^* = 269151.139 \\ & x_2^* = 0 \\ & z^* = 16149068.32 \end{aligned}$$

EJEMPLO: La producción de PET

La industria petroquímica en la cuenca Mediterránea está controlada por una gran compañía que necesita PTA y EtG para su proceso de producción. El gerente quiere persuadir a la pequeña petroquímica para que abandone su proceso productivo y le venda directamente sus existencias.

Al gerente se le plantea el problema de determinar el precio de compra que debe ofrecer a la pequeña de manera que no sólo esa compra le salga lo más barata posible, sino que a la pequeña le interese vender: lo que recibe por dejar de producir una unidad de cada uno de sus productos no sea inferior a lo que obtendría con su venta directa en el mercado.

¿Qué problema debe resolver el gerente para determinar dichos precios?

EJEMPLO: La producción de PET

Si definimos las variables: y_1 = precio de PTA (en € por Tm)
y_2 = precio de EtG (en € por Tm)

$$\begin{array}{lll} Min & 260000y_1 + 150000y_2 & \\ s.a: & 0.966y_1 + 0.365y_2 & \geq 60 \\ & 0.912y_1 + 0.344y_2 & \geq 50 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1{}^* = 62.111801 \\ y_2{}^* = 0 \\ z^* = 16149068.32 \end{array}$$

EJEMPLO: La producción de PET

$$
\begin{array}{lll}
Max & 60x_1 + 50x_2 & \\
s.a: & 0.966x_1 + 0.912x_2 & \leq 260000 \\
 & 0.365x_1 + 0.344x_2 & \leq 150000 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
x_1{*} = 269151.139 \\
x_2{*} = 0 \\
z{*} = 16149068.32
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & 260000y_1 + 150000y_2 & \\
s.a: & 0.966y_1 + 0.365y_2 & \geq 60 \\
 & 0.912y_1 + 0.344y_2 & \geq 50 \\
 & y_1, y_2 \geq 0 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
y_1{*} = 62.111801 \\
y_2{*} = 0 \\
z{*} = 16149068.32
\end{array}
$$

✓ ¿Qué es la dualidad?

La **dualidad** consiste en asociar a un problema lineal, que denominamos **problema primal** (PP), un problema lineal auxiliar, que denominamos **problema dual** (PD), que se define directa y sistemáticamente a partir del problema primal.

El problema dual viene a ser el problema "traspuesto" del problema primal:

1. Por cada restricción del PP, se define una variable del PD y por cada variable del PP se define una restricción del PD.
2. Los coeficientes de la función objetivo del PP pasan a ser los términos independientes de las restricciones del PD.
3. Los términos independientes del PP pasan a jugar el papel de coeficientes de la función objetivo del PD.
4. La matriz de restricciones para el dual es la traspuesta del primal.

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$		PROBLEMA DUAL
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$		**PROBLEMA PRIMAL**

Dualidad en programación lineal

EJEMPLO:

Problema primal

$$
\begin{array}{lrcrl}
max & 2x_1 & + & x_2 & \\
s.a: & x_1 & + & x_2 & \geq 10 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq 15 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & = 5 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \in R, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Problema dual

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
min & 10y_1 & + & 15y_2 & + & 5y_3 & \\
s.a: & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = 2 \\
 & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & \geq 1 \\
 & \multicolumn{6}{l}{y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \in R}
\end{array}
$$

La dualidad tiene gran importancia por las siguientes razones:

- Por las posibilidades que abre en el desarrollo teórico de la programación lineal.
- La dualidad es fundamental para el análisis de sensibilidad.
- Permite en ciertas ocasiones ventajas computacionales para la obtención de soluciones óptimas.
- Es útil para el desarrollo de métodos de optimización matemática.
- Origina interesantes interpretaciones económicas e información relevante para la toma de decisiones.

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ s.a: & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ s.a: & \boxed{x_1 + x_3 \geq 2} \rightarrow \boldsymbol{y_1} \\ & \boxed{x_2 + 2x_3 \geq 5} \rightarrow \boldsymbol{y_2} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & \\ s.a: & x_1 & & & + & x_3 & \geq 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 5 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & 2y_1 & + & 5y_2 \\ s.a: & y_1 & & \\ & & & y_2 \\ & y_1 & + & 2y_2 \\ & y_1 & , & y_2 \end{cases}$$

Dualidad en programación lineal

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
\min & \boxed{4x_1 + 3x_2 + 8x_3} & & & & \\
s.a: & x_1 & & + & x_3 & \geq 2 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & &
\end{array}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{array}{lllll}
\max & 2y_1 & + & 5y_2 & \\
s.a: & y_1 & & & \\
 & & & y_2 & \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \\
 & y_1 & , & y_2 &
\end{array}
\right.
\quad
\boxed{\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 8 \end{array}}
$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ s.a: & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & 2y_1 + 5y_2 \\ s.a: & y_1 \ \textbf{?}\ 4 \\ & y_2 \ \textbf{?}\ 3 \\ & y_1 + 2y_2 \ \textbf{?}\ 8 \\ & y_1 \ \textbf{?}, y_2 \ \textbf{?} \end{cases}$$

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$		**PROBLEMA DUAL**
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$		**PROBLEMA PRIMAL**

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$	PROBLEMA DUAL	
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$	**PROBLEMA PRIMAL**	

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$		**PROBLEMA DUAL**
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$		**PROBLEMA PRIMAL**

Dualidad en programación lineal

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$
\begin{cases}
\min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & \\
s.a: & x_1 & & & + & x_3 & \geq 2 \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 5 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & &
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\max & 2y_1 & + & 5y_2 & \\
s.a: & y_1 & & & 4 \\
 & & & y_2 & 3 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & 8 \\
 & y_1 \geq 0 & , & y_2 &
\end{cases}
$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\left\{\begin{array}{lcccccl}\min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & \\ s.a: & x_1 & & & + & x_3 & \geq 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcccc}\max & 2y_1 & + & 5y_2 & \\ s.a: & y_1 & & & 4 \\ & & & y_2 & 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & 8 \\ & y_1 \geq 0 & , & y_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$	PROBLEMA DUAL	
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$	**PROBLEMA PRIMAL**	

Dualidad en programación lineal

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & \\ s.a: & x_1 & & & + & x_3 & \geq 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & 2y_1 & + & 5y_2 & \\ s.a: & y_1 & & & \leq 4 \\ & & & y_2 & \leq 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & \leq 8 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 & & \end{cases}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ s.a: & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & 2y_1 + 5y_2 \\ s.a: & y_1 \leq 4 \\ & y_2 \leq 3 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max & 2y_1 + 5y_2 & \\ s.a: & y_1 & \leq 4 \\ & y_2 & \leq 3 \\ & y_1 + 2y_2 & \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Dualidad en programación lineal

Las reglas para construir el problema dual se resumen en la siguiente tabla:

PROBLEMA PRIMAL		$\rightarrow$	PROBLEMA DUAL	
Objetivo	Minimizar	$\leftrightarrow$	Maximizar	**Objetivo**
Restricción	$\geq$ $=$ $\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0 libre ≤ 0	**Variable**
Variable	≥ 0 libre ≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$ $=$ $\geq$	**Restricción**
PROBLEMA DUAL		$\leftarrow$	**PROBLEMA PRIMAL**	

Relaciones entre los problemas primal y dual:

TEOREMA
El problema dual del problema dual coincide con el problema primal.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \min & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ s.a: & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & 2y_1 + 5y_2 \\ s.a: & y_1 \leq 4 \\ & y_2 \leq 3 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Relaciones entre los problemas primal y dual:

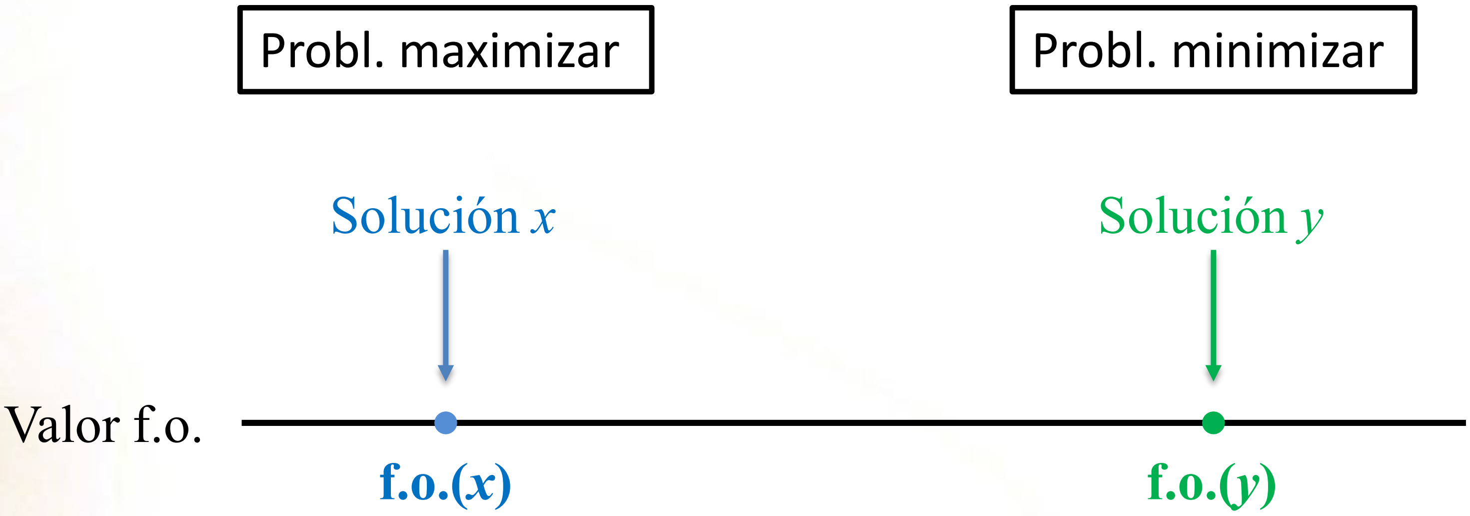
TEOREMA DE LA DUALIDAD DÉBIL
Dado un problema lineal y su dual, sea *x* una solución factible del problema primal e *y* una solución factible del problema dual, entonces se verifica lo siguiente:

