

Transformada de Laplace

Permite transformar Ecuaciones Diferenciales en Fracciones de Polinomios

Simplifica la parte matemática del análisis de sistemas

Sea $f(t)$ una función tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{donde } s = \sigma + j\omega$$

Existencia: $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

2007

© 2007

Transformada de Laplace

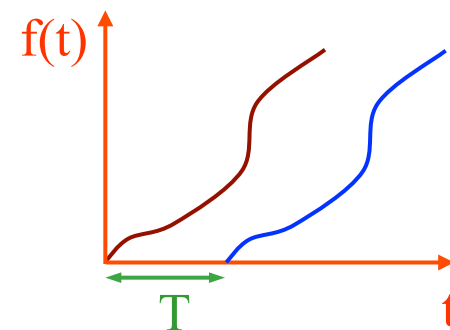
Propiedades

Linealidad:

$$\mathcal{L}[k \cdot f(t)] = k \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

Variación en el tiempo: $\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-sT} F(s)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transformada de Laplace

Propiedades

Diferenciación:
$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$$

Ejemplos:

$n = 1$ \Rightarrow
$$\mathcal{L} \left[\frac{d f(t)}{dt} \right] = sF(s) - \overbrace{f(0^+)}^{k=1}$$

$n = 2$ \Rightarrow
$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - \overbrace{(s \cdot f(0^+))}^{k=1} + \overbrace{\dot{f}(0^+)}^{k=2}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\mathcal{L} \left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \right]$

Transformada de Laplace (función de transferencia)

- Relación entre la transformada de Laplace de la variable salida y la transformada de Laplace de la variable entrada.
- Es la transformada de Laplace de la respuesta de un sistema ante un impulso.
- Se puede determinar por tanto de la ecuación diferencial.
- Condiciones:
 - Condiciones iniciales nulas
 - Sistemas lineales e invariantes en el tiempo
 - **Depende únicamente de las propiedades físicas del sistema (no de la entrada)**

Cartagena99

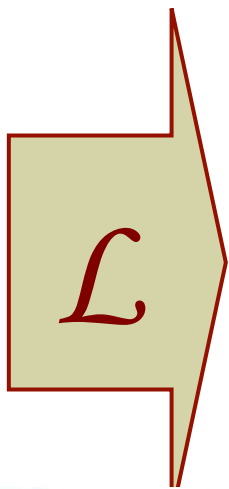
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformada de Laplace

Aplicación:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t)$$



$$\begin{aligned} a_0 s^n Y(s) - a_0 [s^{n-1} y(0^+) + s^{n-2} \dot{y}(0^+) + s^{n-3} \ddot{y}(0^+) + \dots] + \\ a_1 s^{n-1} Y(s) - a_1 [s^{n-2} y(0^+) + s^{n-3} \dot{y}(0^+) + s^{n-4} \ddot{y}(0^+) + \dots] + \\ a_2 s^{n-2} Y(s) - a_2 [s^{n-3} y(0^+) + s^{n-4} \dot{y}(0^+) + s^{n-5} \ddot{y}(0^+) + \dots] + \\ \vdots - \vdots \\ a_{n-1} s Y(s) - a_{n-1} s y(0^+) + \end{aligned}$$

$$a_n Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{(s^2 + \dots)} U(s)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

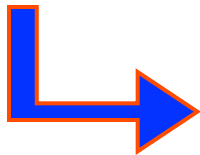
$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Transformada de Laplace

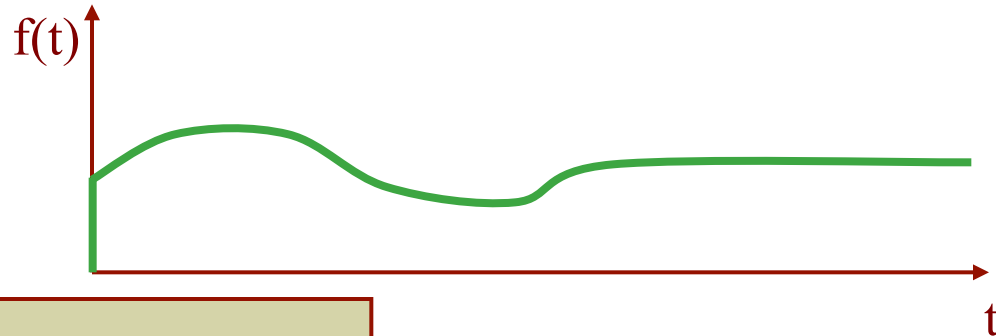
Propiedades

Teorema del valor inicial:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$



$f(t)$ debe ser continua o discontinua de tipo escalón en el origen



Teorema del valor final:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

negativa y no más de una raíz en el origen

Transformada de Laplace

Tabla reducida de Transformadas

$$d(t) \longleftrightarrow 1$$

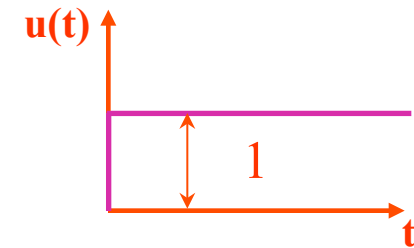
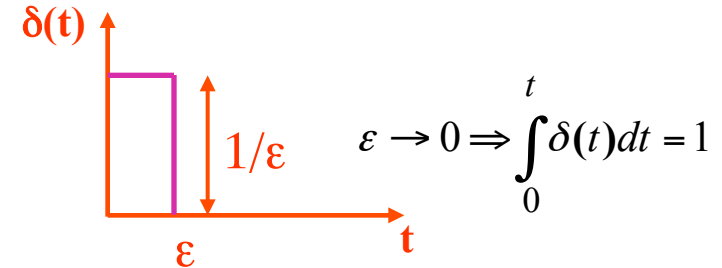
$$u(t) \longleftrightarrow 1/s$$

$$r(t) = t \cdot u(t) \longleftrightarrow 1/s^2$$

$$t^n \cdot u(t) \longleftrightarrow n!/s^{n+1}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\frac{1}{\omega} e^{-at} \text{sen}(\omega t) \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$$



$r(t)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$f(t-T) \cdot u(t-T) \longleftrightarrow F(s) e^{-sT}$$

Transformada de Laplace

Cálculo de antitransformadas

Se usan las tablas de transformadas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_1}{s + s_1} + \frac{A_2}{s + s_2} + \dots + \frac{A_n}{s + s_n} + \quad \Rightarrow \text{Polos reales simples}$$

$$+ \frac{a_1}{s + s_i} + \frac{a_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{a_r}{(s + s_i)^r} + \quad \Rightarrow \text{Polos reales de multiplicidad } r$$

$$+ \frac{b_1 + c_1 s}{s^2 + \dots + 1} + \frac{b_2 + c_2 s}{s^2 + \dots + 1} + \dots + \frac{b_m + c_m s}{s^2 + \dots + 1}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Polos complejos conjugados

Transformada de Laplace

Ejemplo

a) Calcular la f.d.t. del sistema que tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = 6 \frac{du(t)}{dt} + 12u(t)$$

b) Calcular su respuesta temporal si la entrada es un escalón unitario y las condiciones iniciales son:

$$y(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Transformada de Laplace

a) Aplicando la transformada de Laplace queda:

$$\underbrace{s^2.Y(s) - [s.y(0) + \dot{y}(0)]}_{\mathcal{L}[d^2y/dt^2]} + 7 \underbrace{[s.Y(s) - y(0)]}_{\mathcal{L}[dy/dt]} + \underbrace{12.Y(s)}_{\mathcal{L}[y(t)]} = \underbrace{6s.U(s)}_{\mathcal{L}[du/dt]} + \underbrace{12.U(s)}_{\mathcal{L}[u(t)]} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(s) [s^2 + 7s + 12] = U(s) [6s + 12] + [(s + 7).y(0) + \dot{y}(0)] \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{6s + 12}{s^2 + 7s + 12} U(s) + \frac{(s + 7).y(0) + \dot{y}(0)}{s^2 + 7s + 12}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformada de Laplace

b) Aplicando la antitransformada de Laplace queda:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{6s+12}{s^2+7s+12}}_{(s+3)(s+4)} U(s) + \frac{(s+7)y(0) + \dot{y}(0)}{s^2+7s+12} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s} + \frac{\hat{A}}{s+3} + \frac{\hat{B}}{s+4}$$

$$A = \frac{6s+12}{(s+4)s} \Big|_{s=-3} = 2; \quad B = \frac{6s+12}{(s+3)s} \Big|_{s=-4} = -3; \quad C = \frac{6s+12}{(s+3)(s+4)} \Big|_{s=0} = 1;$$

$$\hat{A} = \frac{s+8}{s+4} \Big|_{s=-3} = 5; \quad \hat{B} = \frac{s+8}{s+3} \Big|_{s=-4} = -4$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s} + \frac{5}{s+3} - \frac{4}{s+4} = \frac{1}{s} + \frac{7}{s+3} - \frac{7}{s+4}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transformada de Laplace

c) Calcular su los valores inicial y final de la respuesta

Se puede resolver de dos maneras:

Primera manera (en el dominio de Laplace) \rightarrow Polos: 0, -4 y -3

Teorema del valor inicial: $y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{6s+12}{s^2+7s+12} \frac{1}{s} + \frac{s+8}{s^2+7s+12} \right] = 1$

Teorema del valor final: $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{6s+12}{s^2+7s+12} \frac{1}{s} + \frac{s+8}{s^2+7s+12} \right] = 1$

Segunda manera (en el dominio del tiempo)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$t \rightarrow \infty \Rightarrow y(\infty) = 1$

Cartagena99

Modelado de sistemas

Representar mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales el comportamiento dinámico de un sistema

Permite someter a diferentes análisis las respuestas de los sistemas ante diversas señales de excitación

Permite diseñar dispositivos (reguladores, filtros, ...) para actuar sobre ellos

Tipos de sistemas:

➤ Lineales o no lineales




Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Modelado de sistemas

Modelado Eléctrico: Leyes de Kirchoff

Componente	Tensión - Intensidad	Intensidad - Tensión	Tensión - Carga	Impedancia V(s)/I(s)
Condensador 	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
Resistencia 	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	R
Inductancia 	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$	$v(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$	$\frac{sL}{1 + s^2L^2C}$

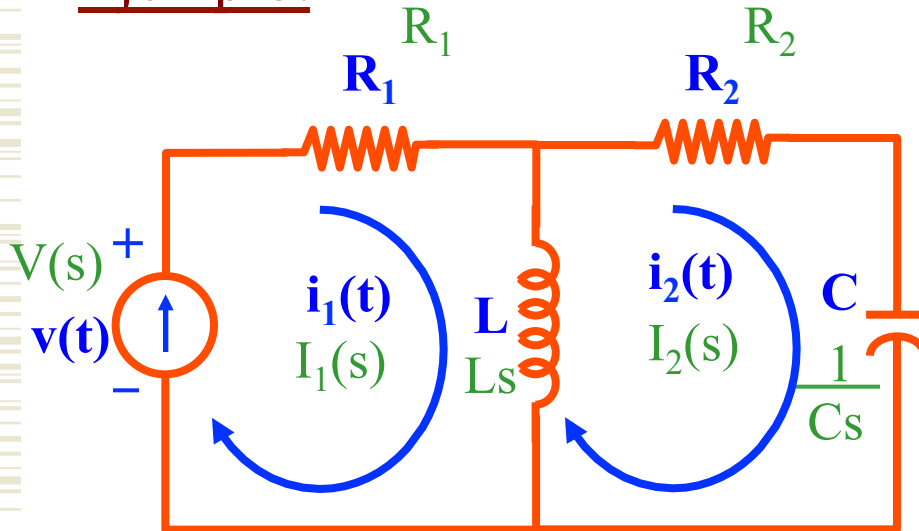
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$R_1 \cdot I_1(s) + L \cdot s \cdot I_1(s) - L \cdot s \cdot I_2(s) = V(s)$$

- ### Análisis de las mallas
- 1) Sustituir el valor de los elementos pasivos por sus impedancias
 - 2) Asignar el mismo sentido a la corriente en cada una de las mallas
 - 3) Transformar mediante Laplace todas las variables temporales
 - 4) Aplicar las Leyes de Kirchoff a cada malla
 - 5) Resolver el sistema de ecuaciones resultante y obtener la f.d.t.

