

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Orden del sistema: es el grado del denominador

Utilidad:

- Sirve para identificar sistemas sencillos
- Sirve para estudiar el comportamiento de sistemas sencillos
- Sirve para diseñar reguladores, filtros, ...

La respuesta se compone de dos partes: transitoria ($y_{rt}(t)$) y estacionaria ($y_{rp}(t)$)

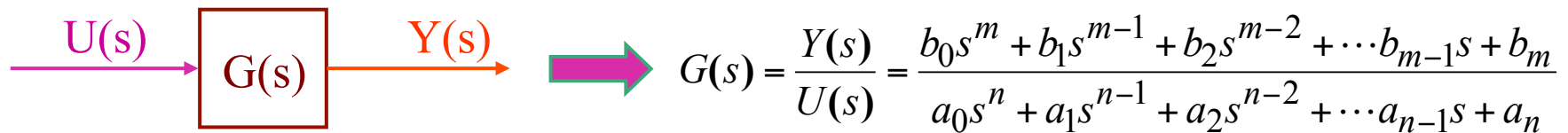
$$y_{rp}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

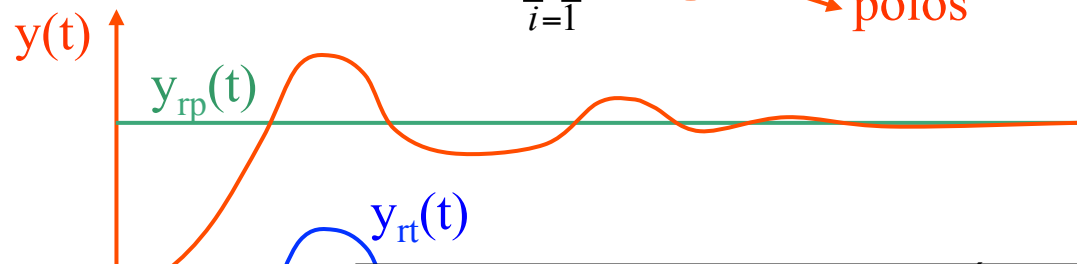
Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}$$

(Circles around z_i and p_i in the fraction above, with arrows pointing to the labels "ceros" and "polos" respectively.)



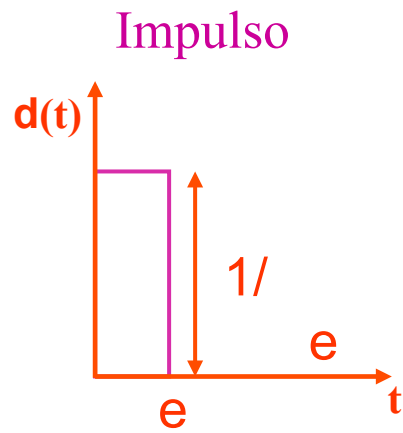
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

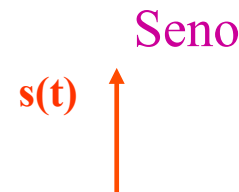
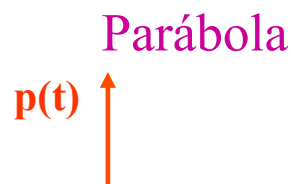
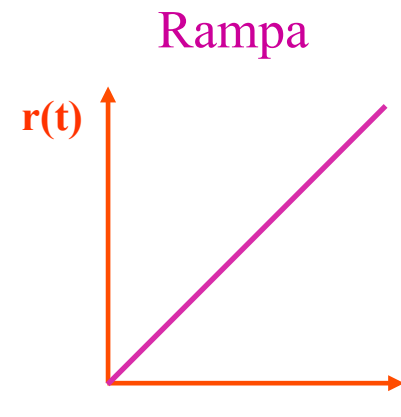
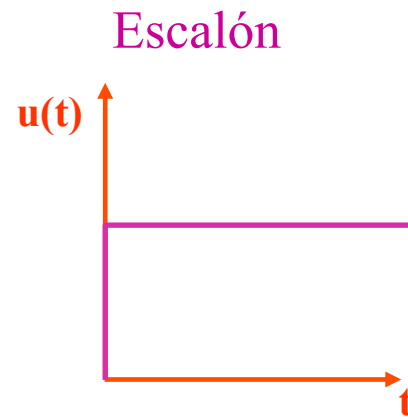
Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Tipos de señales de excitación habituales