Si el objetivo del problema primal es maximizar entonces se tiene que:

$$y^{\mathrm{T}}b \geq c^{\mathrm{T}}x.$$

Si el objetivo del problema primal es minimizar entonces se tiene que:

$$y^{\mathrm{T}}b \leq c^{\mathrm{T}}x.$$



$$\boxed{\text{f.o.}(x) \leq \text{f.o.}(y)}$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{llllllll} max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 9 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{llllll} min & 9y_1 & + & 7y_2 & & \\ s.a: & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\ & y_1 & & & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{llllllll}
max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\
s.a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 9 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{lllllll}
min & 9y_1 & + & 7y_2 & & \\
s.a: & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\
 & y_1 & & & \geq & 1 \\
 & y_1, y_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$$x^{\mathrm{T}} = (5,\ 1,\ 3)$$

$$f.o. = c^{\mathrm{T}}x = 3\times 5 + 2\times 1 + 1\times 3 = 20$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{llllllll} max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 9 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 7 \\ & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{llllll} min & 9y_1 & + & 7y_2 & & \\ s.a: & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\ & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\ & y_1 & & & \geq & 1 \\ & \multicolumn{5}{l}{y_1, y_2 \geq 0} \end{array}$$

$$y^{\mathrm{T}} = (1, 2)$$

$$f.o. = y^{\mathrm{T}} b = 9\times 1 + 7\times 2 = 23$$

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{llllllll}
max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\
s.a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 9 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{llllll}
min & 9y_1 & + & 7y_2 & & \\
s.a: & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 \\
 & y_1 & & & \geq & 1 \\
 & y_1, y_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

$x^{\mathrm{T}} = (5, 1, 3)$ $\qquad$ $y^{\mathrm{T}} = (1, 2)$

$$\boxed{f.o. = c^{\mathrm{T}}x = 3\times5 + 2\times1 + 1\times3 = 20 \quad \leq \quad f.o. = y^{\mathrm{T}}b = 9\times1 + 7\times2 = 23}$$

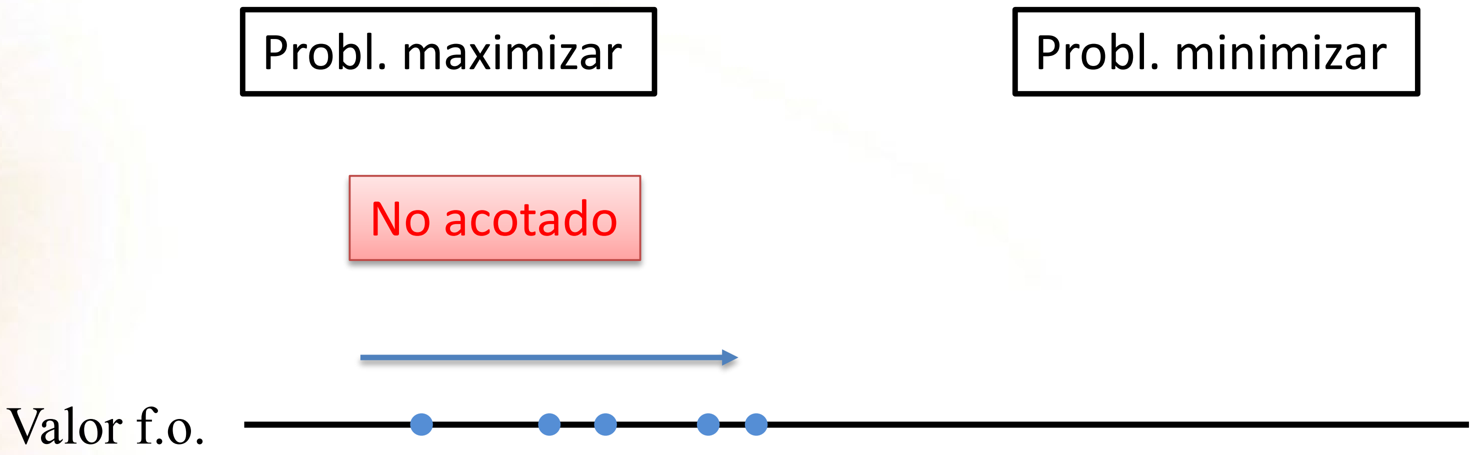
TEOREMA DE LA DUALIDAD FUERTE

Sean un problema lineal y su dual. Entonces se satisface lo siguiente:

- Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible.
- El problema primal tiene valor óptimo finito si, y sólo si, el problema dual tiene valor óptimo finito. Además, ambos valores óptimos coinciden.