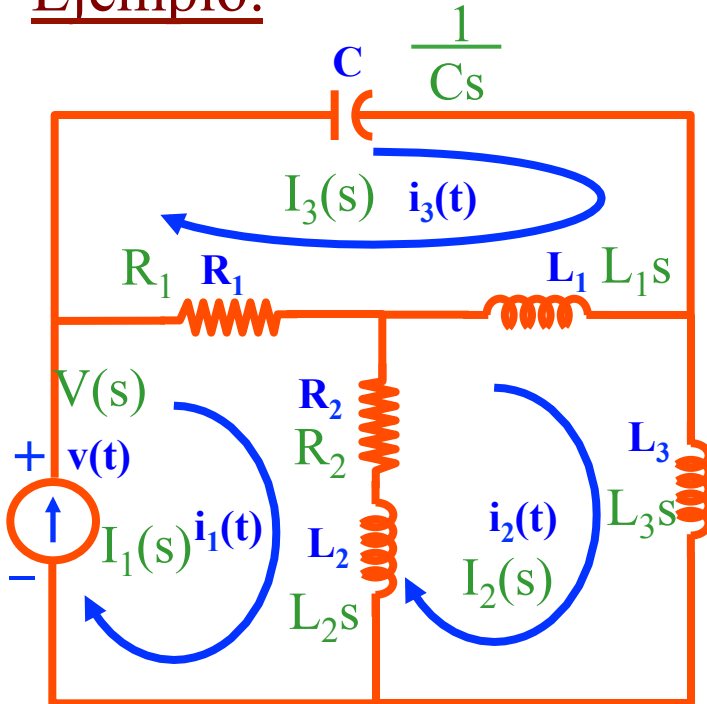
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\begin{aligned} & \sum \text{Imped}_1 \cdot I_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} \cdot I_2(s) - \sum \text{Imped}_{1-3} \cdot I_3(s) = \\ & = \sum \text{Tensiones}_1 \\ & - \sum \text{Imped}_{2-1} \cdot I_1(s) + \sum \text{Imped}_2 \cdot I_2(s) - \sum \text{Imped}_{2-3} \cdot I_3(s) = \\ & = \sum \text{Tensiones}_2 \\ & - \sum \text{Imped}_{3-1} \cdot I_1(s) - \sum \text{Imped}_{3-2} \cdot I_2(s) + \sum \text{Imped}_3 \cdot I_3(s) = \\ & = \sum \text{Tensiones}_3 \end{aligned}$$

Cartagena99

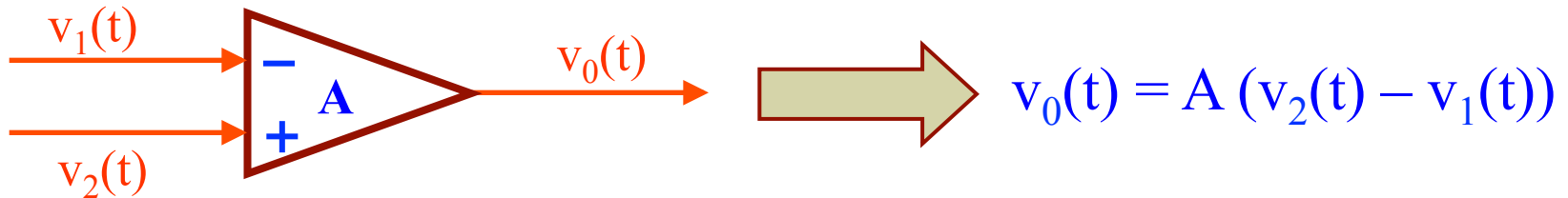
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

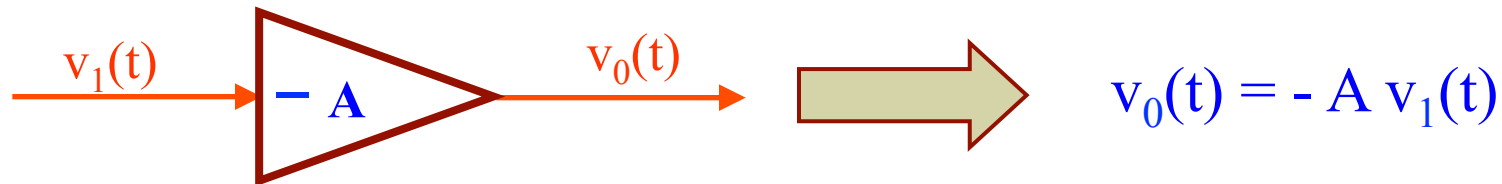
$$-R_1 \cdot I_1(s) - L_1 \cdot s \cdot I_2(s) + \left(R_1 + L_1 \cdot s + \frac{1}{Cs} \right) \cdot I_3(s) = 0$$

Modelado de sistemas

Amplificador operacional



Amplificador operacional inverso



Potenciómetro

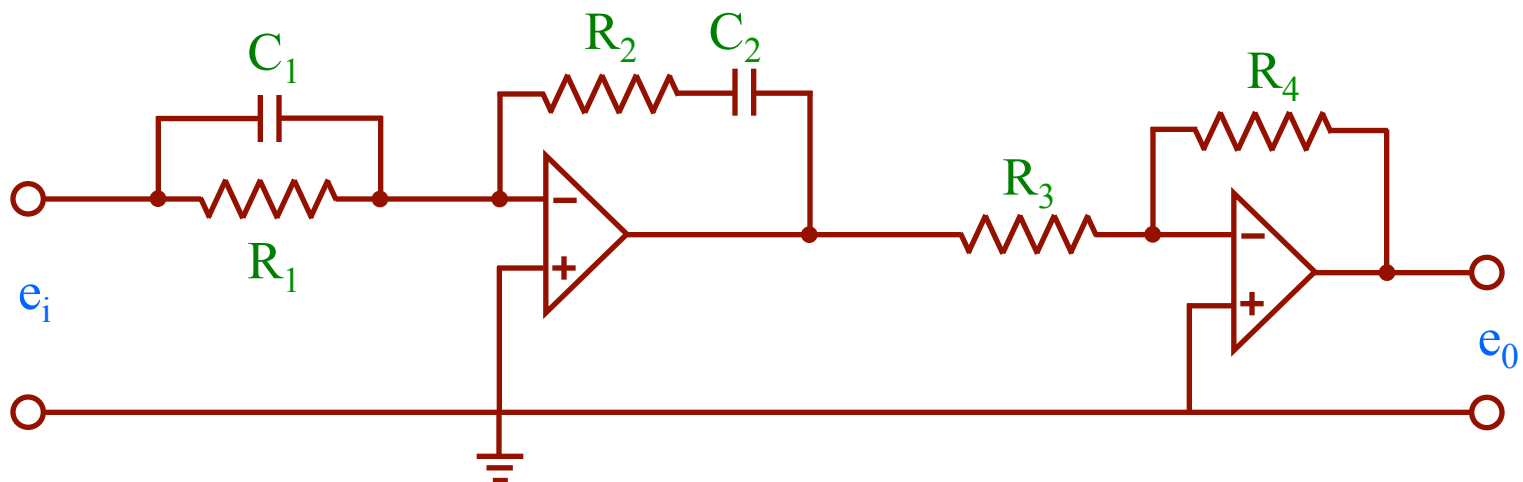
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Modelado de sistemas

Controlador PID (ideal)



Cartagena99

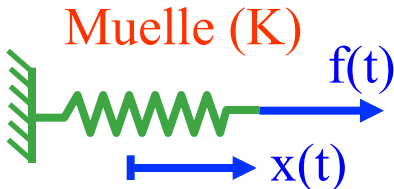
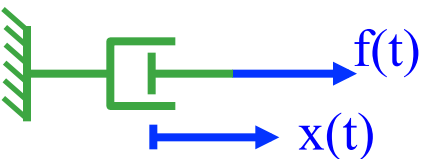
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

P I D

Modelado de sistemas

Modelado Mecánico: (Traslacional)

Componente	Fuerza - Velocidad	Fuerza - Desplazamiento	Impedancia F(s)/X(s)	
 <p>Muelle (K)</p>	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = K \cdot x(t)$	K	<p>f(t): Newtons</p> <p>x(t): Metros</p>
 <p>Amortiguamiento (D)</p>	$f(t) = D \cdot v(t)$	$f(t) = D \frac{dx(t)}{dt}$	$D \cdot s$	<p>v(t): m/s</p> <p>D: N.s/m</p>

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

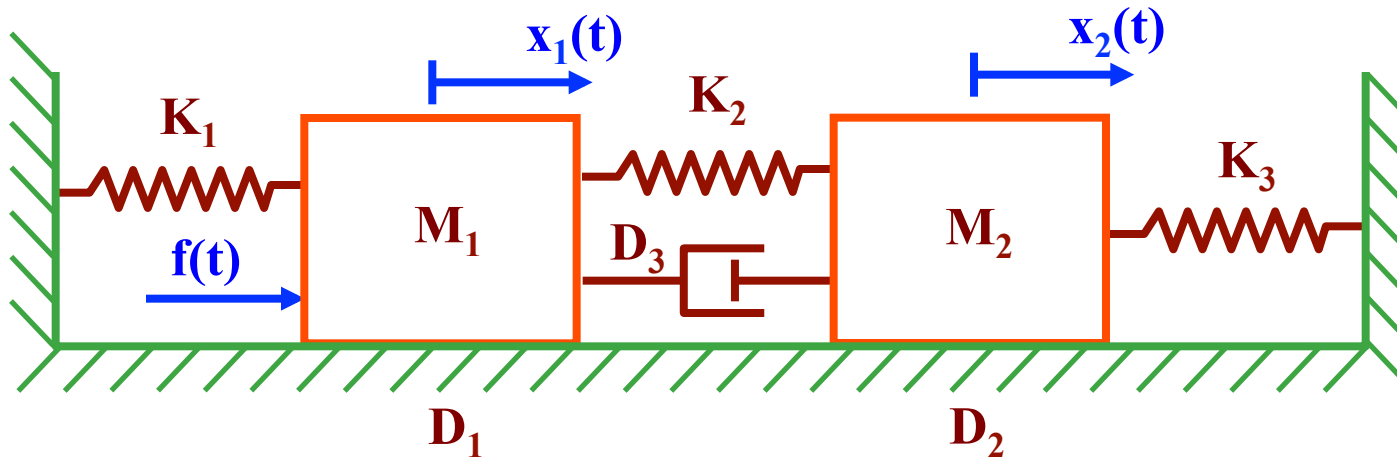
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

x(t)

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\sum \text{Imped}_1 \cdot X_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} \cdot X_2(s) = \sum \text{Fuerzas}_1$$

$$- \sum \text{Imped}_{2-1} \cdot X_1(s) + \sum \text{Imped}_2 \cdot X_2(s) = \sum \text{Fuerzas}_2$$

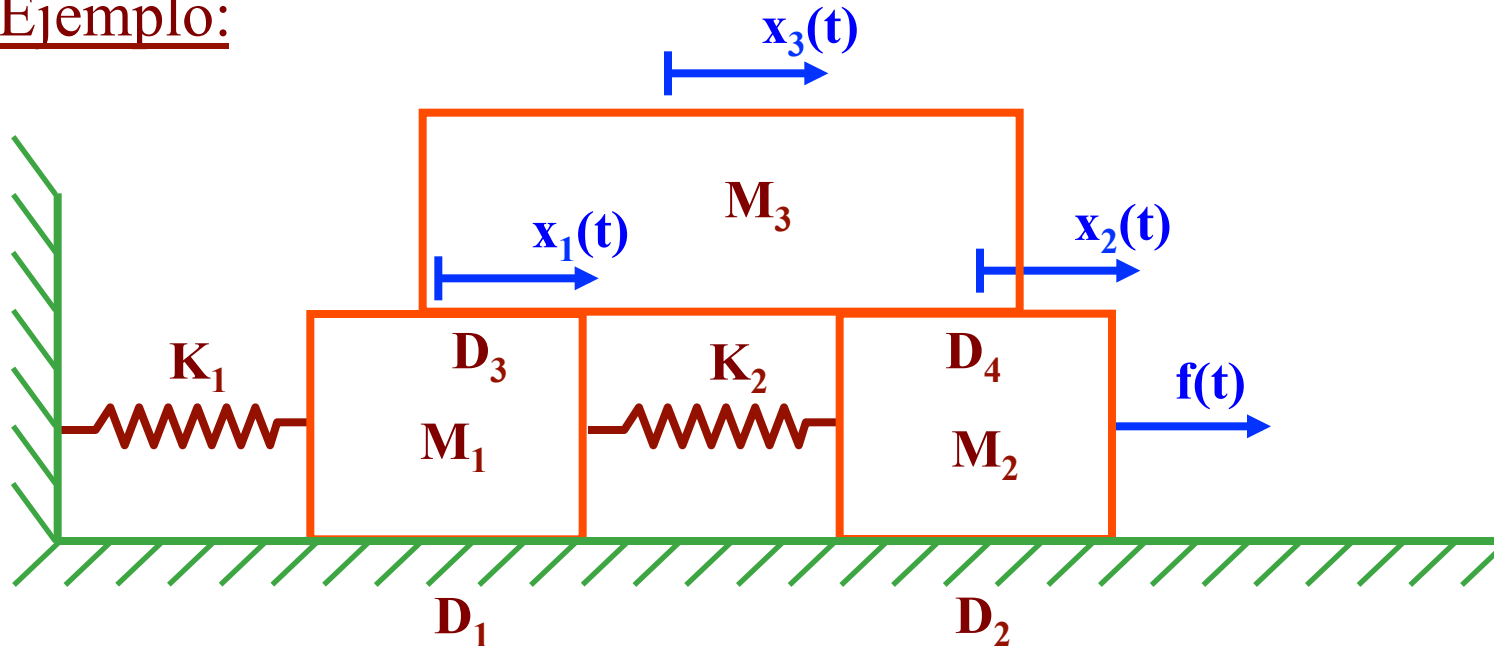
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$(M_1 \cdot s^2 + (D_1 + D_3) \cdot s + K_1 + K_2) \cdot X_1(s) - K_2 \cdot X_2(s) - D_3 \cdot s \cdot X_3(s) = 0$$