$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^t \delta(t) dt = 1$$



Resposta frecuencial

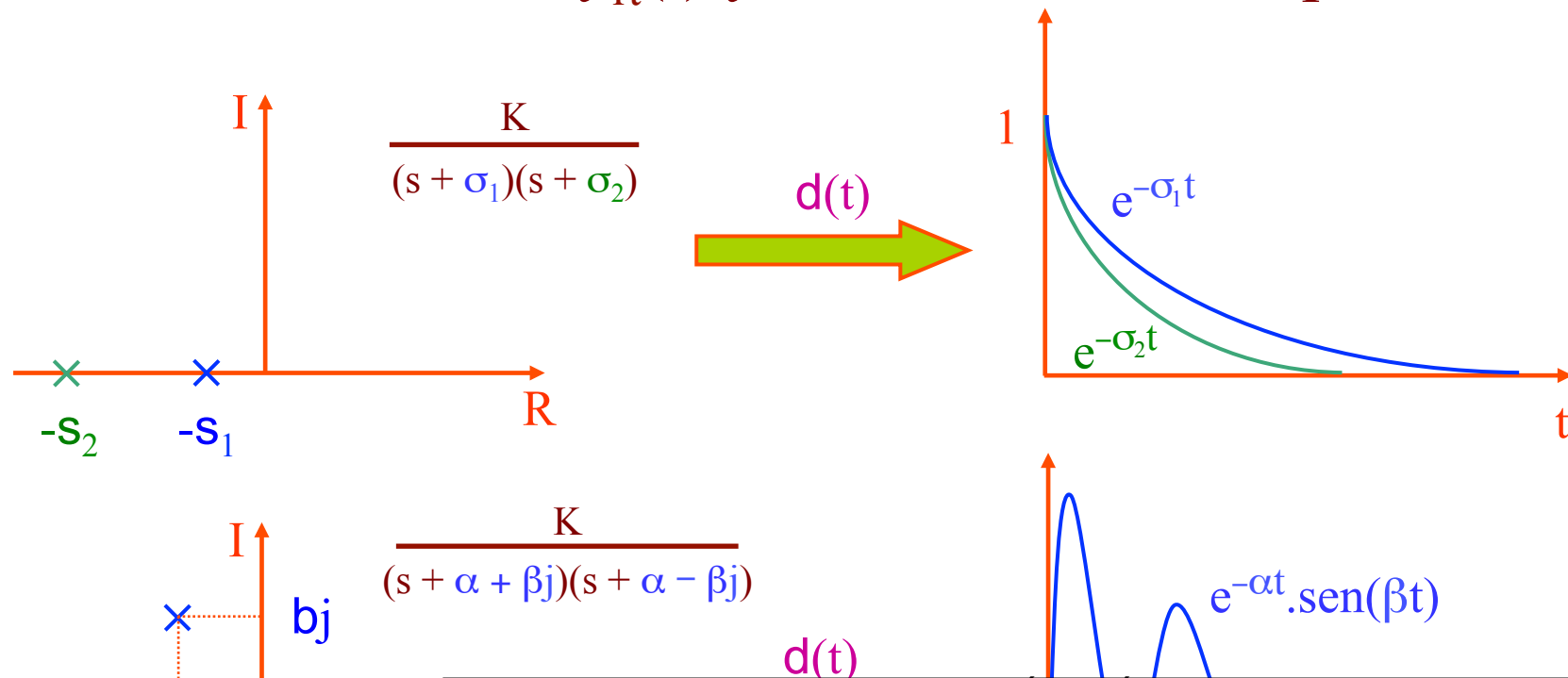
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



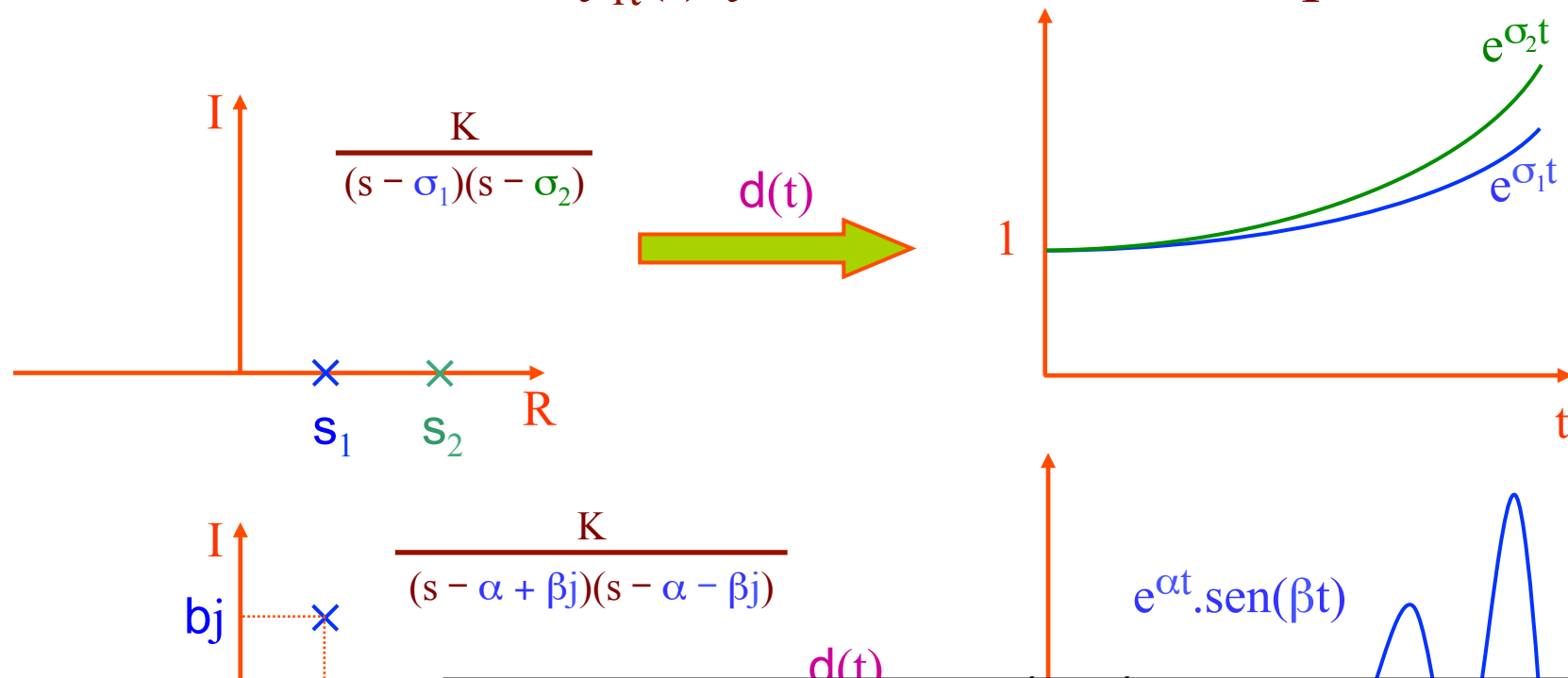
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