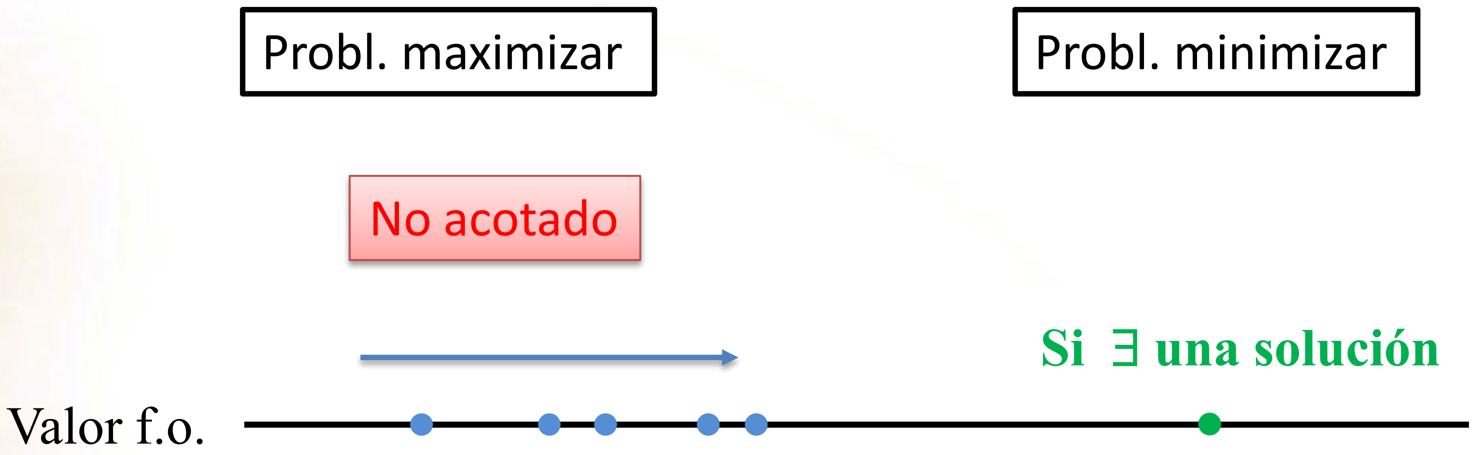
Dualidad en programación lineal

Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible



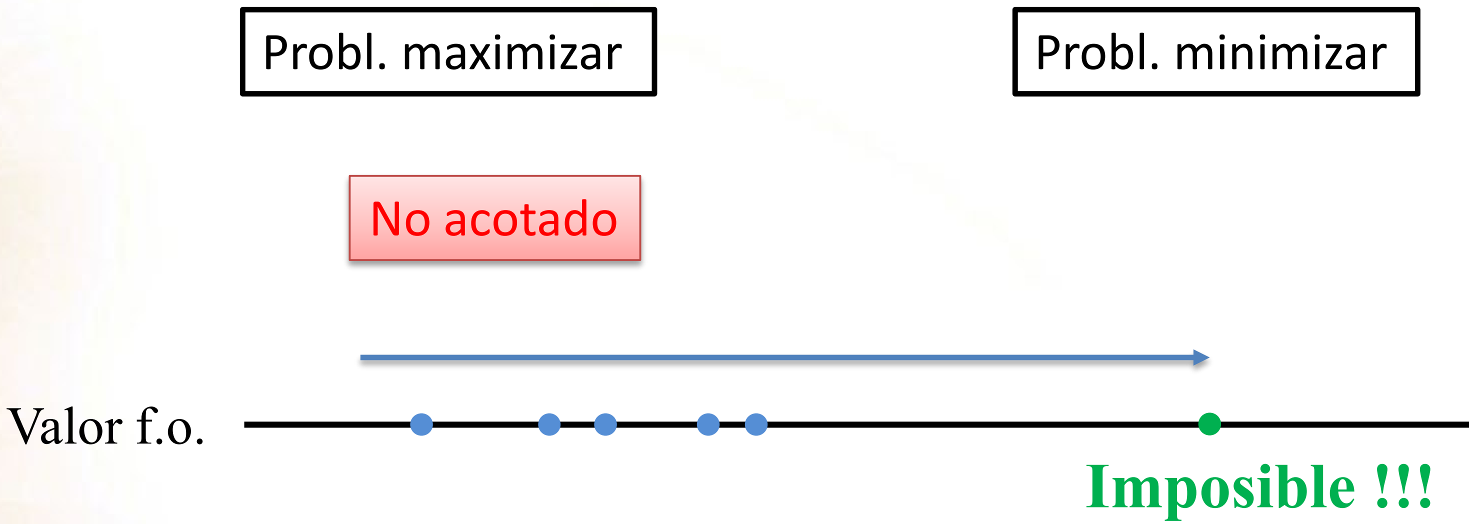
Dualidad en programación lineal

Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible



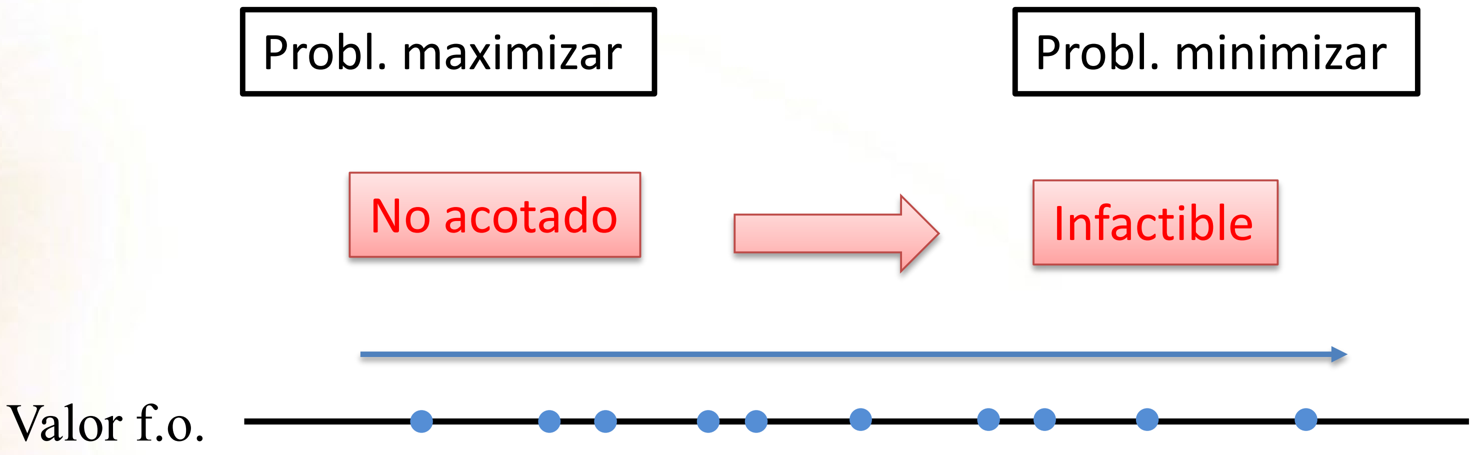
Dualidad en programación lineal

Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible



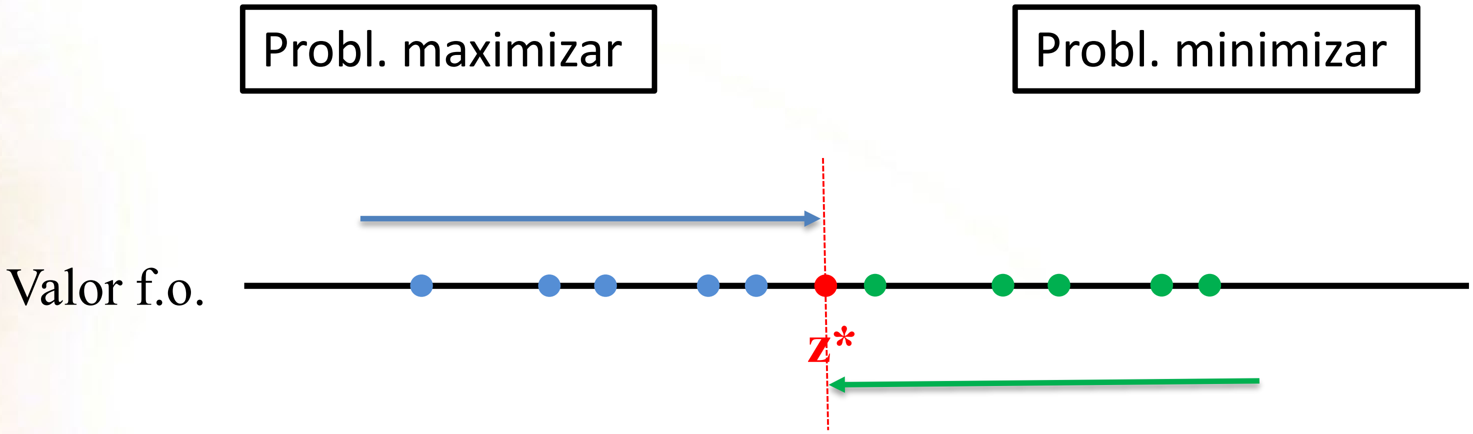
Dualidad en programación lineal

Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible



Dualidad en programación lineal

El problema primal tiene valor óptimo finito si, y sólo si, el problema dual tiene valor óptimo finito. Además, ambos valores óptimos coinciden.



TEOREMA DE LA DUALIDAD FUERTE

Sean un problema lineal y su dual. Entonces se satisface lo siguiente:

- Si uno de los dos problemas tiene valor óptimo no acotado, entonces el otro es infactible.
- El problema primal tiene valor óptimo finito si, y sólo si, el problema dual tiene valor óptimo finito. Además, ambos valores óptimos coinciden.

COROLARIO

Sean un problema lineal y su dual. Si $[B \mid D]$ es una descomposición de la matriz A que da una solución óptima para el problema primal, entonces se verifica que una solución óptima para el dual viene dada por

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

- Observación: Si disponemos de una solución (básica) óptima no degenerada, la matriz B^{-1} se puede obtener calculando la inversa de las columnas asociadas a las variables básicas.

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

EJERCICIO:

Dado el siguiente problema con solución óptima $x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3})$:

$$
\begin{cases}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
s.a: & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 60 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & & &
\end{cases}
$$

Calcula la solución óptima del problema dual

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3})$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3})$$

$$h_1 = 60 - 3x_1 - x_2 - x_3 = 60 - 3\times 0 - \frac{110}{3} - \frac{70}{3} = 60 - \frac{180}{3} = 0$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3})$$

$$h_1 = 60 - 3x_1 - x_2 - x_3 = 60 - 3\times 0 - \frac{110}{3} - \frac{70}{3} = 60 - \frac{180}{3} = 0$$

$$h_2 = 10 - x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 - 0 + \frac{110}{3} - 2\frac{70}{3} = 10 - \frac{30}{3} = 0$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \quad \rightarrow \quad h_1^* = h_2^* = 0$$

$$h_1 = 60 - 3x_1 - x_2 - x_3 = 60 - 3\times 0 - \frac{110}{3} - \frac{70}{3} = 60 - \frac{180}{3} = 0$$

$$h_2 = 10 - x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 - 0 + \frac{110}{3} - 2\frac{70}{3} = 10 - \frac{30}{3} = 0$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \rightarrow h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{\text{Base} = \{x_2, x_3\}}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \quad \rightarrow \quad h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{\text{Base} = \{x_2, x_3\}}$$

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \rightarrow h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{\text{Base} = \{x_2, x_3\}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \rightarrow h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{\text{Base} = \{x_2, x_3\}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

EJEMPLO:

$$
\begin{cases}
\max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\
s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\
\quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\
\quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0
\end{cases}
$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \rightarrow h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{\text{Base} = \{x_2, x_3\}}$$

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

$$y^{*T} = (y_1^*, y_2^*) = (1\ 1)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1\ 0)$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \qquad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \rightarrow h_1^* = h_2^* = 0$$

Base = $\{x_2, x_3\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

$$\boxed{y^{*T} = c_B^T B^{-1}}$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = \left(y_1^*, y_2^*\right) = (1\ 1)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1\ 0)$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3}) \quad \rightarrow \quad h_1^* = h_2^* = 0$$

$$\boxed{z^* = 60}$$

Base = $\{x_2, x_3\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = \left(y_1^*, y_2^*\right) = \left(1\ 1\right)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \left(1\ 0\right)$$

$$\boxed{z^* = 60}$$

EJERCICIO:

Dado el siguiente problema con solución óptima $y^{*T} = (1,0)$

$$\begin{cases} \min \ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Calcula la solución óptima del problema dual

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ \ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0)$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad\ \ y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad\ \ y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad\ \ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad\ \ y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad\ \ y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad\ \ y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0)$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \qquad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \qquad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \qquad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1^* = 1,\ y_2^* = 0 \\ e_1^D{}^* = 1,\ e_2^D{}^* = e_3^D{}^* = 0 \end{matrix}}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad\quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad\quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \qquad\quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \qquad\quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \qquad\quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1^* = 1,\ y_2^* = 0 \\ e_1^{D*} = 1,\ e_2^{D*} = e_3^{D*} = 0 \end{array}}$$

Base = ?

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min \; 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \; 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min \; 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \; 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1^* = 1, \; y_2^* = 0 \\ e_1^D{}^* = 1, \; e_2^D{}^* = e_3^D{}^* = 0 \end{array}}$$

Base = **?**

3 restricciones $\rightarrow$ 3 variables básicas

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: \quad 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \qquad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \qquad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \qquad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1^* = 1,\ y_2^* = 0 \\ e_1^D{}^* = 1,\ e_2^D{}^* = e_3^D{}^* = 0 \end{array}}$$

Base = **?**

3 restricciones $\rightarrow$ 3 variables básicas $\longrightarrow$ Base = $\{y_1\ , e_1^D\ ,\ \textbf{?}\ \}$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad\quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad\quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad\quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad\quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad\quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solución degenerada

$$y_1^* = 1,\ y_2^* = 0$$
$$e_1^D{}^* = 1,\ e_2^D{}^* = e_3^D{}^* = 0$$

Base = ?