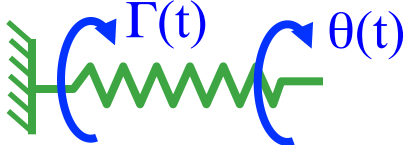
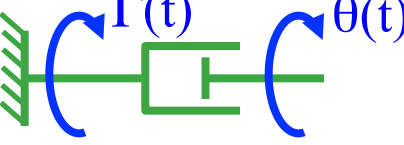
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Modelado de sistemas

Modelado Mecánico: (Rotacional)

Componente	Par – Vel. ang.	Par - Ángulo	Impedancia $\Gamma(s)/\Theta (s)$	
Muelle (K) 	$\Gamma(t) = K \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$\Gamma(t) = K \cdot \theta(t)$	K	$\Gamma(t)$: N.m $\theta(t)$: Rad
Amortiguamiento (D) 	$\Gamma(t) = D \cdot \omega(t)$	$\Gamma(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	$D \cdot s$	$\omega(t)$: rad/s D: N.m.s/rad

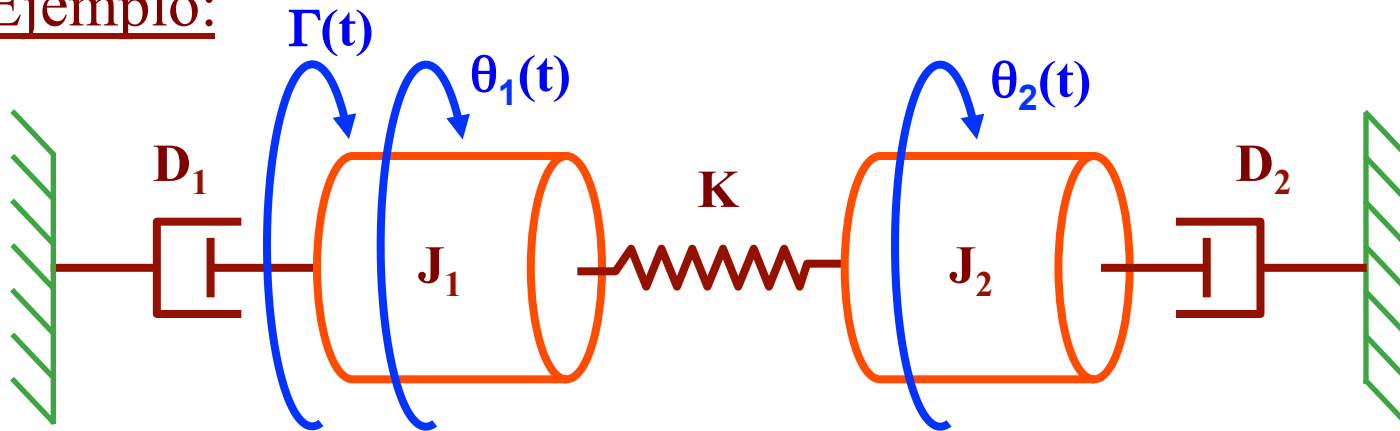
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Modelado de sistemas

Ejemplo:



$$\begin{aligned} \sum \text{Imped}_1 \cdot \theta_1(s) - \sum \text{Imped}_{1-2} \cdot \theta_2(s) &= \sum \text{Pares}_1 \\ - \sum \text{Imped}_{2-1} \cdot \theta_1(s) + \sum \text{Imped}_2 \cdot \theta_2(s) &= \sum \text{Pares}_2 \end{aligned}$$

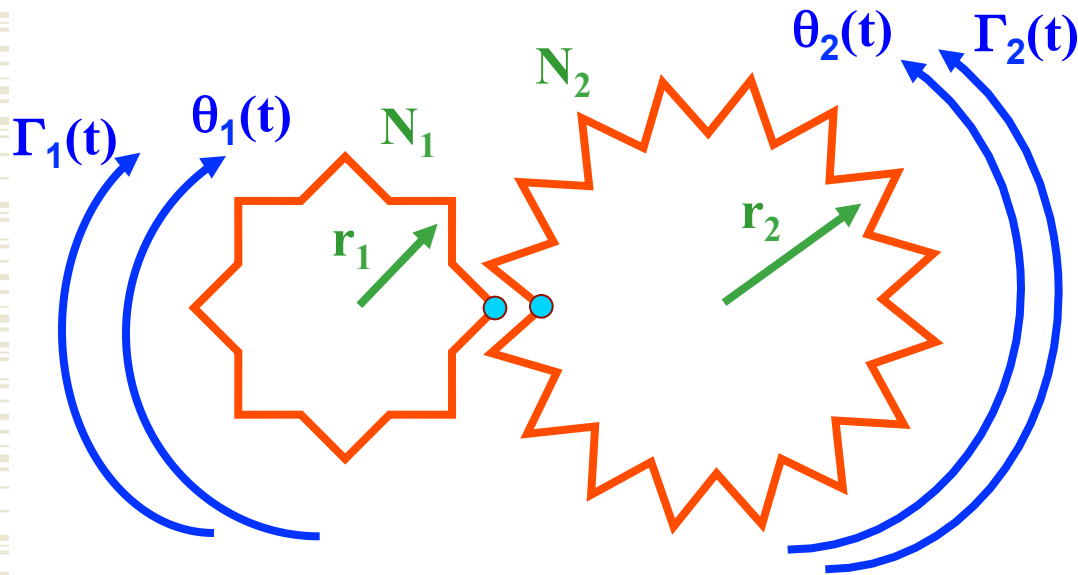
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Modelado de sistemas

Trenes de engranaje (reductoras)



$$r_1 \cdot \theta_1(t) = r_2 \cdot \theta_2(t)$$

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma_2(t)}$$

Propiedad: la impedancia de sistemas rotacionales se transmite a través de

Cartagena99

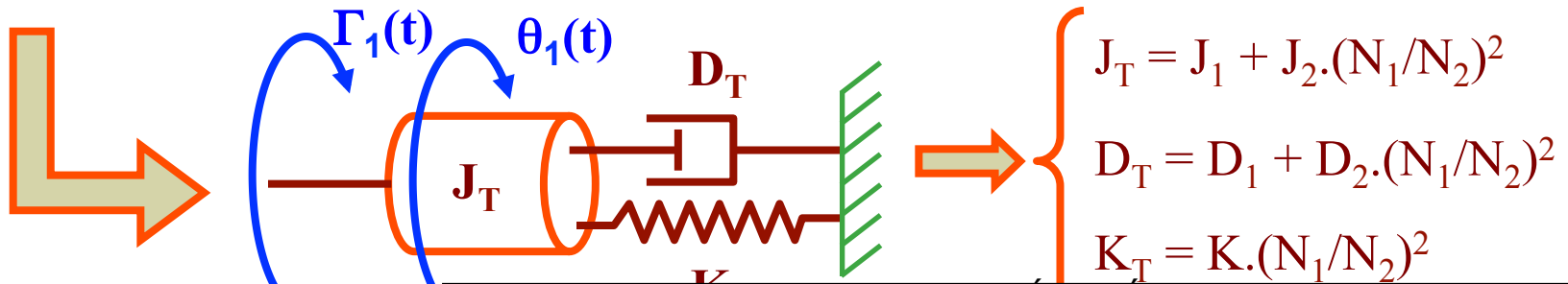
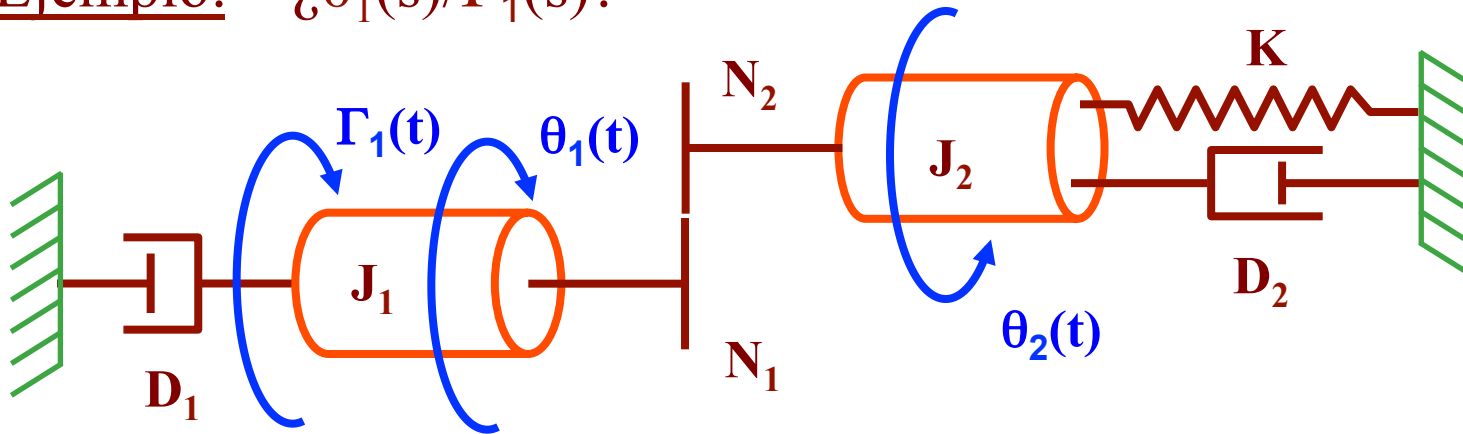
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Nº dientes de inicio

Modelado de sistemas

Ejemplo: $\theta_1(s)/\Gamma_1(s)$?



$$\left\{ \begin{aligned} J_T &= J_1 + J_2 \cdot (N_1/N_2)^2 \\ D_T &= D_1 + D_2 \cdot (N_1/N_2)^2 \\ K_T &= K \cdot (N_1/N_2)^2 \end{aligned} \right.$$

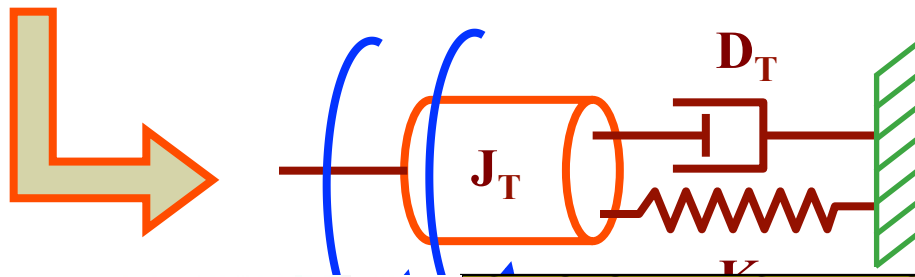
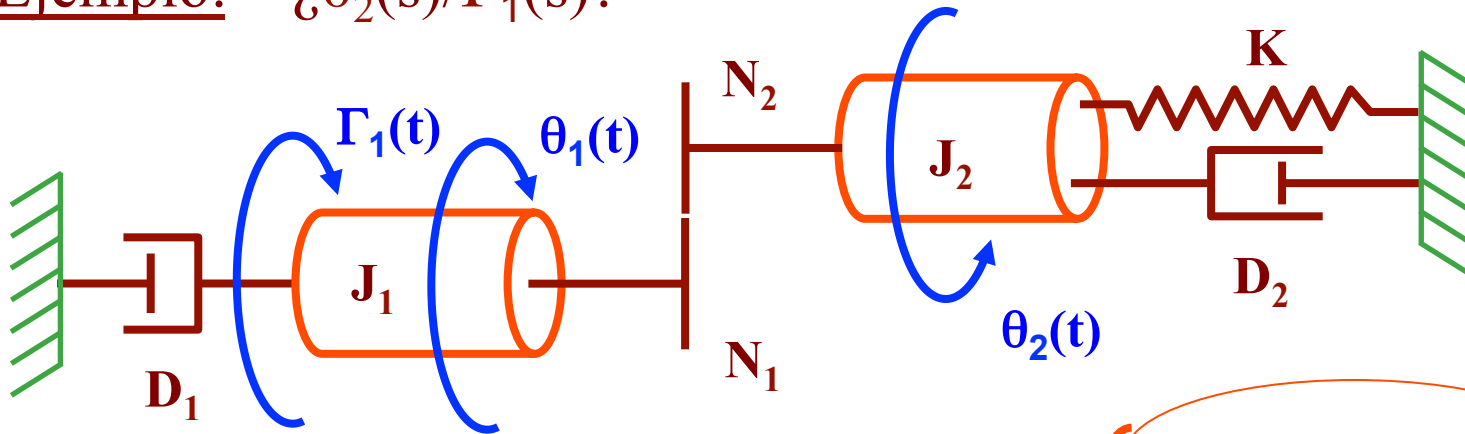
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Modelado de sistemas