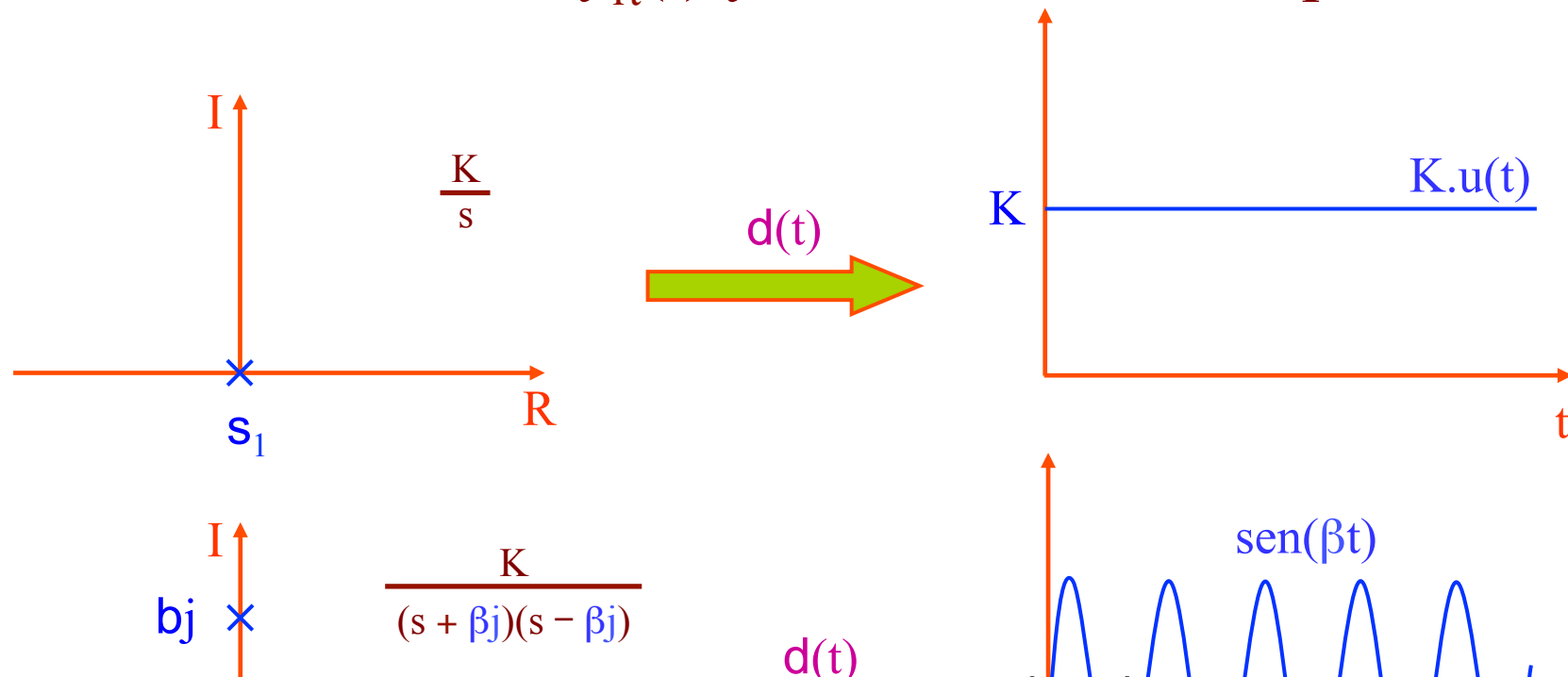
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Relación entre $y_{rt}(t)$ y la situación de los polos

Si todos los polos tienen parte real negativa el sistema es estable

Si algún polo tiene parte real positiva el sistema es inestable

Los polos reales dan respuestas NO oscilantes

Los polos con parte imaginaria dan respuestas SÍ oscilantes

Los polos en el origen dan respuestas “limitadamente estables”

Los polos sobre el eje imaginario dan respuestas “marginalmente estables”

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1° y 2° orden

Sistemas de primer orden

Proviene de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 \frac{du(t)}{dt} + b_1 u(t) \quad a_i > 0 \text{ y } b_i > 0 \quad i = 0, 1$$

\mathcal{L} \rightarrow $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + a_1}$ \rightarrow orden 1

Ganancia del sistema

Sistemas de primer orden simple \rightarrow

$b_0 = 0$ \rightarrow

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T_s s + 1}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

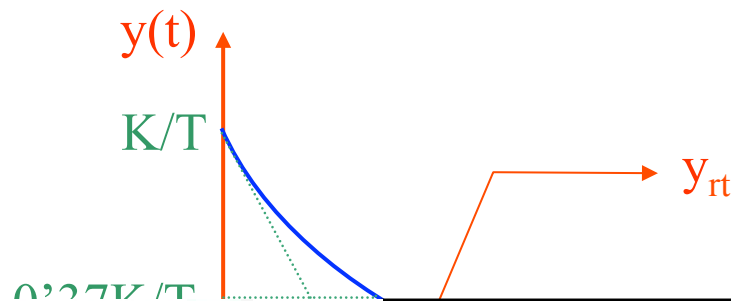
Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

Respuesta impulsional: $U(s) = 1$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$



Valores característicos

$$y(0) = K/T$$

$$y(T) = 0.37K/T$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

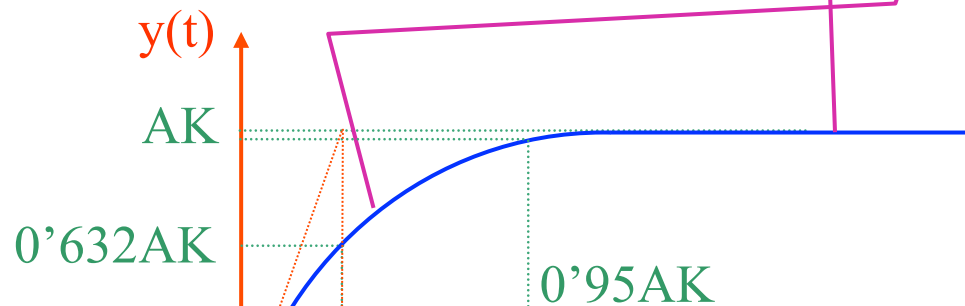
Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

Respuesta ante escalón: $U(s) = A/s$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} \frac{A}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = AK \left(1 - e^{-t/T} \right) \quad (t \geq 0)$$



Valores característicos

$$y(0) = 0$$

$$y(T) = 0.632AK$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de primer orden: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

Respuesta ante rampa: $U(s) = \text{tg}(\theta) \cdot 1/s^2$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} \text{tg}(\theta) \frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = K \cdot \text{tg}(\theta) \left[t - T + Te^{-t/T} \right] \quad (t \geq 0)$$