3 restricciones → 3 variables básicas → Base = $\{y_1, e_1^D, ?\}$

TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

Sean los problemas primal y dual que tienen solución óptima, entonces se verifica que:

- Si en el óptimo una variable de holgura (o exceso) en uno de los problemas es no nula, la correspondiente variable (asociada a través de la restricción) es nula en el óptimo del otro problema.

- Por el contrario, si una variable es no nula en el óptimo, la correspondiente variable de holgura (o exceso) en el óptimo del otro problema es nula.

TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

Sean los problemas primal y dual que tienen solución óptima, entonces se verifica que:

- Si en el óptimo una variable de holgura (o exceso) en uno de los problemas es no nula, la correspondiente variable (asociada a través de la restricción) es nula en el óptimo del otro problema.
- Por el contrario, si una variable es no nula en el óptimo, la correspondiente variable de holgura (o exceso) en el óptimo del otro problema es nula.

NOTA: Para utilizar este teorema no hace falta que los problemas estén en formato estándar. Sólo que las restricciones sean de igualdad!!!

TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

	PP
variables	x_1 $\vdots$ x_n
restricciones	h_1 / e_1 $\vdots$ h_m / e_m

TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

	PP		PD
variables	x_1	$\longrightarrow$	h_1 / e_1
	$\vdots$		$\vdots$
	x_n	$\longrightarrow$	h_n / e_n
restricciones	h_1 / e_1	$\longrightarrow$	y_1
	$\vdots$		$\vdots$
	h_m / e_m	$\longrightarrow$	y_m

TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

	PP		PD	Producto
	x_1	$\longrightarrow$	h_1 / e_1	0
variables	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_n	$\longrightarrow$	h_n / e_n	0
	h_1 / e_1	$\longrightarrow$	y_1	0
restricciones	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	h_m / e_m	$\longrightarrow$	y_m	0

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a: 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a: 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dualidad en programación lineal

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

PP

variables

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{110}{3} \qquad x_3 = \frac{70}{3}$$

restricciones

$$h_1 = 0 \qquad h_2 = 0$$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

	PP	PD
variables	$x_1 = 0$	$e_1 = 1$
	$x_2 = \frac{110}{3}$	$e_2 = 0$
	$x_3 = \frac{70}{3}$	$e_3 = 0$
restricciones	$h_1 = 0$	$y_1 = 1$
	$h_2 = 0$	$y_2 = 0$

EJEMPLO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

	PP	PD	
variables	$x_1 = 0$ ×	$e_1 = 1$	**0**
	$x_2 = \frac{110}{3}$ ×	$e_2 = 0$	**0**
	$x_3 = \frac{70}{3}$ ×	$e_3 = 0$	**0**
restricciones	$h_1 = 0$ ×	$y_1 = 1$	**0**
	$h_2 = 0$ ×	$y_2 = 0$	**0**

EJERCICIO:

Dado el siguiente problema con solución óptima $x^{*T} = (0, \frac{110}{3}, \frac{70}{3})$:

$$\begin{cases} \max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ s.a: & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 60 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & & & \end{cases}$$

Calcula la solución óptima del problema dual (incluidas las holguras y/o variables de exceso) aplicando el Teorema de las holguras complementarias.

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \qquad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 110/3$$

$$x_3^* = 70/3$$

$$h_1^* = 0$$

$$h_2^* = 0$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = 0$$
$$x_2^* = 110/3$$
$$x_3^* = 70/3$$
$$h_1^* = 0$$
$$h_2^* = 0$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC

$x_1^* = 0$	$e_1^D{}^* =$	0
$x_2^* = 110/3$	$e_2^D{}^* =$	0
$x_3^* = 70/3$	$e_3^D{}^* =$	0
$h_1^* = 0$	$y_1^* =$	0
$h_2^* = 0$	$y_2^* =$	0

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dualidad en programación lineal

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC

$x_1{}^* = 0$	$e_1^D{}^* =$	0
$x_2{}^* = {}^{110}\!/_3$	$e_2^D{}^* = 0$	0
$x_3{}^* = {}^{70}\!/_3$	$e_3^D{}^* = 0$	0
$h_1{}^* = 0$	$y_1{}^* =$	0
$h_2{}^* = 0$	$y_2{}^* =$	0

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC $\longrightarrow$

$x_1{}^* = 0$	$e_1^D{}^* = ?$	0
$x_2{}^* = 110/3$	$e_2^D{}^* = 0$	0
$x_3{}^* = 70/3$	$e_3^D{}^* = 0$	0
$h_1{}^* = 0$	$y_1{}^* = ?$	0
$h_2{}^* = 0$	$y_2{}^* = ?$	0

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC $\Longrightarrow$

$x_1{}^* = 0$	$e_1^D{}^* = ?$	0
$x_2{}^* = 110/3$	$e_2^D{}^* = 0$	0
$x_3{}^* = 70/3$	$e_3^D{}^* = 0$	0
$h_1{}^* = 0$	$y_1{}^* = ?$	0
$h_2{}^* = 0$	$y_2{}^* = ?$	0

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - \overset{0}{e_2} = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - \overset{0}{e_3} = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC

$x_1^* = 0$	$e_1^D{}^* = ?$	0
$x_2^* = 110/3$	$e_2^D{}^* = 0$	0
$x_3^* = 70/3$	$e_3^D{}^* = 0$	0
$h_1^* = 0$	$y_1^* = ?$	0
$h_2^* = 0$	$y_2^* = ?$	0

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - \cancelto{0}{e_2} = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - \cancelto{0}{e_3} = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1^* - y_2^* &= 1 \\ y_1^* + 2y_2^* &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} y_1^* &= 1 \\ y_2^* &= 0 \end{aligned}$$

$$e_1^D{}^* = 3y_1^* + y_2^* - 2 \rightarrow e_1^D{}^* = 1$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

THC

$x_1^* = 0$	$e_1^D{}^* = ?$	0
$x_2^* = 110/3$	$e_2^D{}^* = 0$	0
$x_3^* = 70/3$	$e_3^D{}^* = 0$	0
$h_1^* = 0$	$y_1^* = ?$	0
$h_2^* = 0$	$y_2^* = ?$	0

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1^* = 1,\ y_2^* = 0 \\ e_1^D{}^* = 1,\ e_2^D{}^* = e_3^D{}^* = 0 \end{array}}$$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - \overset{0}{e_2} = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - \overset{0}{e_3} = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} y_1^* - y_2^* = 1 \\ y_1^* + 2y_2^* = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y_1^* = 1 \\ y_2^* = 0 \end{array}$$

$$e_1^D{}^* = 3y_1^* + y_2^* - 2 \rightarrow e_1^D{}^* = 1$$

EJERCICIO:

Dado el siguiente problema con solución óptima $y^{*T} = (1,0)$

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Calcula la solución óptima del problema dual (incluidas las holguras y/o variables de exceso) aplicando el Teorema de las holguras complementarias.

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\quad 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \qquad\quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \qquad\quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \qquad\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0)$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0)$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ \quad y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^{*T} = (1,0) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1^* = 1 \\ y_2^* = 0 \\ e_1^{D*} = 1 \\ e_2^{D*} = 0 \\ e_3^{D*} = 0 \end{array}}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1{*} = 1$$
$$y_2{*} = 0$$
$$e_1^D{*} = 1$$
$$e_2^D{*} = 0$$
$$e_3^D{*} = 0$$

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$y_1{}^* = 1$	$h_1{}^* =$	0
$y_2{}^* = 0$	$h_2{}^* =$	0
$e_1^D{}^* = 1$	$x_1{}^* =$	0
$e_2^D{}^* = 0$	$x_2{}^* =$	0
$e_3^D{}^* = 0$	$x_3{}^* =$	0

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$y_1{}^* = 1$	$h_1{}^* = 0$	0
$y_2{}^* = 0$	$h_2{}^* =$	0
$e_1^D{}^* = 1$	$x_1{}^* = 0$	0
$e_2^D{}^* = 0$	$x_2{}^* =$	0
$e_3^D{}^* = 0$	$x_3{}^* =$	0

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$y_1^* = 1$	$h_1^* = 0$	0
$y_2^* = 0$	$h_2^* = ?$	0
$e_1^{D*} = 1$	$x_1^* = 0$	0
$e_2^{D*} = 0$	$x_2^* = ?$	0
$e_3^{D*} = 0$	$x_3^* = ?$	0

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$y_1{}^* = 1$	$h_1{}^* = 0$	0
$y_2{}^* = 0$	$h_2{}^* = ?$	0
$e_1^D{}^* = 1$	$x_1{}^* = 0$	0
$e_2^D{}^* = 0$	$x_2{}^* = ?$	0
$e_3^D{}^* = 0$	$x_3{}^* = ?$	0

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\cancelto{0}{3x_1} + x_2 + x_3 + \cancelto{0}{h_1} = 60$$

$$\cancelto{0}{x_1} - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10$$

EJERCICIO:

$$
\begin{cases}
\min\ 60y_1 + 10y_2 \\
s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\
\quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\
\quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\
\quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0
\end{cases}
$$

$y_1{}^* = 1$	$h_1{}^* = 0$	0
$y_2{}^* = 0$	$h_2{}^* = ?$	0
$e_1^D{}^* = 1$	$x_1{}^* = 0$	0
$e_2^D{}^* = 0$	$x_2{}^* = ?$	0
$e_3^D{}^* = 0$	$x_3{}^* = ?$	0

$$
\begin{cases}
\max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\
s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\
\quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\
\quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\cancelto{0}{3x_1} + x_2 + x_3 + \cancelto{0}{h_1} &= 60 \\
\cancelto{0}{x_1} - x_2 + 2x_3 + h_2 &= 10
\end{aligned}
$$