Ejemplo: $\theta_2(s)/\Gamma_1(s)$?



$$\Gamma_2(t) = \Gamma_1(t) \cdot N_2/N_1$$

$$J_T = J_1 \cdot (N_2/N_1)^2 + J_2$$

$$D_T = D_1 \cdot (N_2/N_1)^2 + D_2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

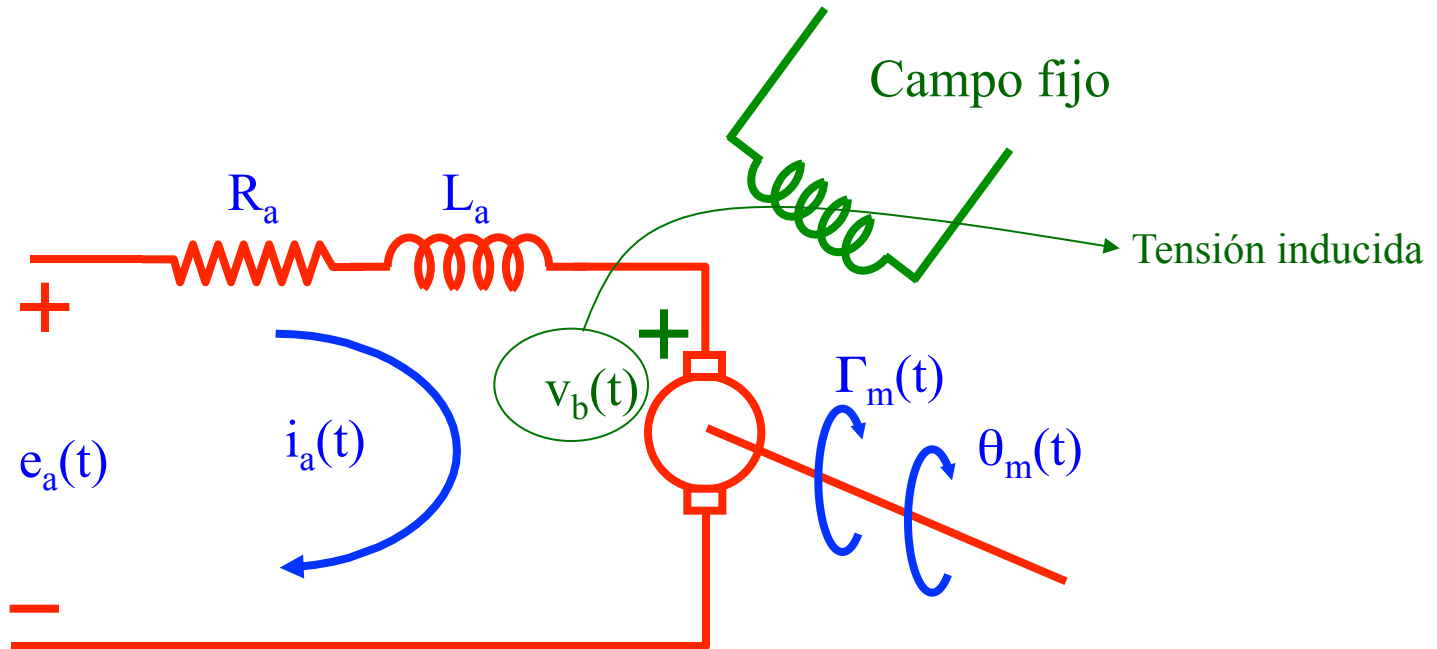
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$(s^2 + D_T s + K_T) \theta_2(s) = \Gamma_1(s)$$

$$\theta_2(s) = \frac{\Gamma_1(s)}{s^2 + D_T s + K_T}$$

Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Centro de Estudios Académicos

Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \implies V_b(s) = K_b \cdot s \cdot \Theta_m(s) \text{ siendo } K_b \text{ la cte. de fuerza contraelectrom.}$$

$$R_a \cdot i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) = e_a(t) \implies (R_a + L_a \cdot s) \cdot I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

$$\Gamma_m(t) = K_t \cdot i_a(t) \implies \Gamma_m(s) = K_t \cdot I_a(s) \text{ siendo } K_t \text{ la cte. de par}$$

Cartagena99

R + I + S
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Modelado de sistemas

Modelado Electro-Mecánico: (Motor controlado por inducido)

$$\Gamma_m(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + D_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_m(s) = (J_m \cdot s^2 + D_m \cdot s) \cdot \Theta_m(s)$$

PARTE MECÁNICA

PARTE ELÉCTRICA + PARTE MECÁNICA

$$E_a(s) = \frac{R_a + L_a \cdot s}{K_t} \left((J_m \cdot s^2 + D_m \cdot s) \cdot \Theta_m(s) + K_b \cdot s \cdot \Theta_m(s) \right) \quad \xrightarrow{L_a \ll R_a}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

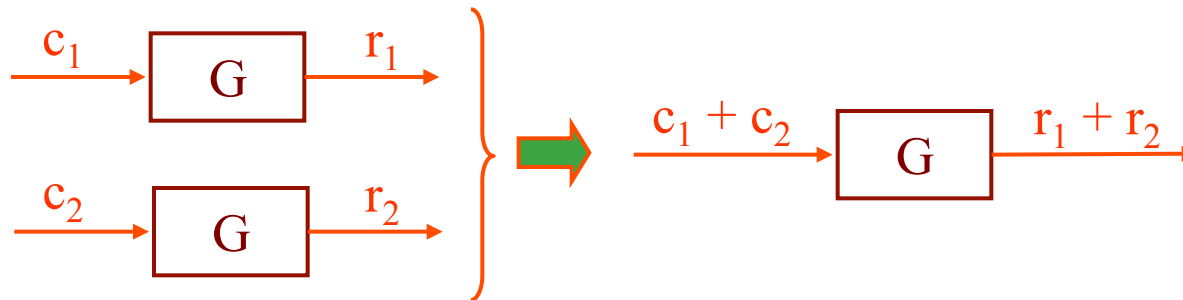


Linealización

Los sistemas lineales son más sencillos de controlar

Cumplen dos propiedades:

➤ Superposición:



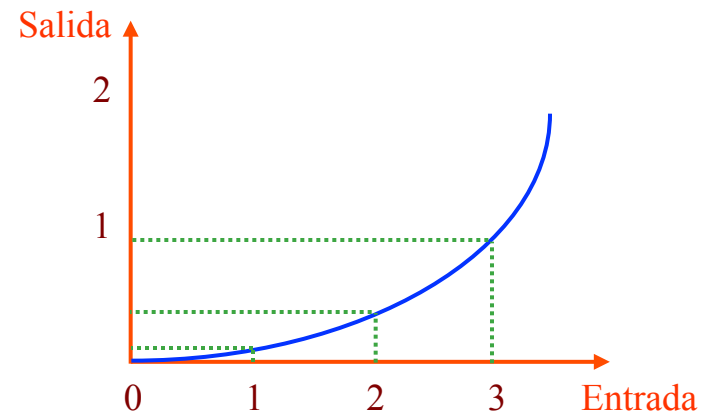
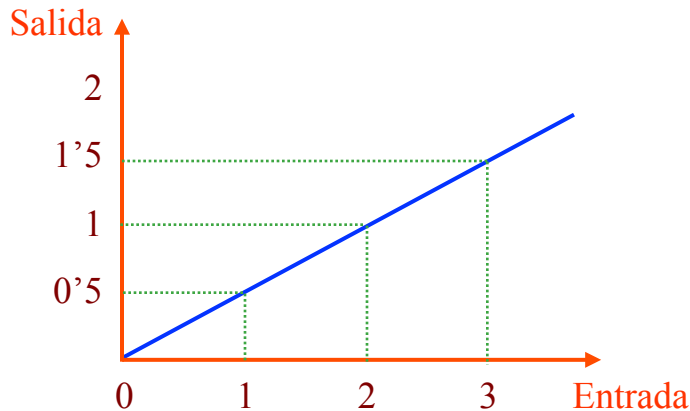
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Linealización

De forma gráfica:



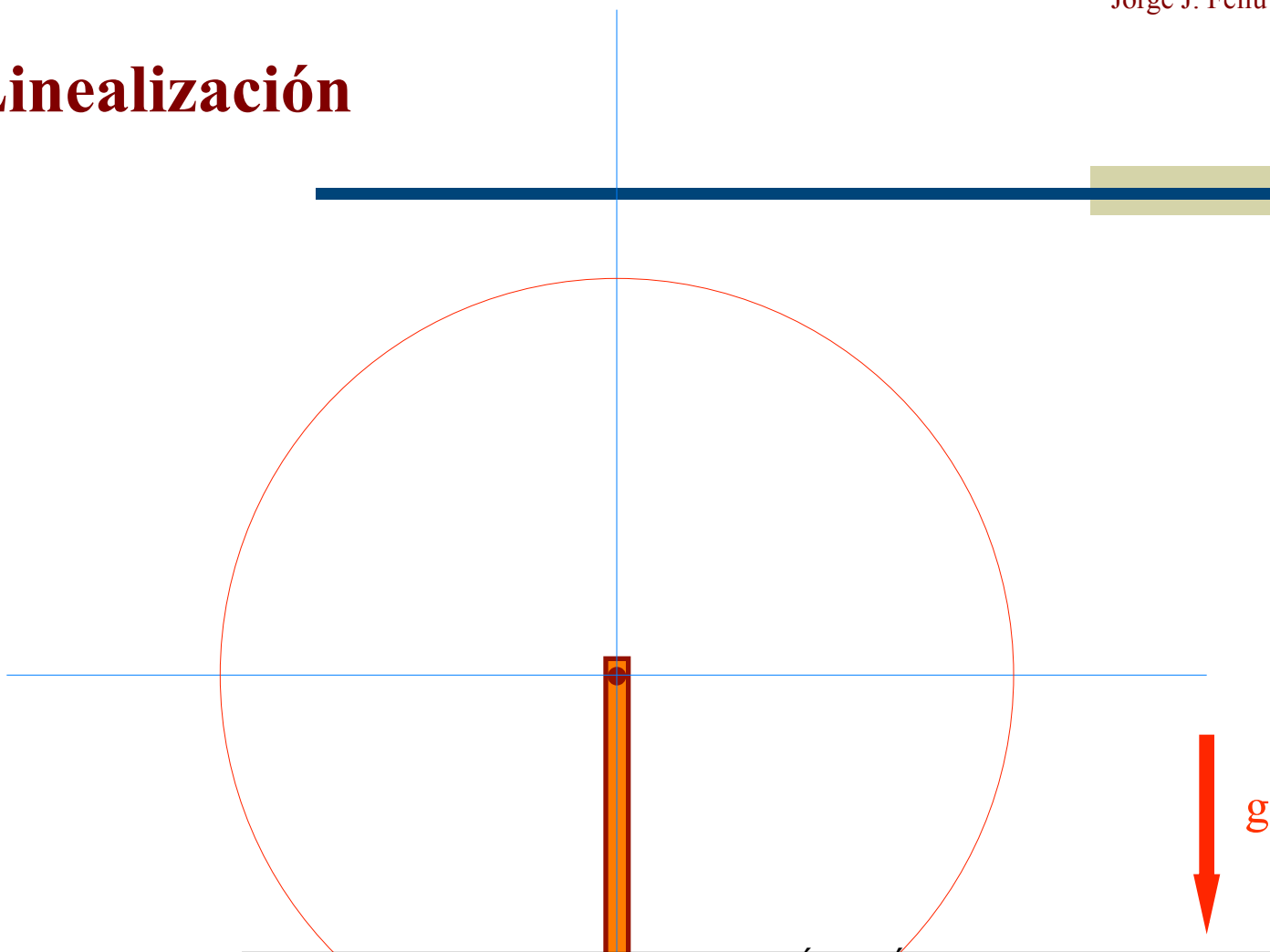
Entrada = 1 → Salida = 0.5

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Linealización

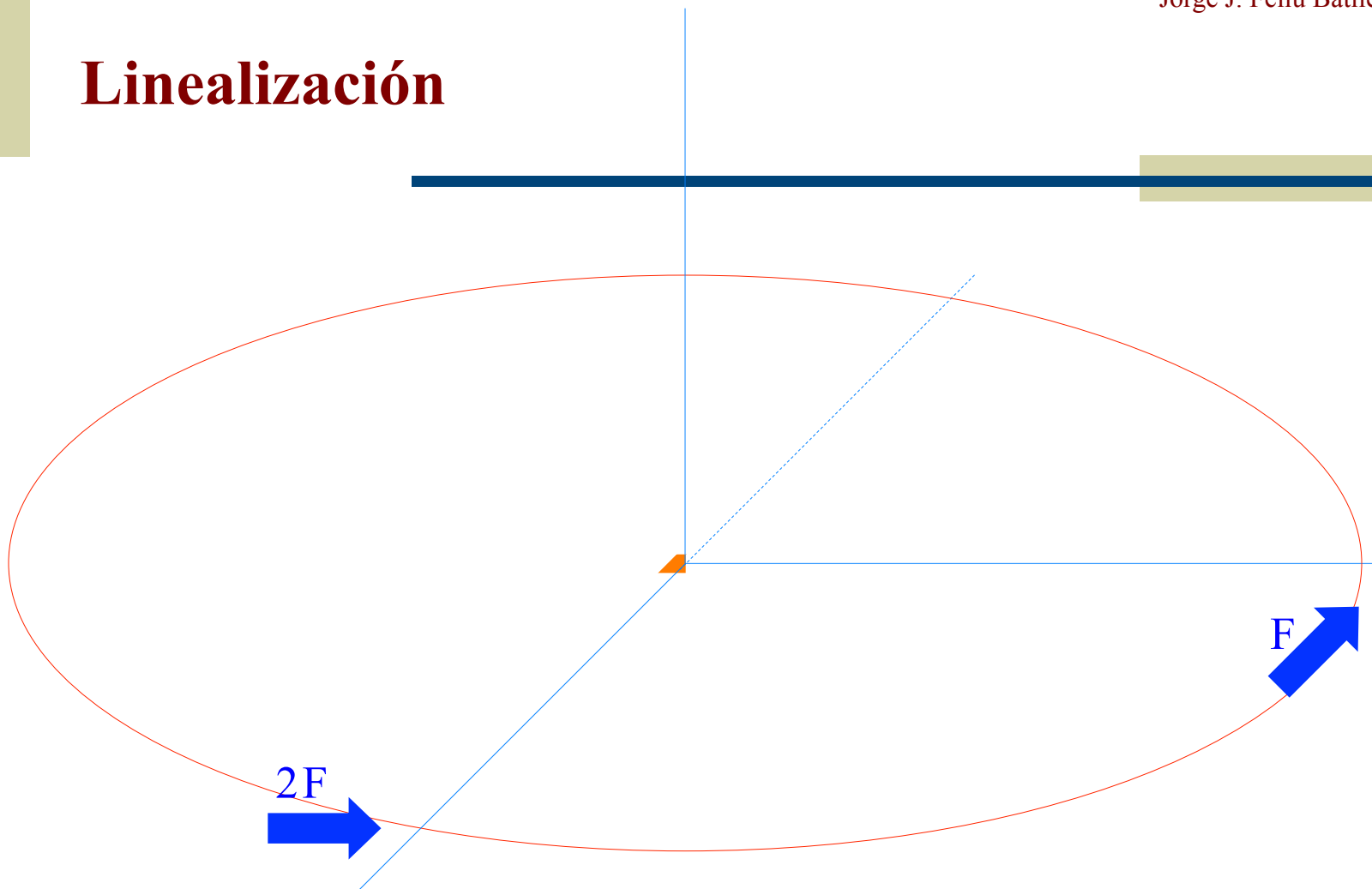


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Linealización



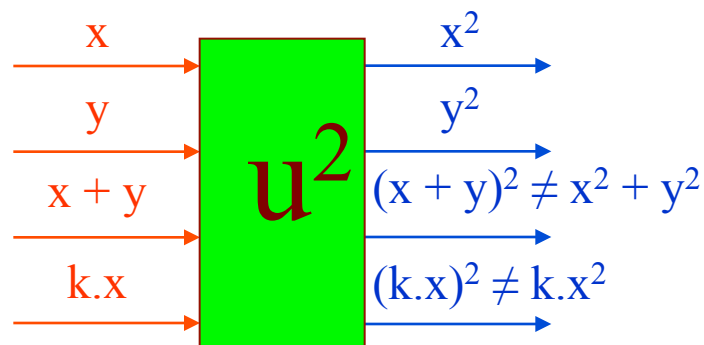
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

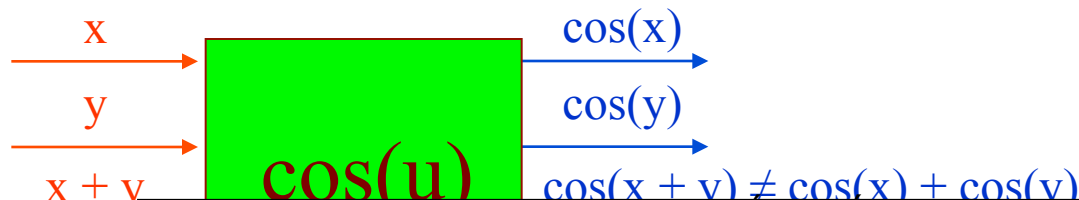
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Linealización



No lineal



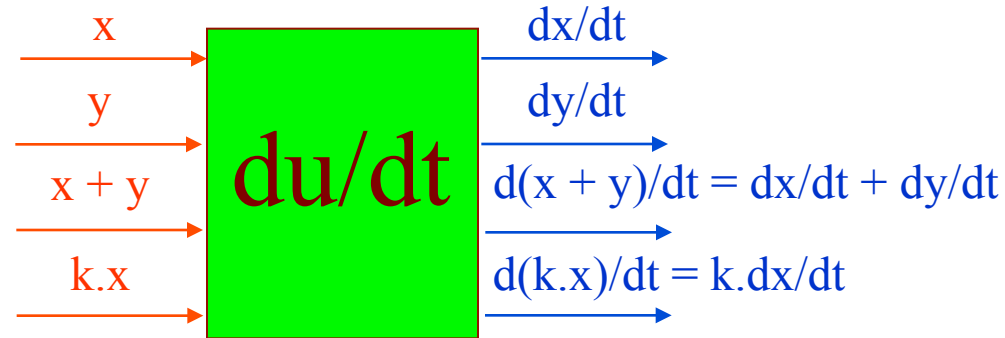
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

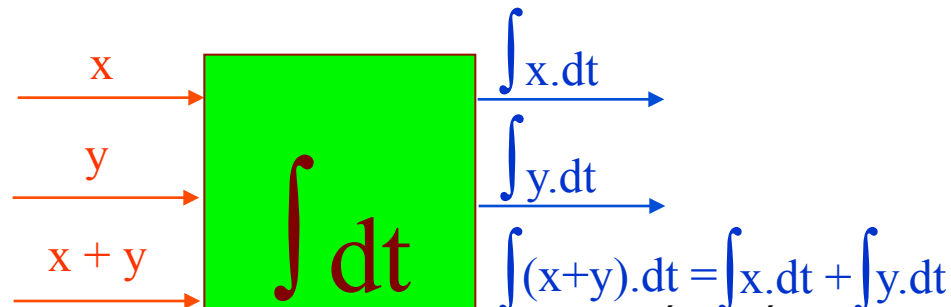
NO lineal

Cartagena99

Linealización



Sí lineal



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Linealización

Ejemplos de ecuaciones NO lineales:

$$x^2 + y + \cos(x) = 0$$

$$\ln(x) - 5 + \dot{x} = 0$$

$$x \cdot u + \ddot{u} + \dot{x} = 3$$

$$e^u - 3 + u + x = 0$$

⋮

De forma general:

- ✓ Términos trigonométricos
- ✓ Exponenciales y logaritmos
- ✓ Productos de funciones
- ✓ Constantes sueltas
- ✓ etc

Cartagena99

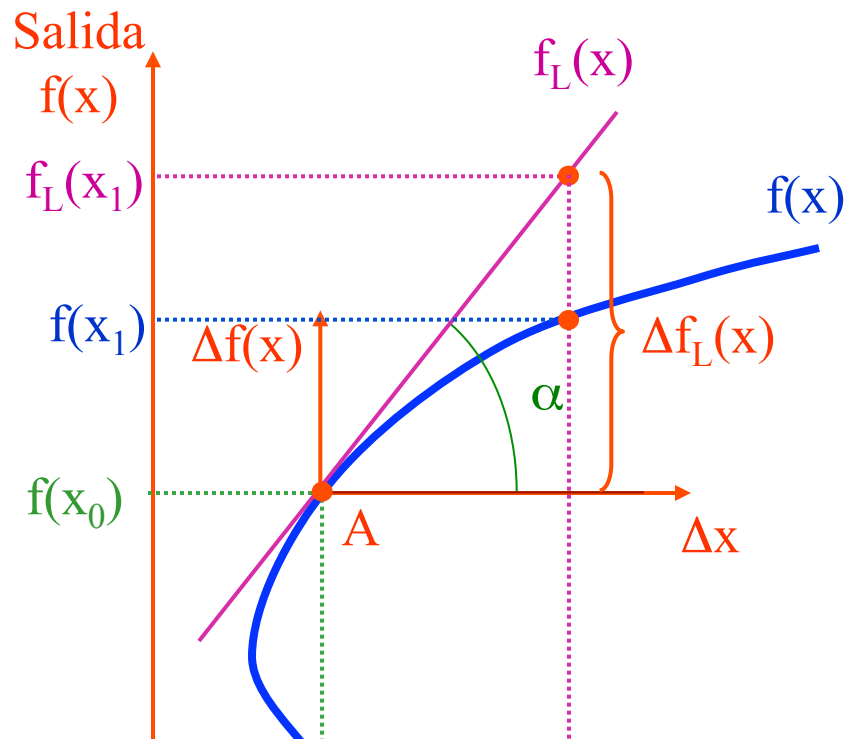
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$x - z + x = 0$

Linealización

Procedimiento



$$\text{tg}(\alpha) = \Delta f_L(x) / \Delta x$$



$$f_L(x_1) - f(x_0) = \underbrace{\Delta f_L(x)}_{\text{tg}(\alpha) \Delta x} = m_A (x_1 - x_0)$$



$$f_L(x_1) = f(x_0) + m_A (x_1 - x_0)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

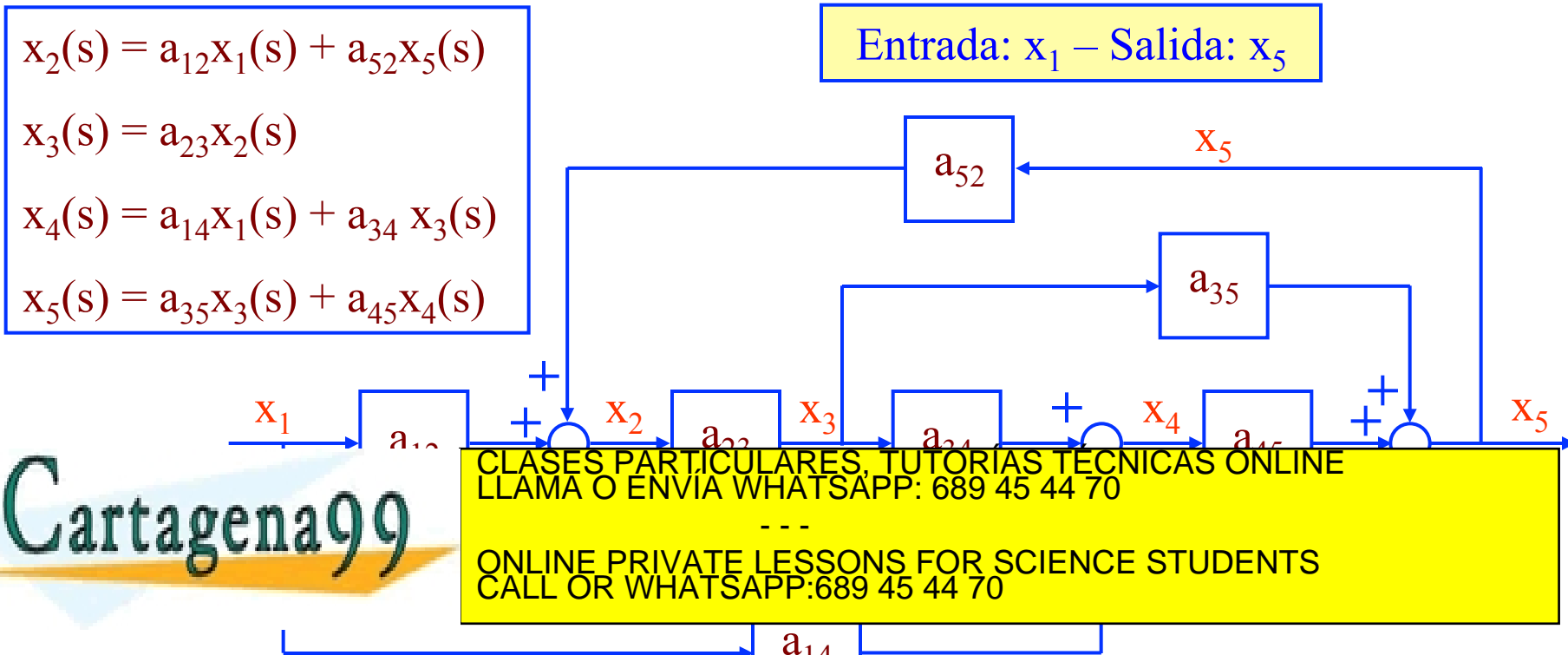
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Reducción de Sistemas