Normalizando $\xrightarrow{\quad} \frac{y(t)}{K} = \text{tg}(\theta) \left[t - T + Te^{-t/T} \right] \quad (t \geq 0)$

$\frac{y(t)}{K}$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden

Proviene de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 u(t) \quad a_i > 0 \text{ y } b_i > 0 \quad i = 0..2$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$$

orden 2

Sistemas de segundo orden simple $\Rightarrow b_0 = b_1 = 0 \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

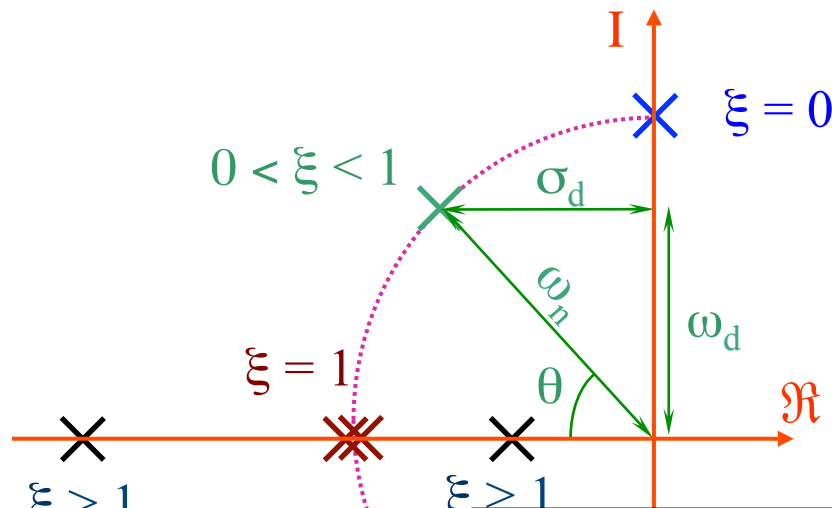
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden:
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Polos: $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ \longrightarrow Dos polos complejos conjugados



Casos	
$\xi = 0$	$\longrightarrow s = \pm \omega_n j$
$0 < \xi < 1$	$\longrightarrow s = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} j$
$\xi = 1$	$\longrightarrow s = -\omega_n$

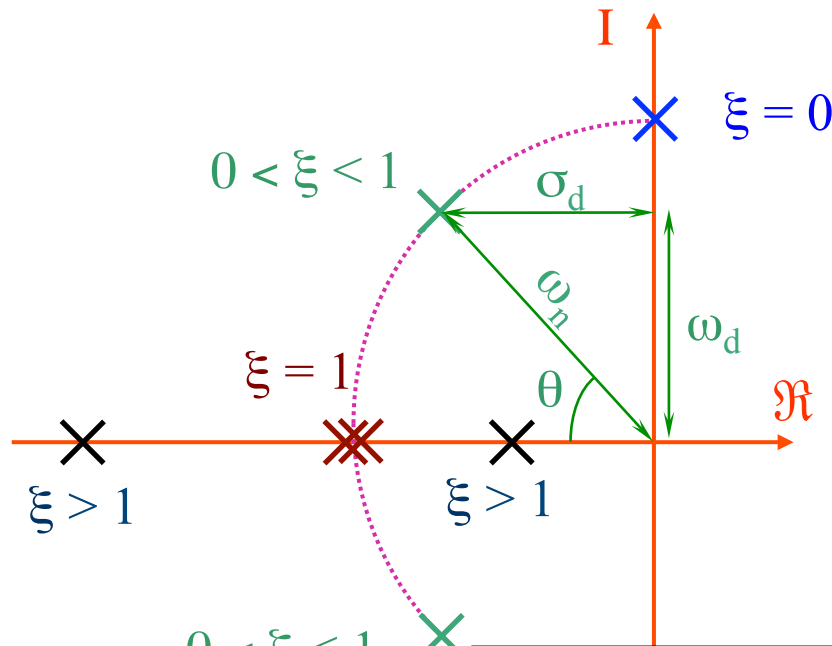
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden:
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



Relaciones

ω_d : frecuencia amortiguada = $\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

σ_d : factor decrecimiento = $\xi\omega_n$

$\xi = \cos(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden:
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Respuesta impulsional: $U(s) = 1 \xrightarrow{\text{green arrow}} Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$\xi = 0 \xrightarrow{\text{green arrow}} y(t) = K\omega_n \cdot \text{sen}(\omega_n t)$

$0 < \xi < 1 \xrightarrow{\text{green arrow}} y(t) = K \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\sigma_d t} \cdot \text{sen}(\omega_d t) \right]$

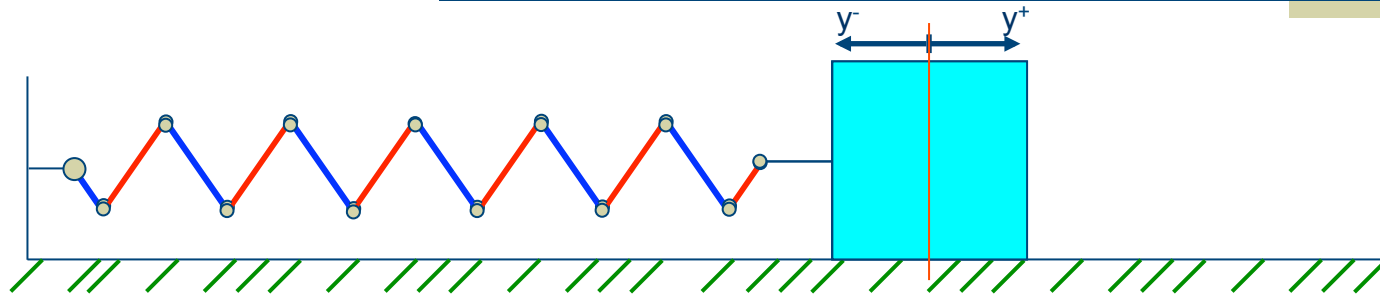
$\xi = 1 \xrightarrow{\text{green arrow}} v(t) = K \left[\omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_n t} \right]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