2 ecuaciones y 3 incógnitas → Infinitas soluciones

EJERCICIO:

$$\begin{cases} \min\ 60y_1 + 10y_2 \\ s.a:\ 3y_1 + y_2 - e_1 = 2 \\ \quad y_1 - y_2 - e_2 = 1 \\ \quad y_1 + 2y_2 - e_3 = 1 \\ \quad y_1, y_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solución degenerada

$\boxed{y_1^* = 1}$	$h_1^* = 0$	0
$\boxed{y_2^* = 0}$	$h_2^* = ?$	0
$\boxed{e_1^{D*} = 1}$	$x_1^* = 0$	0
$\boxed{e_2^{D*} = 0}$	$x_2^* = ?$	0
$\boxed{e_3^{D*} = 0}$	$x_3^* = ?$	0

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a:\ 3x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 60 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10 \\ \quad x_1, x_2, x_3, h_1, h_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$3\cancelto{0}{x_1} + x_2 + x_3 + \cancelto{0}{h_1} = 60$$

$$\cancelto{0}{x_1} - x_2 + 2x_3 + h_2 = 10$$

2 ecuaciones y 3 incógnitas → Infinitas soluciones

SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES DUALES

Cuando la solución óptima de un problema es no degenerada, el valor de la variable dual óptima y_i* coincide con la variación experimentada por el valor del problema cuando el coeficiente b_i se incrementa en una unidad.

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}\right\}$$

$$x_B^* = (x_1, x_2, h_2) = (1, 3, 4) > (0, 0, 0)$$

$$z^* = 18$$

$$\boxed{\text{En el dual: } y_1^* = 1.8}$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}\right\}$$

$$z^* = 19.8$$

$$\boxed{\text{Variación de } z^* = 19.8 - 18 = 1.8 = y_1^*}$$

SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES DUALES

En general, y dentro de ciertos límites de variación para b_i , podemos afirmar que cuando la solución óptima de un problema es no degenerada, la variación experimentada por el valor del problema cuando el coeficiente b_i se incrementa en la cantidad Δb_i es $y_i^* \times \Delta b_i$.

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}\right\}$$

$z^* = 30.6$

$\boxed{\text{Variación de } z^* = 30.6 - 18 = 12.6}$

$$z^* = 18 + 1.8(10-3) = 18 + 1.8 \times 7 =$$
$$18 + 12.6 = 30.6$$

$$\left.\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0.5 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}\right\}$$

$z^* = 13.5$

$\boxed{\text{Variación de } z^* = 13.5 - 18 = -4.5}$

$$z^* = 18 + 1.8(0.5-3) = 18 + 1.8 \times (-2.5) =$$
$$18 - 4.5 = 13.5$$

INTERPRETACIÓN DE LAS VARIABLES DUALES

Dada la información que proporcionan las variables duales óptimas acerca de la variación experimentada en el valor óptimo de un problema cuando variamos el término independiente de la restricción asociada, dichas variables suelen recibir el nombre de **precios sombra** o **precios duales** o **costes de oportunidad**.

Las variables duales nos permiten determinar bien el **precio que estamos dispuestos a pagar** por aumentar el conjunto factible variando en una unidad el correspondiente término independiente, o bien el **precio que estamos dispuestos a recibir** por disminuir el conjunto factible variando en una unidad el correspondiente término independiente.

Dualidad en programación lineal

En ausencia de degeneración se verifica lo siguiente:

- **Restricción tipo (≤):** Si aumentamos de b_i a b_i+1, el conjunto factible es mayor o igual que antes $\rightarrow$ El valor de la f.o. mejorará o permanecerá igual.

  El precio (dual) P_i que estamos dispuestos a pagar por dicha mejora es mayor o igual que cero. Por tanto:

$$\begin{cases} \text{Problema de maximización: } P_i := y_i^* \\ \text{Problema de minimización: } P_i := -y_i^* \end{cases}$$

- **Restricción tipo (≥):** Si aumentamos de b_i a b_i+1, el conjunto factible es menor o igual que antes $\rightarrow$ El valor de la f.o. empeorará o permanecerá igual.

  El precio (dual) P_i que estamos dispuestos a pagar por empeorar es menor o igual que cero. Por tanto:

$$\begin{cases} \text{Problema de maximización: } P_i := y_i^* \\ \text{Problema de minimización: } P_i := -y_i^* \end{cases}$$

EJEMPLO: La producción de PET (cont.)

¿Cuánto aumentaría el beneficio de la pequeña empresa petroquímica si se incrementaran sus recursos de PTA y EtG en una unidad, respectivamente?

$$
\text{PTA:}\quad \begin{array}{lll} Max & 60x_1 + 50x_2 & \\ s.a: & 0.966x_1 + 0.912x_2 & \leq 260001 \\ & 0.365x_1 + 0.344x_2 & \leq 150000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} z^* = 16149068.32 \\ z_1^* = 16149130.43 \\ z_1^* - z^* = 62.11 \end{array}
$$

$$
\text{EtG:}\quad \begin{array}{lll} Max & 60x_1 + 50x_2 & \\ s.a: & 0.966x_1 + 0.912x_2 & \leq 260000 \\ & 0.365x_1 + 0.344x_2 & \leq 150001 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} z^* = 16149068.32 \\ z_1^* = 16149068.32 \\ z_1^* - z^* = 0 \end{array}
$$

Le interesaría comprar 1 Tm adicional de PTA si su coste fuera no superior a 62.11 €, mientras que no le interesaría comprar más EtG.

EJEMPLO: La producción de PET (cont.)

¿Qué precio de compra de PTA y EtG debe ofrecer la compañía grande a la pequeña de manera que no sólo esa compra le salga lo más barata posible, sino que a la pequeña le interese vender?

$$\begin{array}{lll} Min & 260000y_1 + 150000y_2 & \\ s.a: & 0.966y_1 + 0.365y_2 & \geq 60 \\ & 0.912y_1 + 0.344y_2 & \geq 50 \\ & y_1, y_2 \geq 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} y_1^* = 62.111801 \\ y_2^* = 0 \\ z^* = 16149068.32 \end{array}$$

Debe ofrecer un precio de 62.11 € por cada Tm de PTA y 0 € por cada Tm de EtG.

Se cumple que el **precio al que venderían un recurso** (significado de la variable correspondiente en el problema dual) **coincide con el precio de compra de dicho recurso** (lo analizado en la transparencia anterior e interpretación habitual de variable dual como *coste de oportunidad*).

EJEMPLO:

Una empresa manufactura dos productos A y B en dos factorías F1 y F2. El coste de fabricación, así como el tiempo necesario para obtener un kilogramo de cada producto aparecen en la siguiente tabla (coste en euros, tiempo en horas):

	F1		F2	
	A	B	A	B
Coste unitario	4.1	4	4.5	5.2
Tiempo de producción	0. 2	0.24	0.3	0.25

A cambio de cierto canon, la empresa debe proporcionar a cierto cliente semanalmente al menos 1500 kg de A y 2000 kg de B. Para ello, dispone de 450 horas de trabajo semanales en F1 y de 500 horas en F2. ¿Cuál es la planificación de la producción que minimiza el coste de producción ?

EJEMPLO:

Si definimos las variables:

x_{1A} = Kg fabricados en F1 de A $\quad$ x_{2A} = Kg fabricados en F2 de A

x_{1B} = Kg fabricados en F1 de B $\quad$ x_{2B} = Kg fabricados en F2 de B

$$
\begin{array}{ll}
\min & 4.1x_{1A} + 4x_{1B} + 4.5x_{2A} + 5.2x_{2B} \\
s.a: & x_{1A} + x_{2A} \geq 1500 \\
 & x_{1B} + x_{2B} \geq 2000 \\
 & 0.2x_{1A} + 0.24x_{1B} \leq 450 \\
 & 0.3x_{2A} + 0.25x_{2B} \leq 500 \\
 & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0
\end{array}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
x_{1A}^* = 0 & e_1^* = 0 \\
x_{1B}^* = 1875 & e_2^* = 0 \\
x_{2A}^* = 1500 & h_3^* = 0 \\
x_{2B}^* = 125 & h_4^* = 18.75 \\
z^* = 14900 &
\end{array}
}
$$

EJEMPLO:

- ¿Merecería la pena aumentar las horas de trabajo en alguna factoría?

- El cliente necesita semanalmente 10 Kg adicionales de B. ¿Qué acuerdo debería proponer a la empresa para que esta aceptara fabricarlos?