Diagramas de bloques

Es una representación gráfica de la relación entre los diferentes subsistemas y las señales que intervienen en un sistema complejo



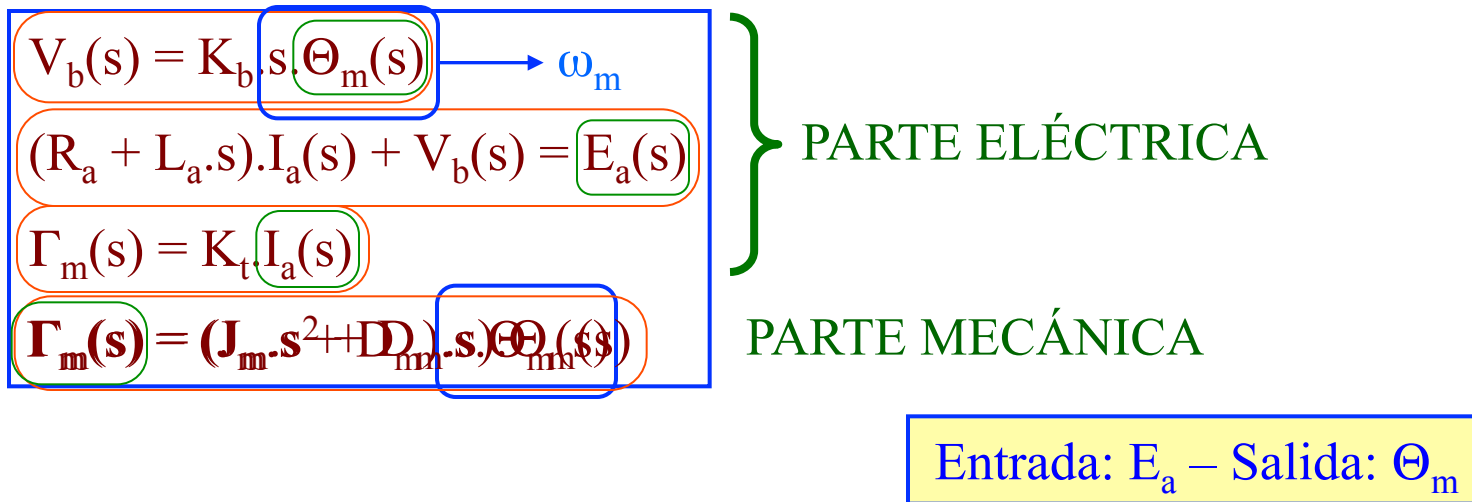
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Diagrama de bloques de un motor controlado por inducido



Cartagena99

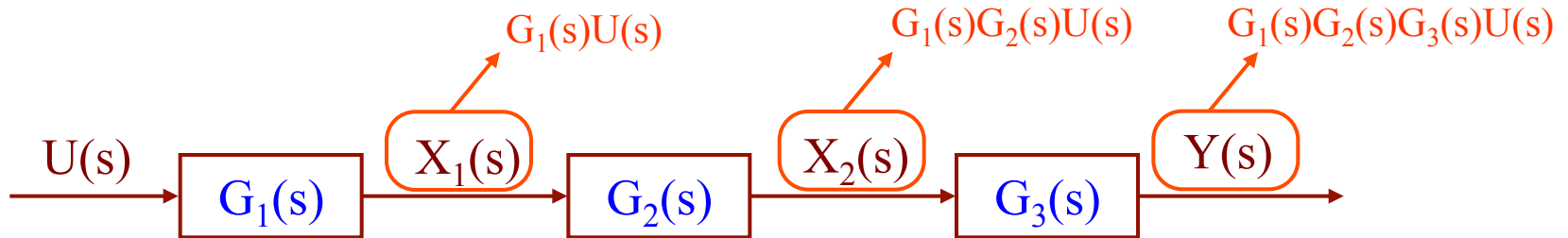
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagena99.com

Reducción de Sistemas

Bloques en serie:



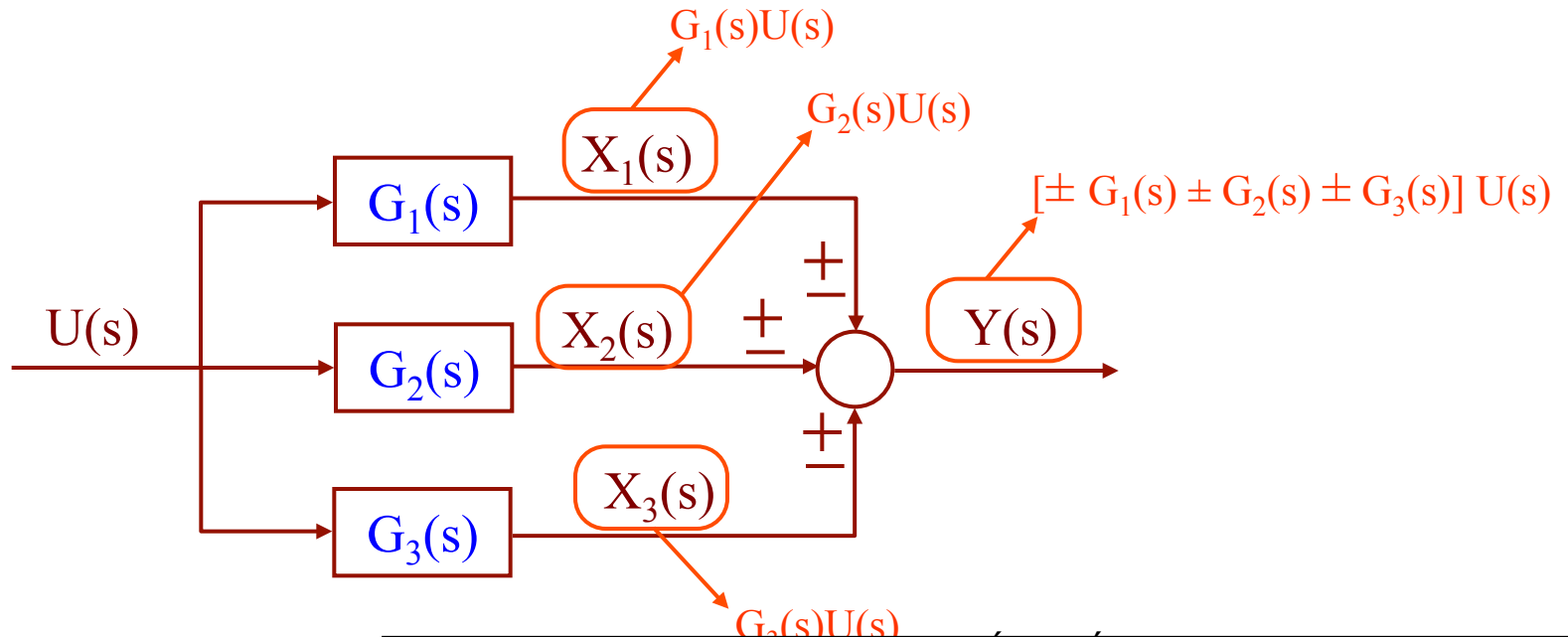
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Bloques en paralelo:



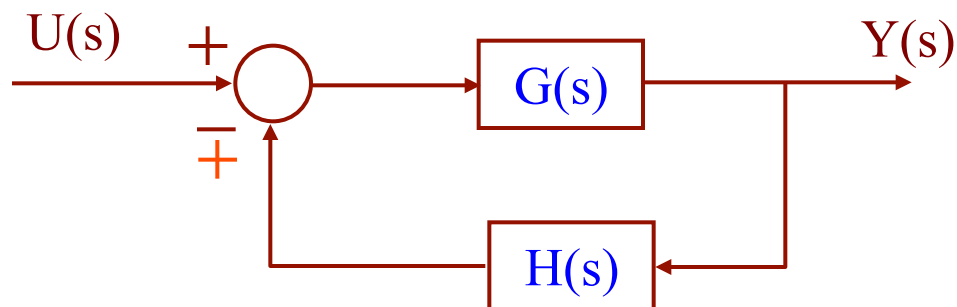
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Realimentación:



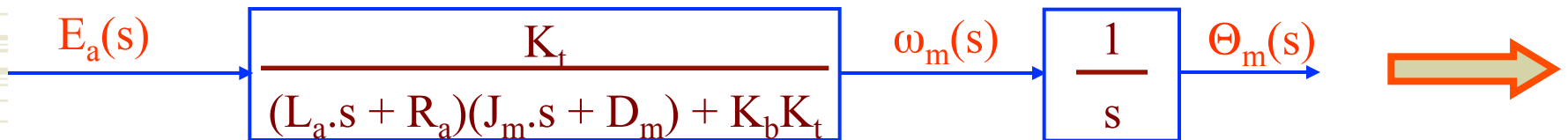
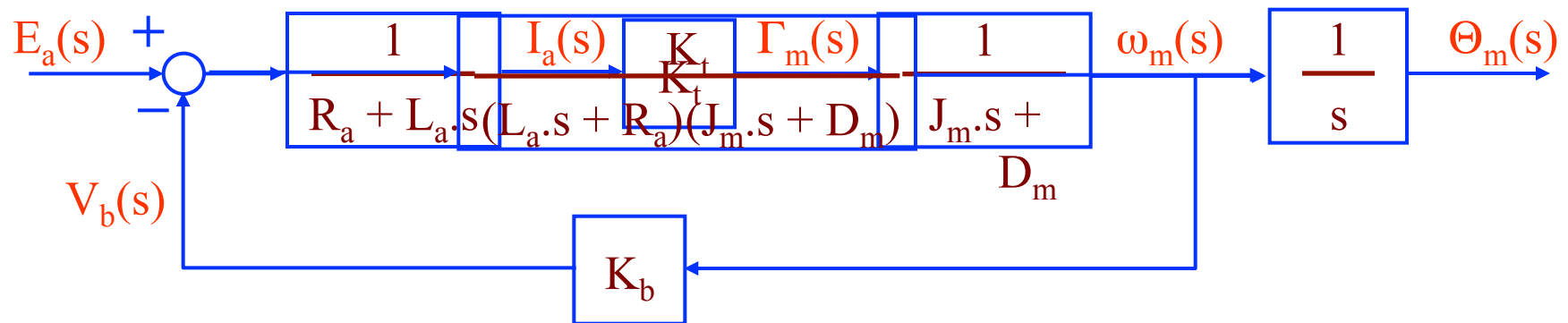
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Reducción de Sistemas