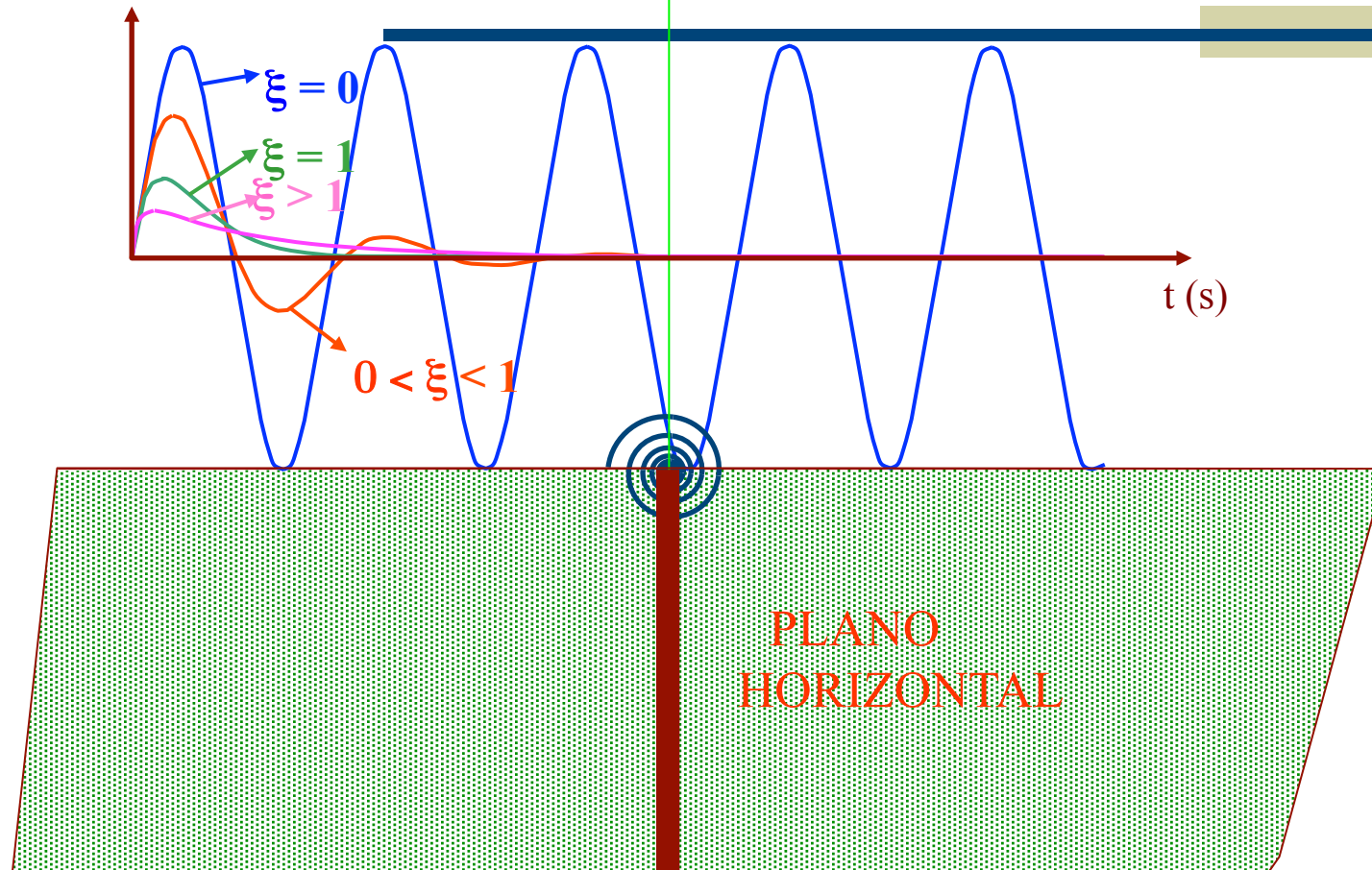


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Sistemas de segundo orden: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Respuesta ante escalón: $U(s) = A/s \rightarrow Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$\xi = 0 \rightarrow y(t) = A.K[1 - \cos(\omega_n t)]$

$0 < \xi < 1 \rightarrow y(t) = AK \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \theta)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right]$