EJEMPLO:

$$\begin{array}{ll}
\min & 4.1x_{1A}+4x_{1B}+4.5x_{2A}+5.2x_{2B} \\
s.a: & x_{1A}+x_{2A}\geq 1500 \\
& x_{1B}+x_{2B}\geq 2000 \\
& 0.2x_{1A}+0.24x_{1B}\leq 450 \\
& 0.3x_{2A}+0.25x_{2B}\leq 500 \\
& x_{1A},x_{1B},x_{2A},x_{2B}\geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_{1A}*=0 & e_1*=0 \\
x_{1B}*=1875 & e_2*=0 \\
x_{2A}*=1500 & h_3*=0 \\
x_{2B}*=125 & \boxed{h_4*=18.75} \\
z*=14900 &
\end{array}$$

nº restricciones = 4
||
nº variables positivas =4

Solución no degenerada

Pueden interpretarse las variables duales

EJEMPLO:

- ¿Merecería la pena aumentar las horas de trabajo en alguna factoría?

$$
\begin{array}{ll}
\min & 4.1x_{1A} + 4x_{1B} + 4.5x_{2A} + 5.2x_{2B} \\
s.a: & x_{1A} + x_{2A} \geq 1500 \\
 & x_{1B} + x_{2B} \geq 2000 \\
\text{F1} \rightarrow & 0.2x_{1A} + 0.24x_{1B} \leq 450 \\
\text{F2} \rightarrow & 0.3x_{2A} + 0.25x_{2B} \leq 500 \\
 & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
y_1^* = 4.5 \\
y_2^* = 5.2 \\
y_3^* = -5 \\
y_4^* = 0
\end{array}}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\text{F1 aumenta 1 hora } \rightarrow z^* = 14900 + (-5) \times 1 = 14895 \\
\text{F2 aumenta 1 hora } \rightarrow z^* = 14900 + 0 \times 1 = 14900
\end{array}}
$$

Solo tendría sentido aumentarlas en la Factoría 1

EJEMPLO:

- El cliente necesita semanalmente 10 Kg adicionales de B. ¿Qué acuerdo debería proponer a la empresa para que esta aceptara fabricarlos?

$$
\begin{array}{ll}
\min & 4.1x_{1A} + 4x_{1B} + 4.5x_{2A} + 5.2x_{2B} \\
s.a: & x_{1A} + x_{2A} \geq 1500 \\
\text{B} \rightarrow & x_{1B} + x_{2B} \geq 2000 \\
 & 0.2x_{1A} + 0.24x_{1B} \leq 450 \\
 & 0.3x_{2A} + 0.25x_{2B} \leq 500 \\
 & x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0
\end{array}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l} y_1^* = 4.5 \\ y_2^* = 5.2 \\ y_3^* = -5 \\ y_4^* = 0 \end{array}}
$$

$$
\boxed{\Delta b_2 = 10 \rightarrow z^* = 14900 + 5.2 \times 10 = 14952}
$$

Pagarle al menos 52 euros adicionales

UNIVERSITAS Miguel Hernández

RANGO DE VALIDEZ DE LA INTERPRETACIÓN DE LAS VARIABLES DUALES

$$\left.\begin{array}{llcrcr}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}\right\}$$

$$x_B{}^* = (x_1, x_2, h_2) = (1, 3, 4) > (0, 0, 0)$$

$$z^* = 18$$

$$\boxed{y_1{}^* = 1.8}$$

$$\left.\begin{array}{llcrcr}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}\right\}$$

$$z^* = 31.5$$

$\Delta z^* = y_i^* \times \Delta b_i$
es válido solo para cierto rango de variación de b_i

$$\boxed{\text{Variación de } z^* = 31.5 - 18 = 13.5 \neq (30-3)1.8 = 48.6}$$

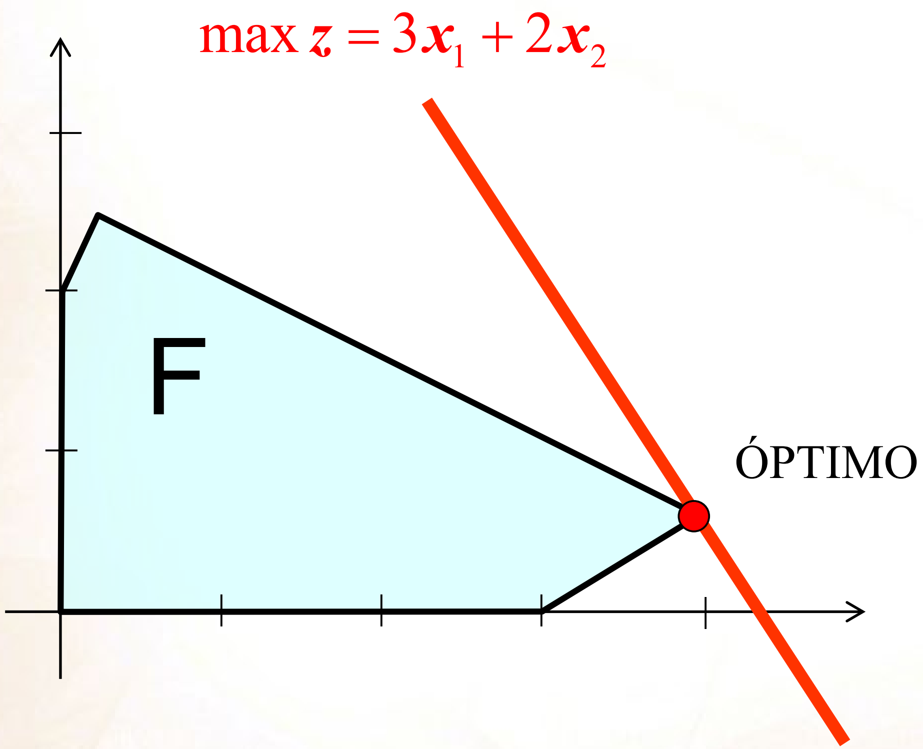
Análisis de sensibilidad

Con frecuencia, en la vida real, los modelos matemáticos contienen datos o informaciones que pueden variar, e incluso pueden tener coeficientes que no se conozcan con exactitud. Analizar cómo varía una solución óptima con las posibles variaciones en los datos es muy importante, puesto que nos ofrece información acerca de la estabilidad de la solución. Este tipo de análisis recibe el nombre de **análisis de sensibilidad**. Algunas de las cuestiones que se pueden plantear son:

- ¿Cómo varía la solución óptima del problema si cambian los coeficientes de la función objetivo?
- ¿Cómo varía la solución óptima del problema si cambian los valores de los términos independientes de las restricciones?
- ¿Cómo varía la solución óptima de un problema si se añaden nuevas restricciones al problema?
- ¿Cómo varía la solución óptima si se añade una nueva variable?
- ¿Cómo varía la solución óptima si cambia la tecnología, es decir, alguno de los coeficientes de las restricciones?

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

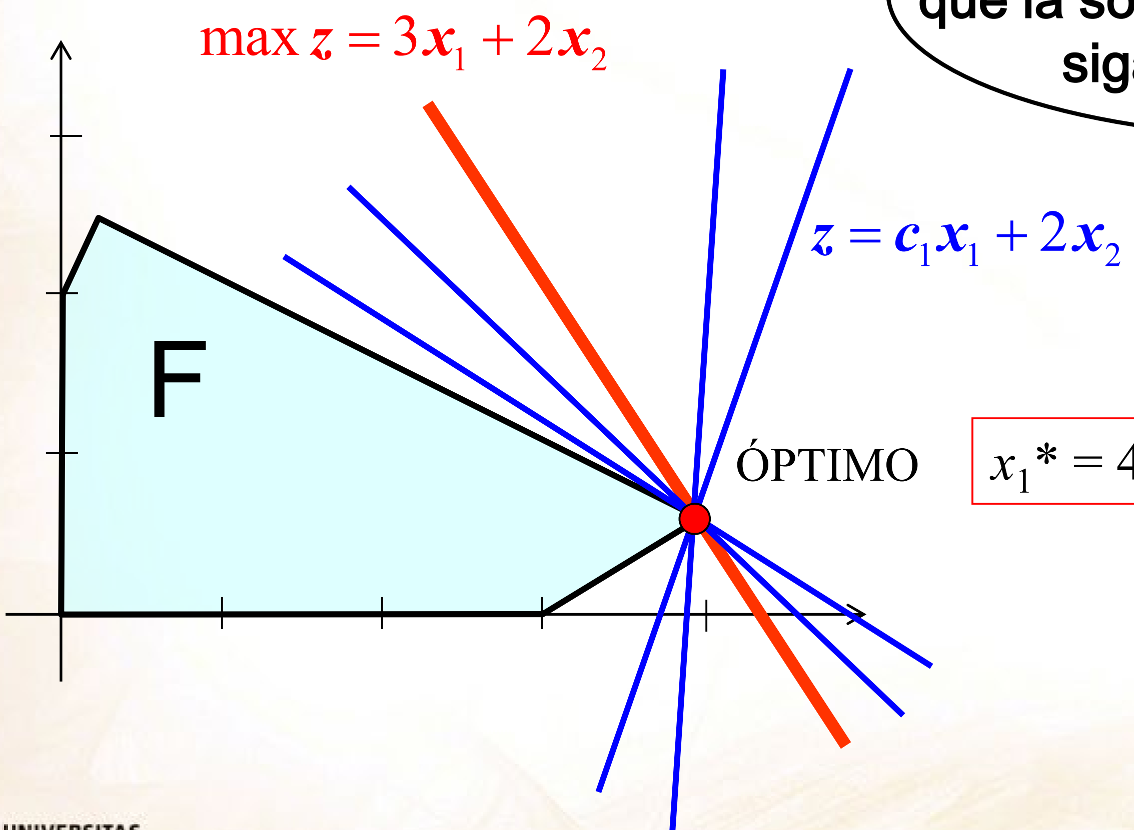
$$\max \quad 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{suj.a} : \quad -2x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$