Simplificación del diagrama de bloques de un motor controlado por inducido



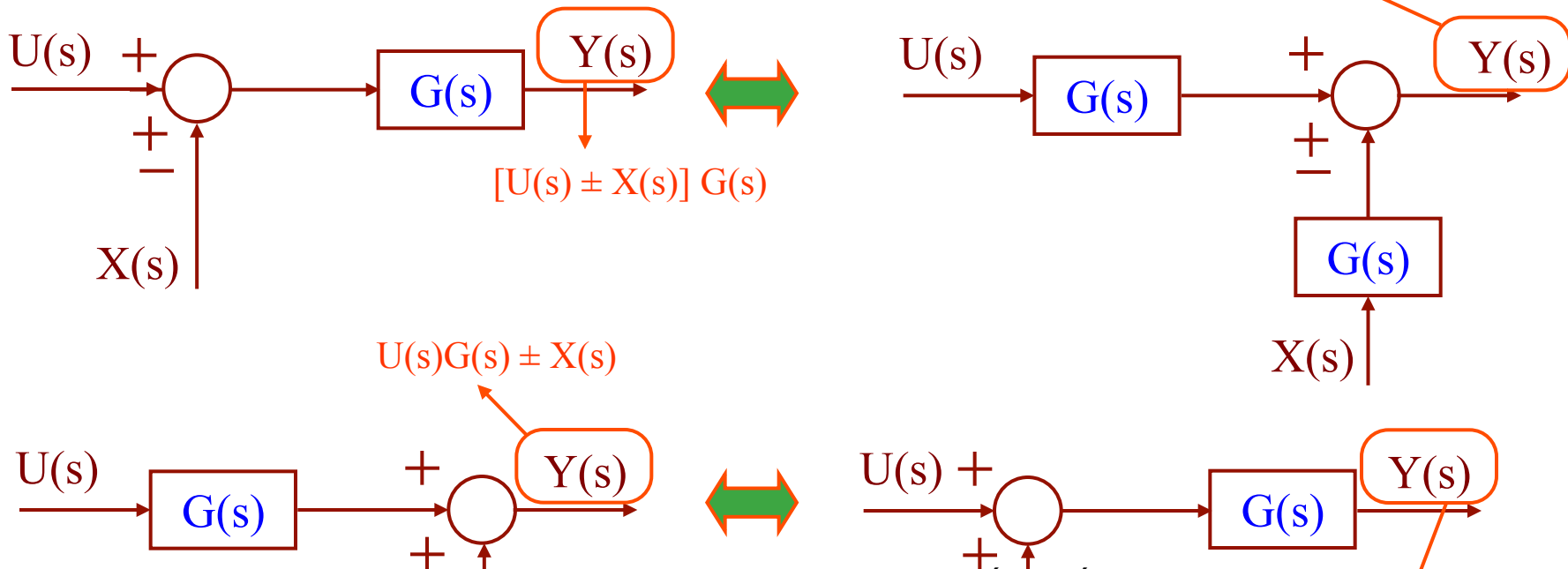
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Algunas equivalencias:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

X(s)

Reducción de Sistemas

Diagramas de flujo (flujogramas)

Es un representación dual del diagrama de bloques

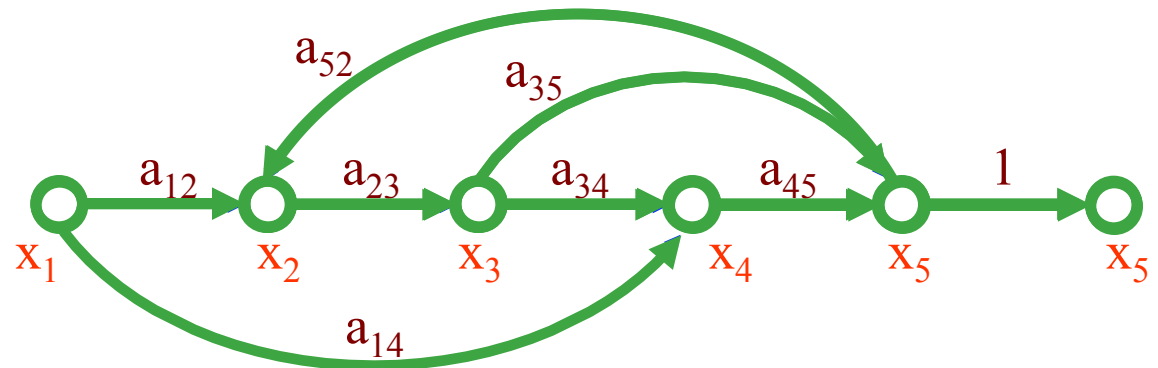
Entrada: x_1 – Salida: x_5

$$x_2(s) = a_{12}x_1(s) + a_{52}x_5(s)$$

$$x_3(s) = a_{23}x_2(s)$$

$$x_4(s) = a_{14}x_1(s) + a_{34}x_3(s)$$

$$x_5(s) = a_{35}x_3(s) + a_{45}x_4(s)$$



Nodo fuente: nodo del que sólo parten ramas: x_1

Nodo final: nodo al que sólo llegan ramas: x_5

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagena99.com

Reducción de Sistemas

Flujograma de un motor controlado por inducido

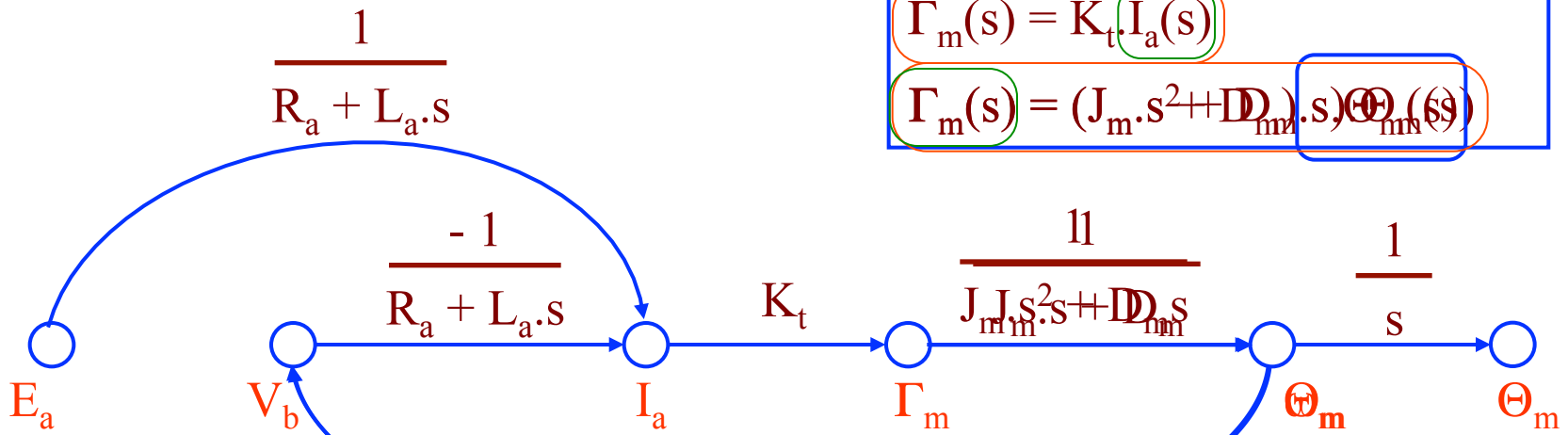
Entrada: E_a – Salida: Θ_m

$$V_b(s) = K_b \cdot s \cdot \Theta_m(s) \rightarrow \omega_m$$

$$(R_a + L_a \cdot s) \cdot I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

$$\Gamma_m(s) = K_t \cdot I_a(s)$$

$$\Gamma_m(s) = (J_m \cdot s^2 + D_m \cdot s) \cdot \Theta_m(s)$$



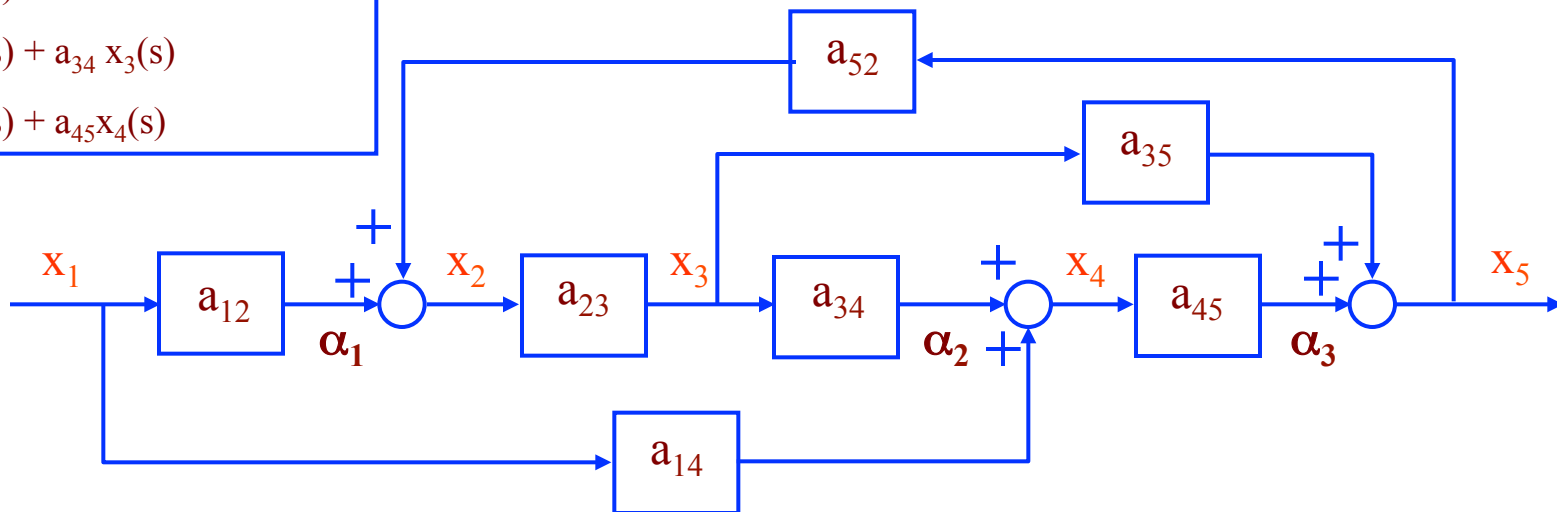
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Reducción de Sistemas

$$\begin{aligned}
 x_2(s) &= a_{12}x_1(s) + a_{52}x_5(s) \\
 x_3(s) &= a_{23}x_2(s) \\
 x_4(s) &= a_{14}x_1(s) + a_{34}x_3(s) \\
 x_5(s) &= a_{35}x_3(s) + a_{45}x_4(s)
 \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Reducción de Sistemas

Regla de Mason:

Sirve para calcular la f.d.t. entre un nodo final y uno fuente:

$$G(s) = \frac{x_{final}}{x_{fuente}} = \frac{1}{\Delta} \sum_k T_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum B_{1n} + \sum B_{2n} - \sum B_{3n} + \dots + (-1)^n \sum B_{mn}$$

T_k = Transmitancia del k-ésimo trayecto directo entre el x_{fuente} y el x_{final}

$\sum B_{1n}$ = Suma de transmitancias de todos los bucles del flujograma

$\sum B_{2n}$ = Suma de los productos de transmitancias de las parejas de bucles

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

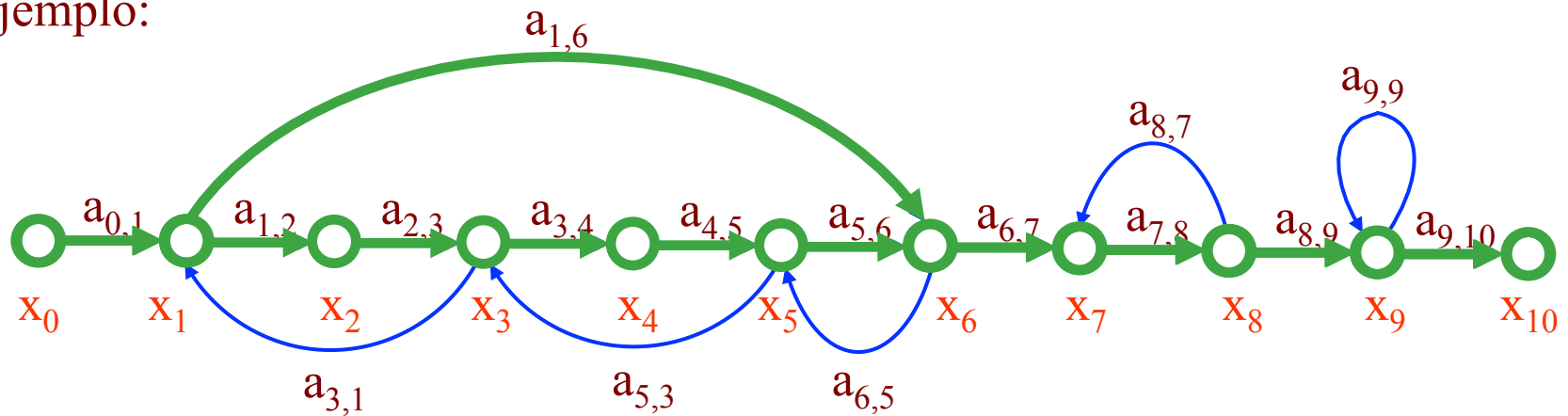
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Δ_k = valor de Δ excluyendo los terminos donde intervienen bucles que tienen

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:

Ejemplo:



Trayectos directos (T_k)