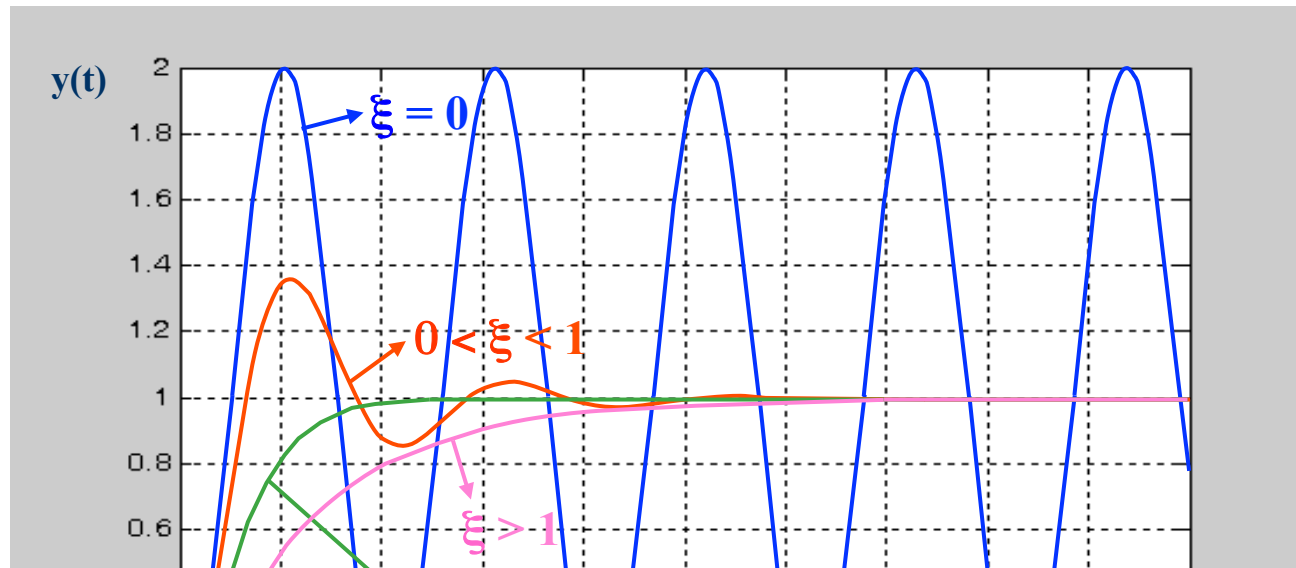
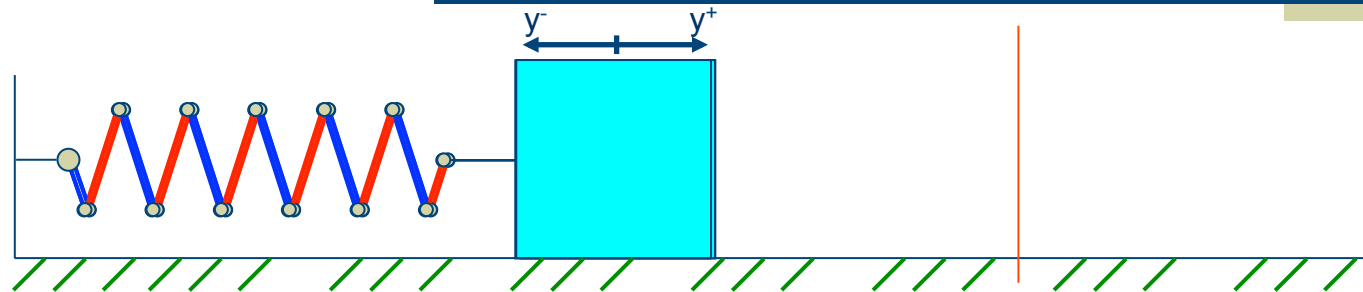
$\xi = 1 \rightarrow y(t) = AK \left[1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