$\boxed{x_1^* = 4, x_2^* = 0.5}$

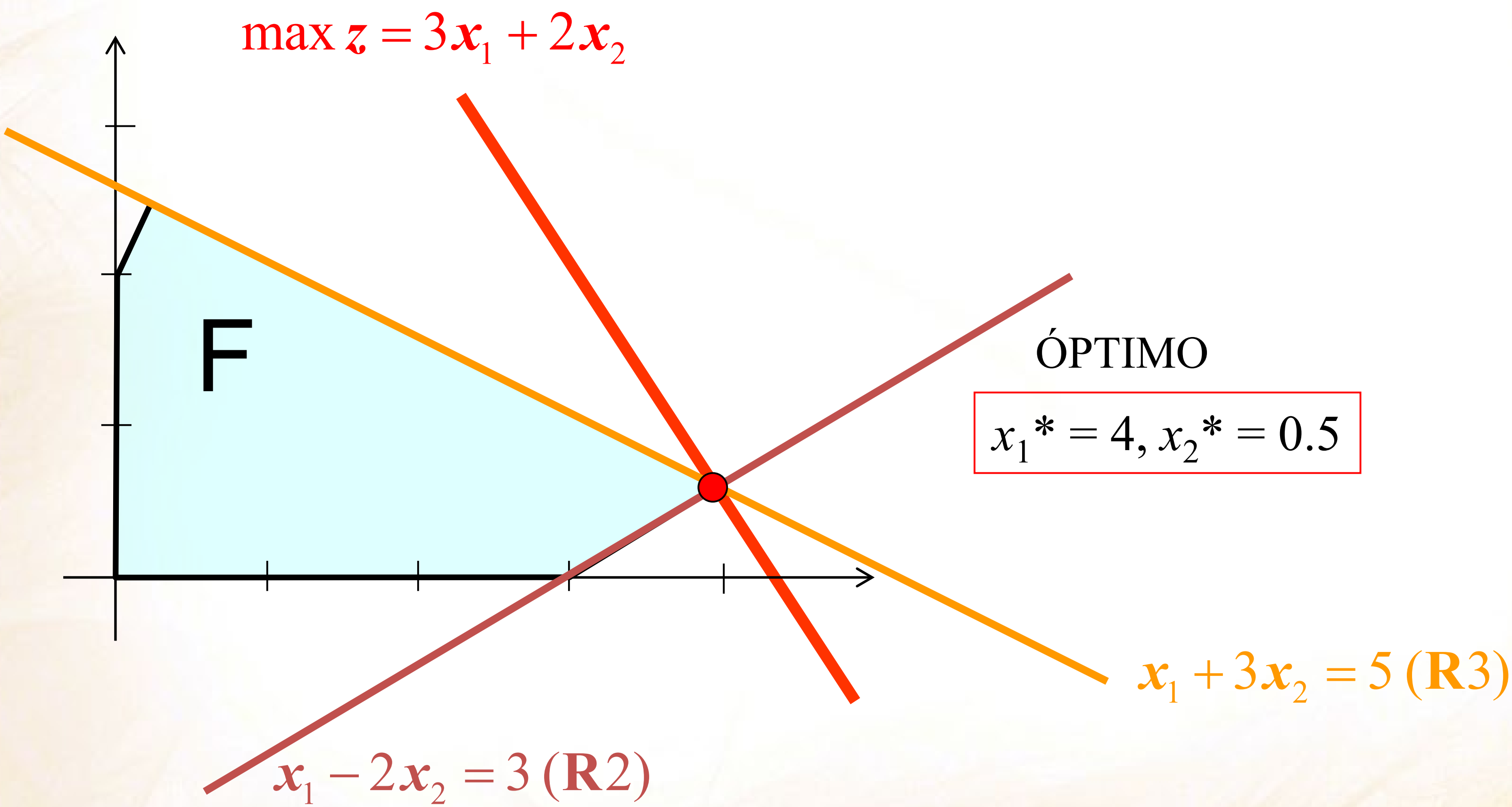
Análisis de sensibilidad de c_1

¿Cuánto puede variar c_1 para que la solución $x_1^* = 4$, $x_2^* = 0.5$ siga siendo óptima?



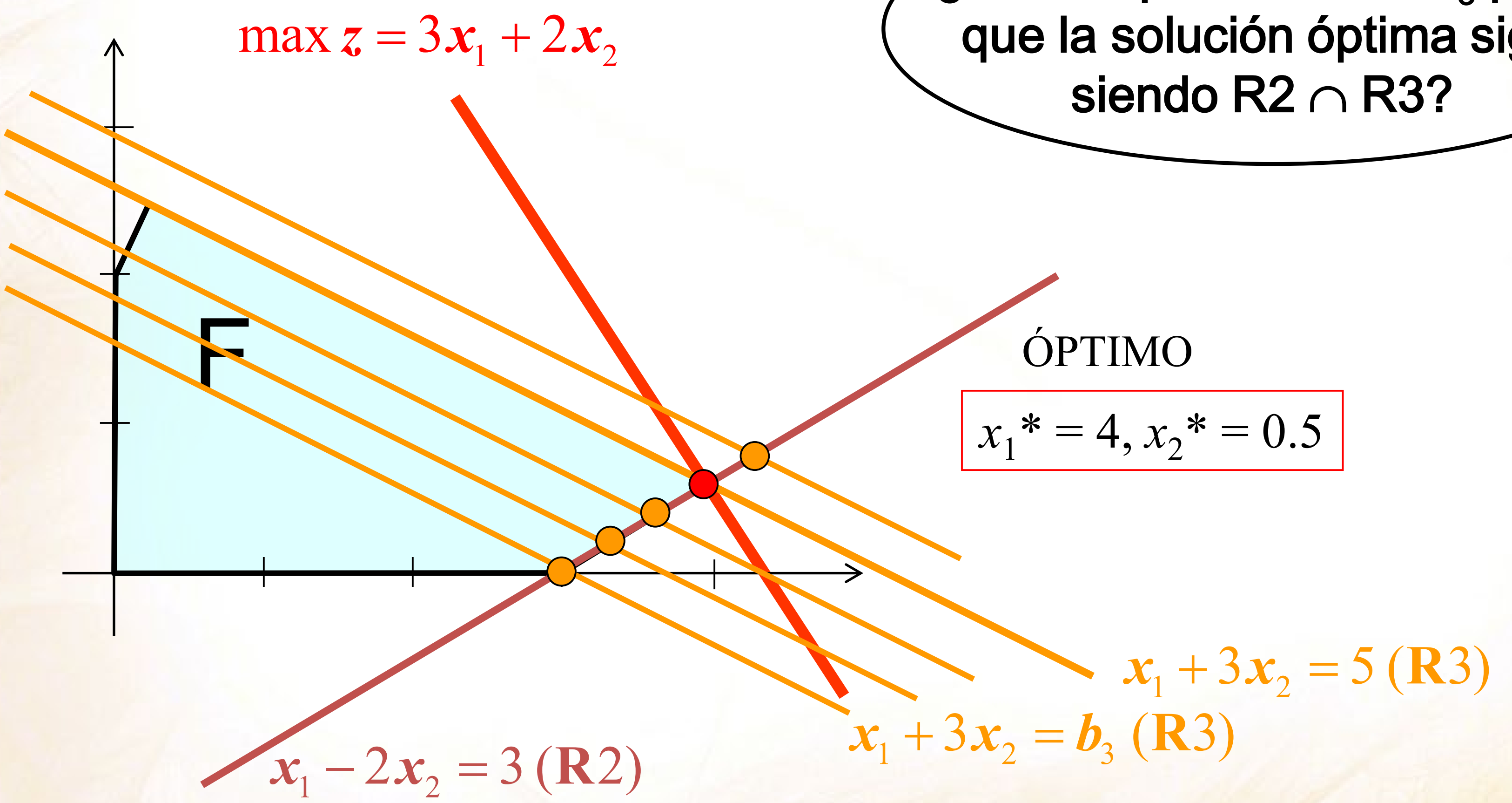
$x_1^* = 4,\ x_2^* = 0.5$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES



Análisis de sensibilidad de b_3

¿Cuánto puede variar b_3 para que la solución óptima siga siendo R2 $\cap$ R3?



Cualquier programa informático de PL incluye la respuesta a estas dos preguntas.

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{lll}
\max & & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & : & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
 & & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
 & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Análisis de sensibilidad

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$3	f.o.	0	13

$z^* = 13$

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$2	x1	0	4	Continuar
$C$2	x2	0	0,5	Continuar

$x_1^* = 4$
$x_2^* = 0.5$

Restricciones

Holgura/exceso

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	~~Demora~~
$D$5	R1)	-7,5	$D$5<=$F$5	No vinculante	9,5
$D$6	R2)	3	$D$6<=$F$6	Vinculante	0
$D$7	R3)	5	$D$7<=$F$7	Vinculante	0

$h_1^* = 9.5$
$h_2^* = h_2^* = 0$

Análisis de sensibilidad

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [Ejemplo.xls]Hoja1
Informe creado: 30/04/2013 16:48:04

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$2	x1	4	0	3	1E+30	2
$C$2	x2	0,5	0	2	4	8

Análisis de sensibilidad para c_1:

Siempre que c_1 aumente cualquier cantidad o disminuya como máximo 2 unidades:

- La solución óptima seguirá siendo $x_1{}^* = 4$, $x_2{}^* = 0.5$.
- El valor del problema será $z^* = (3 + \Delta c_1) \times 4 + 2 \times 0.5 = 13 + \Delta c_1 \times 4$

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [Ejemplo.xls]Hoja1
Informe creado: 30/04/2013 16:48:04

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$2	x1	4	0	3	1E+30	2
$C$2	x2	0,5	0	2	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$

Análisis de sensibilidad para c_2:

Siempre que c_2 aumente como máximo 4 unidades o disminuya como máximo 8 unidades:

- La solución óptima seguirá siendo $x_1^* = 4$, $x_2^* = 0.5$.
- El valor del problema será $z^* = 3\times 4 + (2+\Delta c_2)\times 0.5 = 13 + \Delta c_2 \times 0.5$