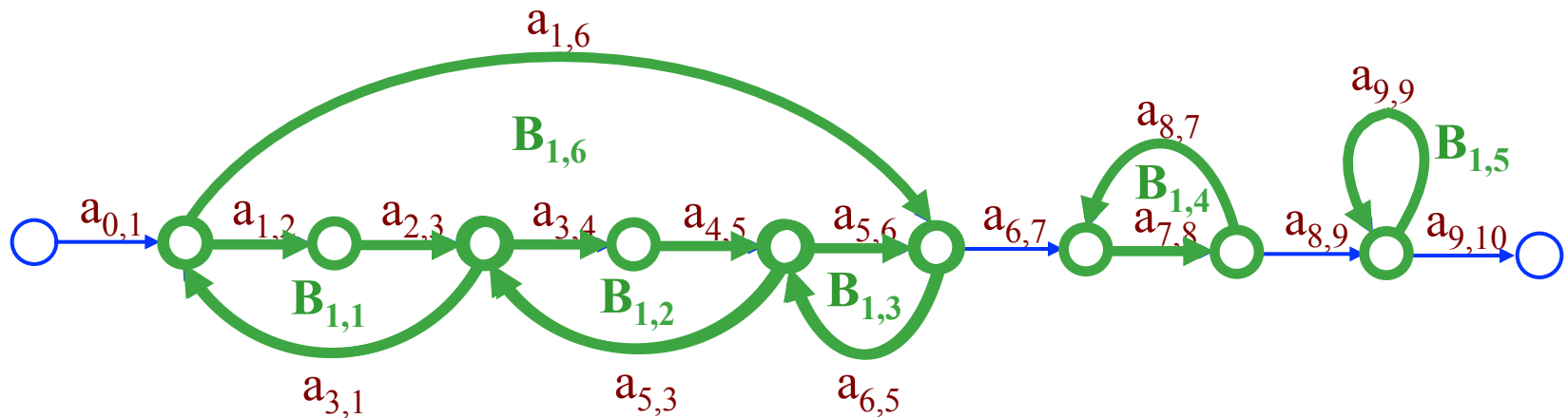
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



$$B_{1,1} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}$$

$$B_{1,2} = a_{3,4}a_{4,5}a_{5,3}$$

$$B_{1,3} = a_{5,6}a_{6,5}$$

Bucles (B_i)

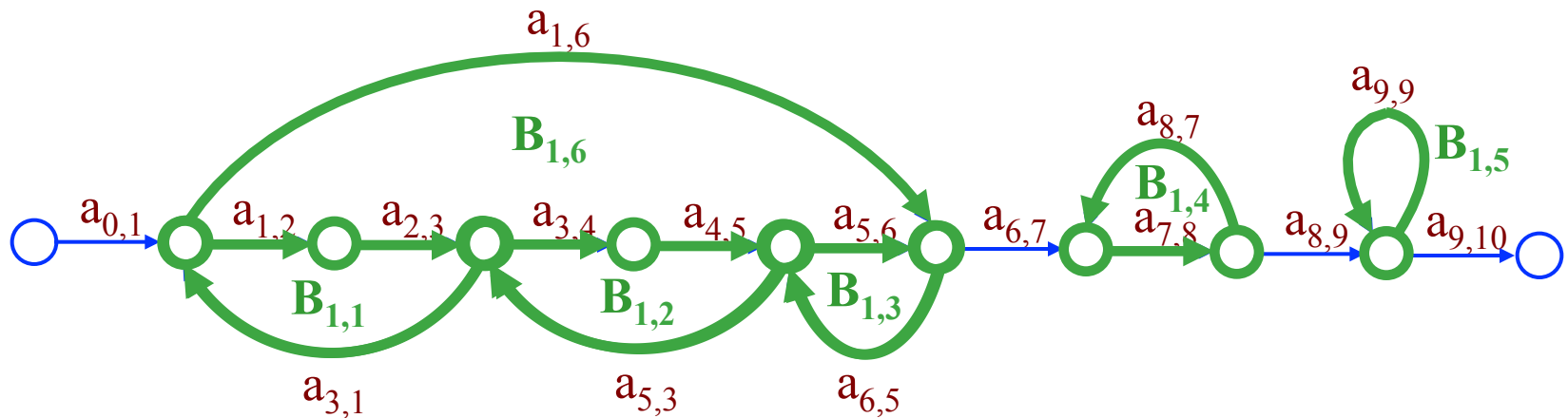
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



$$B_{2,1} = B_{1,1}B_{1,3}$$

$$B_{2,2} = B_{1,1}B_{1,4}$$

$$B_{2,3} = B_{1,1}B_{1,5}$$

$$B_{2,4} = B_{1,2}B_{1,4}$$

Bucles ($B_{i,j}$)

Cartagena99

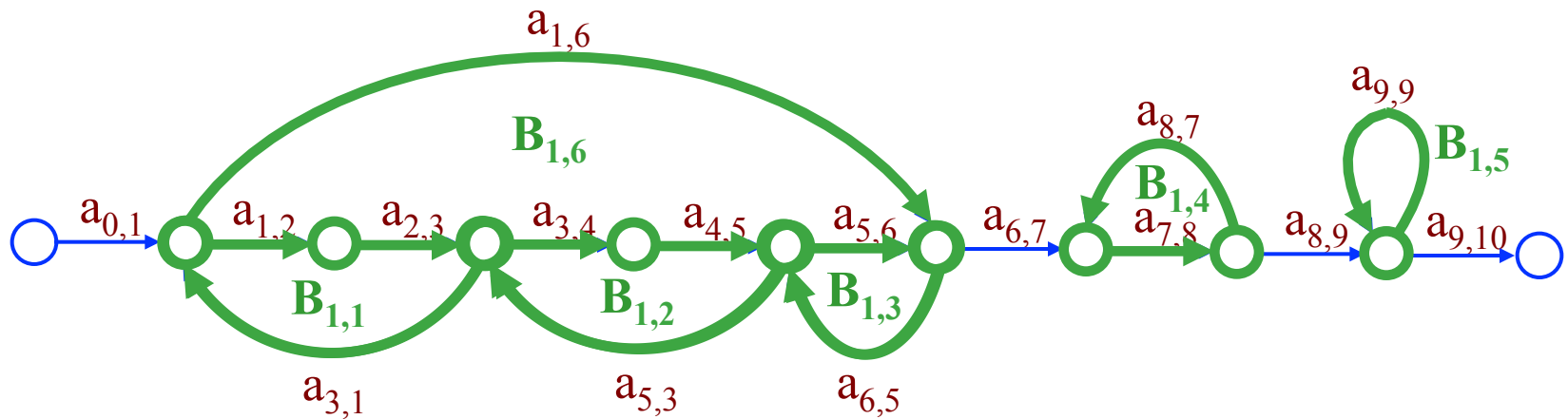
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$B_{2,9} = B_{1,4}B_{1,6} \quad B_{2,10} = B_{1,5}B_{1,6}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



$$B_{3,1} = B_{1,1}B_{1,3}B_{1,4}$$

$$B_{3,2} = B_{1,1}B_{1,3}B_{1,5}$$

$$B_{2,2} = B_{1,1}B_{1,4}B_{1,5}$$

Bucles ($B_{4,n}$)

$$B_{4,1} = B_{1,1}B_{1,3}B_{1,4}B_{1,5}$$

Cartagena99

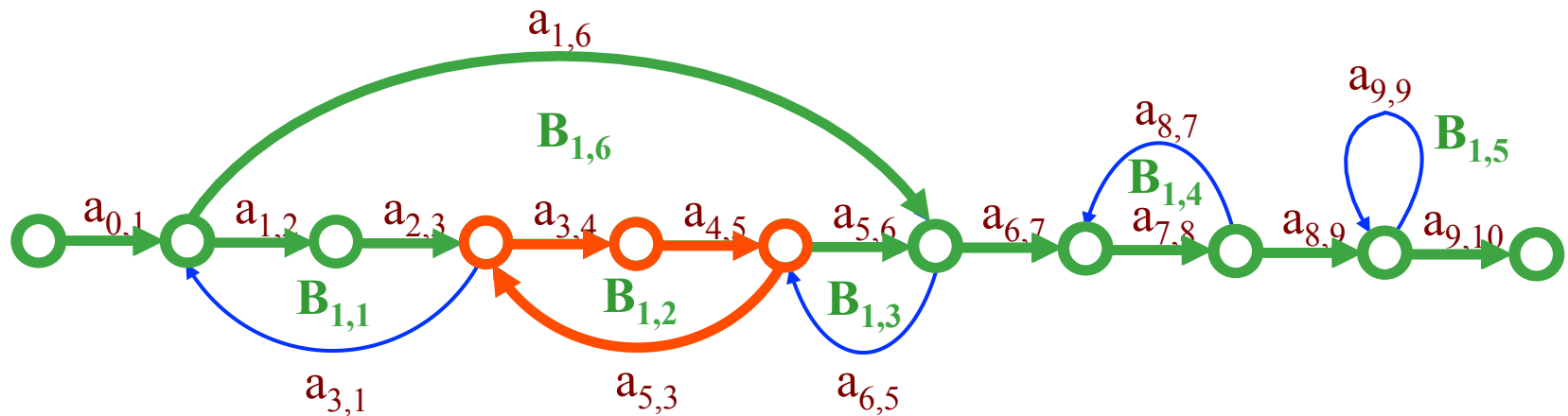
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$B_{3,6} = B_{1,1}B_{1,3}B_{1,4}B_{1,5}B_{1,6}$$

Reducción de Sistemas

Regla de Mason:



$$\Delta = 1 - \cancel{\sum B_{1n}} + \cancel{\sum B_{2n}} - \cancel{\sum B_{3n}} + \dots + (-1)^n \cancel{\sum B_{mn}}$$

$$T_1 = a_{0,1} a_{1,2} a_{2,3} a_{3,4} a_{4,5} a_{5,6} a_{6,7} a_{7,8} a_{8,9} a_{9,10}$$

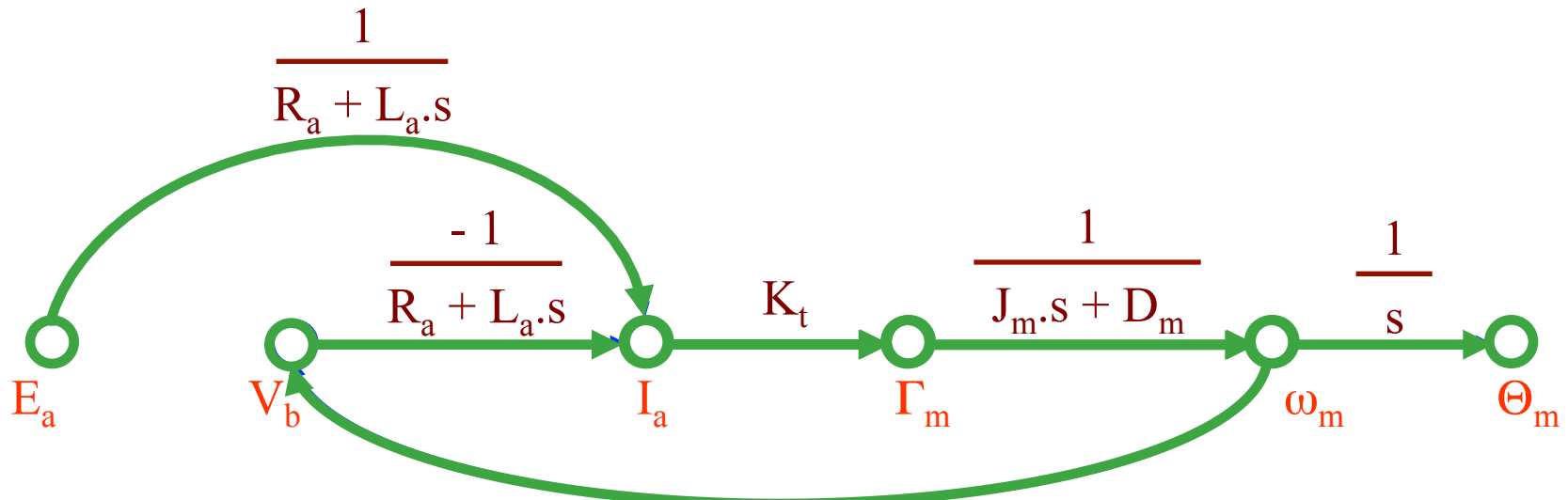
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Reducción de Sistemas

Simplificación del diagrama de flujo de un motor controlado por inducido



$$T_1 = \frac{1}{R_a + L_a \cdot s} \cdot K_t \cdot \frac{1}{J_m \cdot s + D_m} \cdot \frac{1}{s} \cdot K_b \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot T_1 \cdot \Delta_1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\Delta = 1 - B_{11}$ $\Delta_1 = 1$