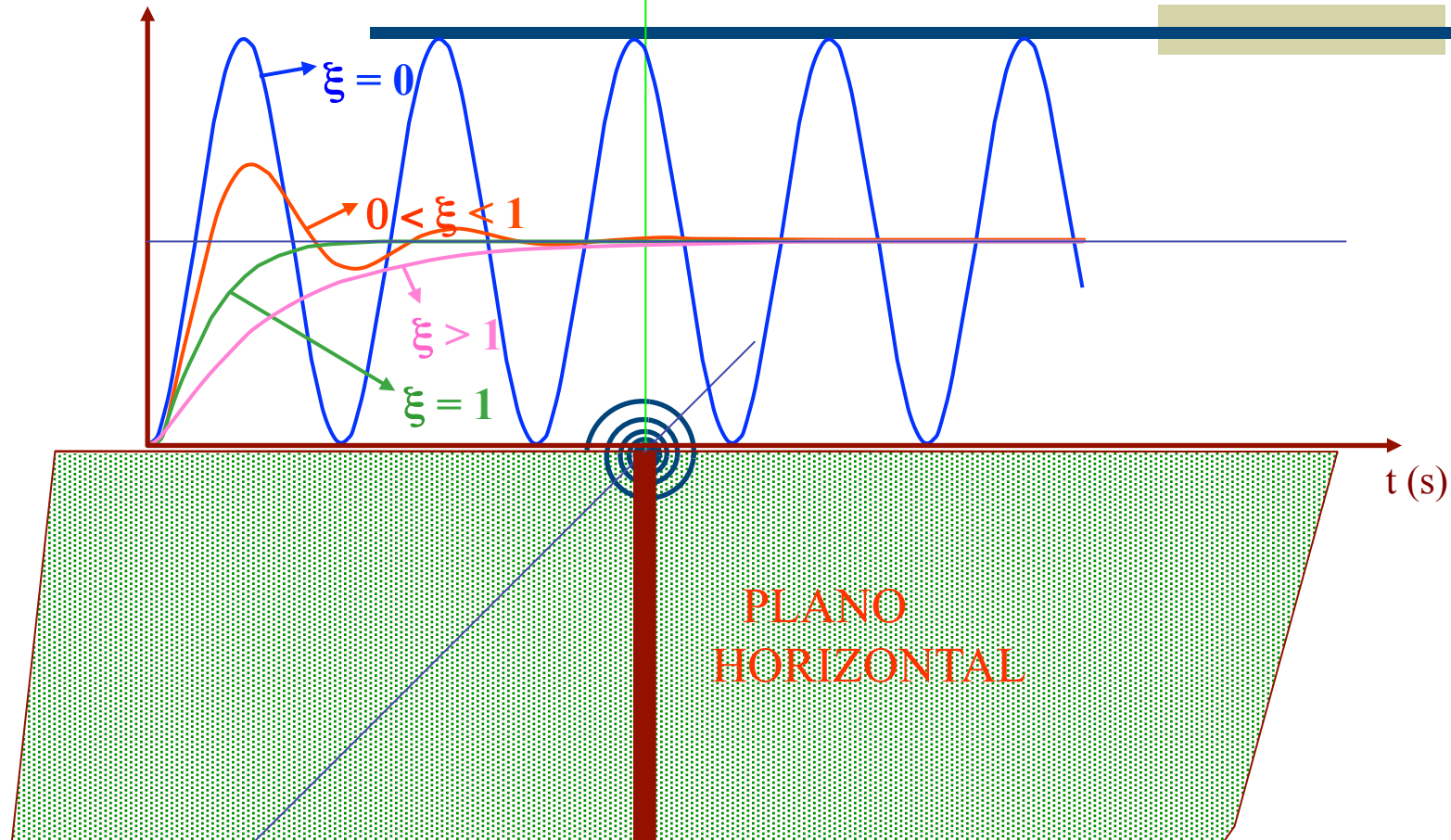


CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden



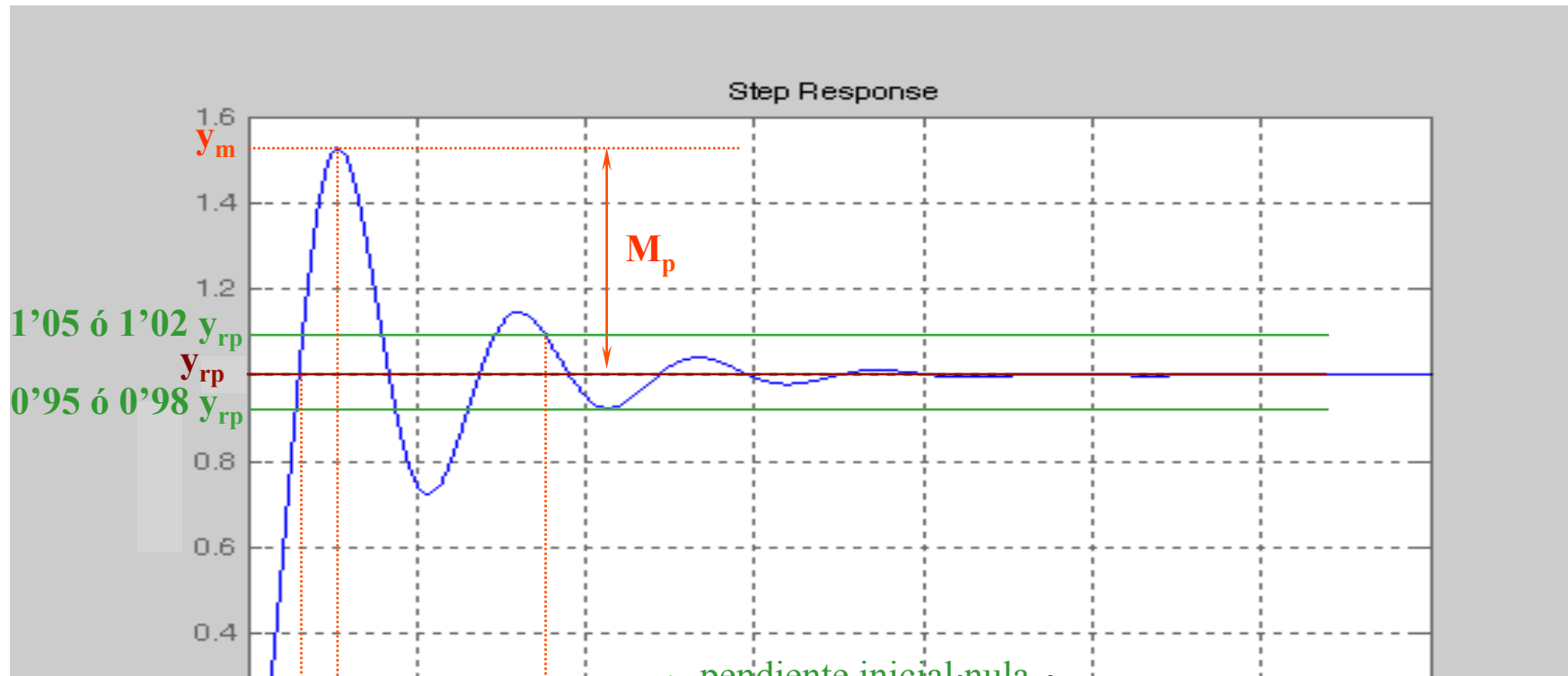
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Valores característicos de la respuesta transitoria



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta temporal de sistemas de 1º y 2º orden

Valores característicos de la respuesta transitoria

- Tiempo de pico (t_p): instante en el que se produce el máximo (y_m):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Pico de sobreoscilación (M_p): diferencia porcentual entre y_m e y_{rp} :

$$M_p (\%) = \frac{y_m - y_{rp}}{y_{rp}} \times 100 = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \times 100 = e^{-\frac{\pi}{\text{tg}(\theta)}} \times 100$$

- Tiempo de subida (t_r): instante en el que la señal llega por primera vez a y_{rp} :

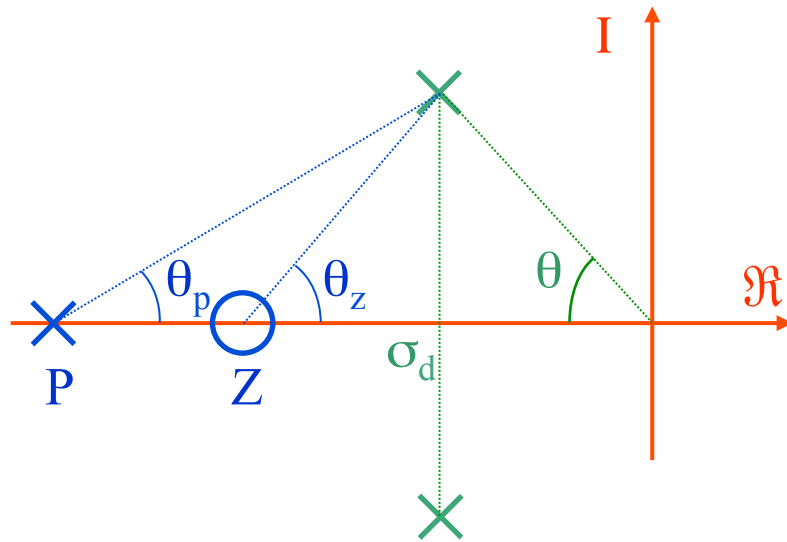
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas de 2º orden. Ceros y polos adicionales



Cero adicional

- t_r baja si θ_z sube \longleftrightarrow Z tiende a I
- t_p baja si θ_z sube \longleftrightarrow " " "
- M_p sube si θ_z sube \longleftrightarrow " " "
- t_s no tiene una relación directa con θ_z

Polo adicional

- t_r sube si θ_p sube \longleftrightarrow P tiende a σ_d
- t_s sube si θ_p sube \longleftrightarrow " " "