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
\$D\$6	R2)	3	1	3	2	7,6
\$D\$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

- **Variables duales:** $y_1^* = 0, \; y_2^* = 1 \; , \; y_3^* = 2.$

Análisis de sensibilidad

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
$D$6	R2)	3	1	3	2	7,6
$D$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

- **Variables duales:** $y_1{}^* = 0,\ y_2{}^* = 1\ ,\ y_3{}^* = 2.$

Interpretación en términos de precios sombra solo si la solución x es no degenerada*

Análisis de sensibilidad

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$3	f.o.	0	13

Base = $\{x_1, x_2, h_1\}$

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$2	x1	0	4	Continuar
$C$2	x2	0	0,5	Continuar

$x_1^* = 4$
$x_2^* = 0.5$

Restricciones

Holgura/exceso

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	~~Demora~~
$D$5	R1)	-7,5	$D$5<=$F$5	No vinculante	9,5
$D$6	R2)	3	$D$6<=$F$6	Vinculante	0
$D$7	R3)	5	$D$7<=$F$7	Vinculante	0

$h_1^* = 9.5$
$h_2^* = 0$
$h_3^* = 0$

Análisis de sensibilidad

Solución no degenerada

Pueden interpretarse las variables duales

nº restricciones = 3

||

nº variables positivas = 3

Base = {x_1, x_2, h_1}

$x_1^* = 4$
$x_2^* = 0.5$

$h_1^* = 9.5$
$h_2^* = 0$
$h_3^* = 0$

Análisis de sensibilidad

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
$D$6	R2)	3	1	3	2	7,6
$D$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

- **Variables duales:** $y_1^* = 0,\ y_2^* = 1\ ,\ y_3^* = 2$

Si el problema fuera de minimización $P_i = -y_i^*$

- **Precios duales o precios sombra**:

  Como el problema es de maximización: $P_1 = y_1^* = 0$

  $P_2 = y_2^* = 1$

  $P_3 = y_3^* = 2$

Análisis de sensibilidad

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
\$D\$6	R2)	3	1	3	2	7,6
\$D\$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

- **Variables duales:** $y_1^* = 0,\ y_2^* = 1\ ,\ y_3^* = 2.$

- **Precios duales o precios sombra**: Como el problema es de **maximización**:

$$P_1 = y_1^* = 0,\ P_2 = y_2^* = 1,\ P_3 = y_3^* = 2$$

- **No pagaríamos nada por aumentar el término b_1**
- **Estaríamos dispuestos a pagar 1 u.m. por aumentar 1 unidad el término b_2**
- **Estaríamos dispuestos a pagar 2 u.m. por aumentar 1 unidad el término b_3**

¿Cuál es la importancia del análisis de sensibilidad del coeficiente b_i?

En ausencia de degeneración, permite determinar el rango de variación del término b_i para el que la variación del valor óptimo del problema viene dado por la expresión:

$$\boxed{\Delta z^* = y_i^* \times \Delta b_i.}$$

↓

Podemos obtener el rango de validez para los precios sombra

Análisis de sensibilidad

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
$D$6	R2)	3	1	3	2	7,6
$D$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

Análisis de sensibilidad para b_1:

Siempre que b_1 aumente cualquier cantidad o disminuya como máximo 9.5 unidades:

- Las variables básicas seguirán siendo $\{x_1^*, x_2^*, h_1^*\}$. Por lo tanto:

$$\text{(PP)} \quad \boxed{h_2^* = h_3^* = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\boxed{y_1^* = 0,}\ y_2^* = 1,\ y_3^* = 2} \quad \text{(PD)}$$

- El valor del problema será $z^* = 13 + \Delta b_1 \times y_1^* = 13 + \Delta b_1 \times 0 = 13$

Análisis de sensibilidad

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
\$D\$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
\$D\$6	R2)	3	1	3	2	7,6
\$D\$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

Análisis de sensibilidad para b_2:

Siempre que b_2 aumente como máximo 2 unidades o disminuya como máximo 7.6 unidades:

- Las variables básicas seguirán siendo $\{x_1^*, x_2^*, h_1^*\}$. Por lo tanto:

$$\text{(PP)} \quad \boxed{h_2^* = h_3^* = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{y_1^* = 0, \boxed{y_2^* = 1,} \; y_3^* = 2} \quad \text{(PD)}$$

- El valor del problema será $z^* = 13 + \Delta b_2 \times y_2^* = 13 + \Delta b_2 \times 1$

¡¡¡Variable dual!!!

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	~~Sombra Precio~~	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$5	R1)	-7,5	0	2	1E+30	9,5
$D$6	R2)	3	1	3	2	7,6
$D$7	R3)	5	2	5	1E+30	2

Análisis de sensibilidad para b_3:

Siempre que b_3 aumente cualquier cantidad o disminuya como máximo 2 unidades:

- Las <u>variables básicas</u> seguirán siendo $\{x_1^*, x_2^*, h_1^*\}$. Por lo tanto:

$$\text{(PP)} \quad \boxed{h_2^* = h_3^* = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{y_1^* = 0,\; y_2^* = 1,\; \boxed{y_3^* = 2}} \text{(PD)}$$

- El valor del problema será

$$z^* = 13 + \Delta b_3 \times y_3^* = 13 + \Delta b_3 \times 2$$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$x_B{}^* = (x_1, x_2, h_2) = (1, 3, 4) > (0, 0, 0)$$

$$z^* = 18$$

Análisis de sensibilidad para b_1: $\Delta b_1 \in [-7.5, 7.5]$

$$y_1{}^* = 1.8$$

Siempre que b_1 aumente o disminuya a lo sumo 7.5 unidades, se verifica:

$$z^* = 18 + \Delta b_1 \times 1.8$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ s.a: & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 30 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$z^* = 31.5$$

Variación de z^* =

$$31.5 - 18 = 13.5 \neq (30-3)1.8 = 48.6$$

Si se añade **una nueva restricción** al problema, ¿cómo varía la solución óptima?

Para comprobar si la solución óptima varía o no, lo que se hace es comprobar si la solución actual satisface la nueva restricción. Si la cumple, la solución no varía. Si no la cumple, la solución variará y será necesario calcular la nueva solución con la nueva restricción.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.a} \ : \quad & -2x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{z^* = 13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1^* &= 4 \\ x_2^* &= 0.5 \end{aligned}}$$

Si se añade la restricción $\mathbf{2x_1 - 3x_2 \le 4}$ al problema, ¿cómo varía la solución óptima?

$$2 \times 4 - 3 \times 0.5 = 6.5 > 4 \quad \rightarrow \quad x^* \text{ no satisface la resticción}$$

$$\downarrow$$

No sabemos cúal sería la nueva solución óptima

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.a}: \quad & -2x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{z^* = 13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1^* &= 4 \\ x_2^* &= 0.5 \end{aligned}}$$

Si se añade la restricción $\mathbf{2x_1 - 3x_2 \le 8}$ al problema, ¿cómo varía la solución óptima?

$$2 \times 4 - 3 \times 0.5 = 6.5 \le 8 \quad \rightarrow \quad x^* \text{ sí satisface la resticción}$$

$$\downarrow$$

x^*=(4, 0.5) seguiría siendo la solución óptima

El caso de la planta termoeléctrica: Análisis de sensibilidad

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } 24\,x_1 + 20\,x_2 \\
&\text{s.a:}\quad 0.5\,x_1 + x_2 \leq 12 \text{ (humo)} \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 20 \text{ (carga)} \\
&\qquad 1.5\,x_1 + x_2 \leq 24 \text{ (pulverizador)} \\
&\qquad 1200\,x_1 - 800\,x_2 \geq 0 \text{ (azufre)} \\
&\qquad x_1\,,\, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Determina, si es posible, cuál sería la producción máxima de electricidad de la planta y con cuánto carbón de cada clase se obtendría en las siguientes situaciones:

- El límite de emisión de partículas pudiera aumentarse hasta 13.5 Kg/h. ¿Y si el límite se redujera 2 Kg/h?
- Si cierta mejora del proceso permitiera incrementar el vapor producido por A hasta 26000 (lb/ton). Lo mismo si, por ciertos problemas, el de B se redujera hasta 15000 (lb/ton).

UNIVERSITAS Miguel Hernández

El caso de la planta termoeléctrica: Análisis de sensibilidad

Si cada 1000lb de vapor producido genera un beneficio de 100 u.m:

- ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el gerente de la planta termoeléctrica por incrementar la capacidad de la carga en 0.5 ton/h?
- Si en el mercado de emisiones le vendieran 1 Kg de partículas a 500 u.m., ¿le interesaría comprar algo? En caso afirmativo, determina cuántos Kg de emisión de partículas compraría y cuál sería el resultado económico de dicha operación.

El caso de la planta termoeléctrica: Análisis de sensibilidad

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$3		0	408

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$2	x1	0	12	Continuar
$C$2	x2	0	6	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$D$5	Humo)	12	$D$5<=$F$5	Vinculante	0
$D$6	Carga)	18	$D$6<=$F$6	No vinculante	2
$D$7	Pulver.)	24	$D$7<=$F$7	Vinculante	0
$D$8	Azufre)	9600	$D$8>=$F$8	No Vinculante	9600

UNIVERSITAS Miguel Hernández

El caso de la planta termoeléctrica: Análisis de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$2	x1	12	0	24	6	14
$C$2	x2	6	0	20	28	4

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$5	Humo)	12	6	12	4	4
$D$6	Carga)	18	0	20	1E+30	2
$D$7	Pulver.)	24	14	24	4	6
$D$8	Azufre)	9600	0	0	9600	1E+30

UNIVERSITAS Miguel Hernández