A la izquierda de σ_d



Si se pone a la derecha de σ_d el

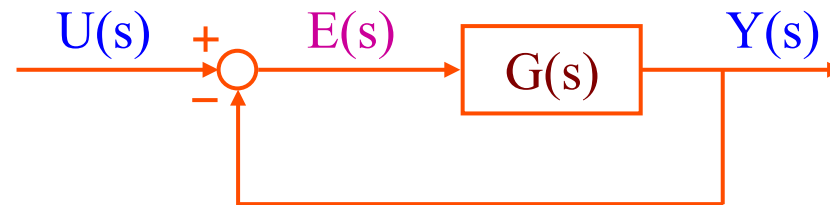
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Se estudia la capacidad del sistema para seguir las señales de referencia



$$G(s) = \frac{K \cdot N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ E(s) = U(s) - Y(s) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \\ \longrightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} U(s) \end{array}$$

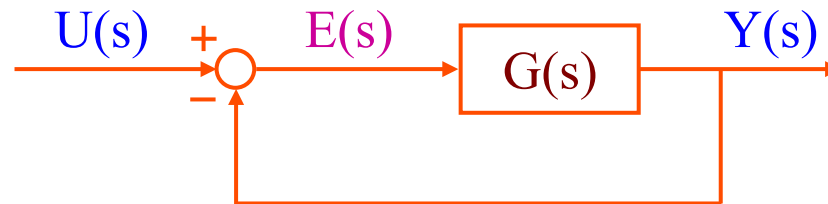
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Señales típicas de entrada:



Escalón: $u(t) = A$ \longrightarrow $U(s) = A/s$ \longrightarrow Error de posición: e_p

Rampa: $u(t) = \text{tg}(\theta)t$ \longrightarrow $U(s) = \text{tg}(\theta).1/s^2$ \longrightarrow Error de velocidad: e_v

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de posición (e_p)

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1+G(s)}$$

K_p : constante de error de posición = $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

$$e_p = \frac{A}{1+K_p}$$

Si $G(s)$ tiene cero polos en $s = 0 \Rightarrow K_p = \frac{K \cdot N(0)}{D(0)} \Rightarrow \uparrow K \Rightarrow \downarrow e_p$

Si $G(s)$ tiene un polo en $s = 0 \Rightarrow K_p = \infty \Rightarrow e_p = 0$

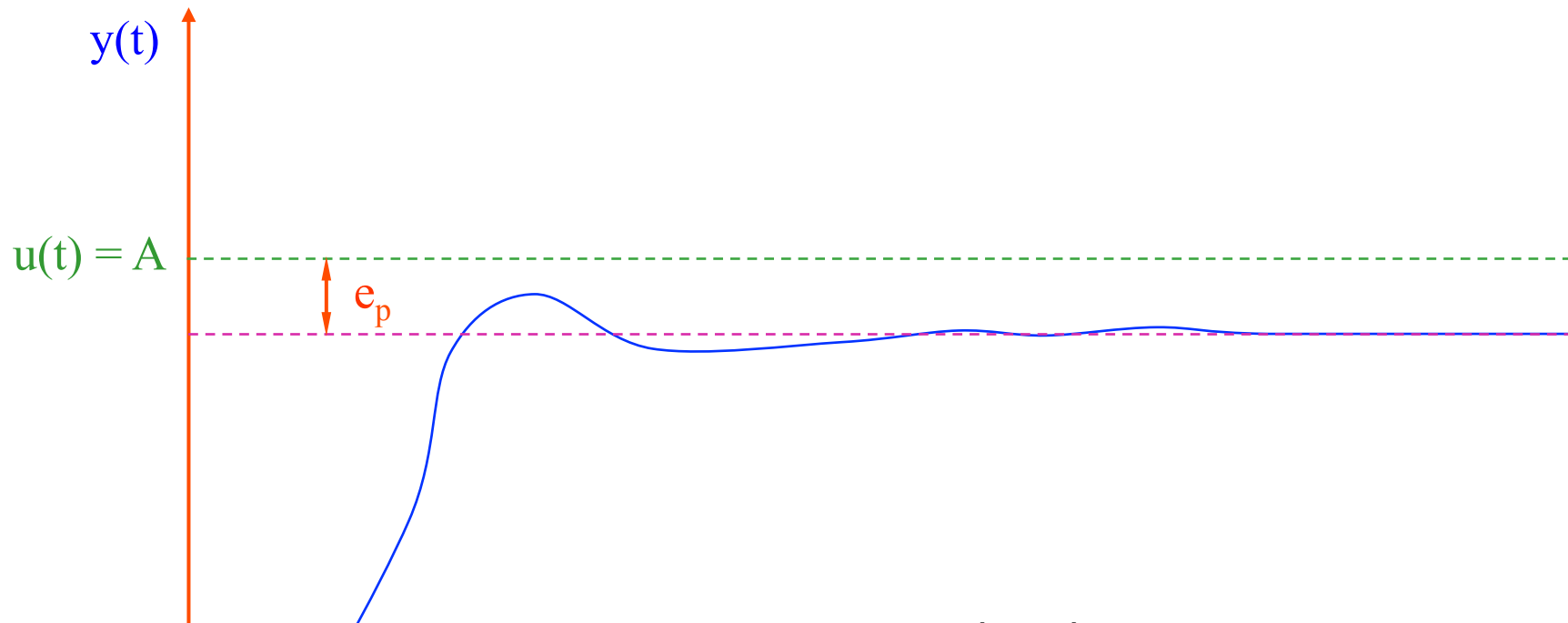
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de posición (e_p)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de velocidad (e_v)

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \text{tg}(\theta) \frac{1}{s^2} = \text{tg}(\theta) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$e_v = \frac{\text{tg}(\theta)}{K_v}$

K_v : constante de error de velocidad = $\lim_{s \rightarrow 0} s.G(s)$

Si $G(s)$ tiene cero polos en $s = 0 \Rightarrow K_v = 0 \Rightarrow e_v = \infty$

Si $G(s)$ tiene un polo en $s = 0 \Rightarrow K_v = \frac{K.N(0)}{\widehat{D}(0)} \Rightarrow \uparrow K \Rightarrow \downarrow e_v$

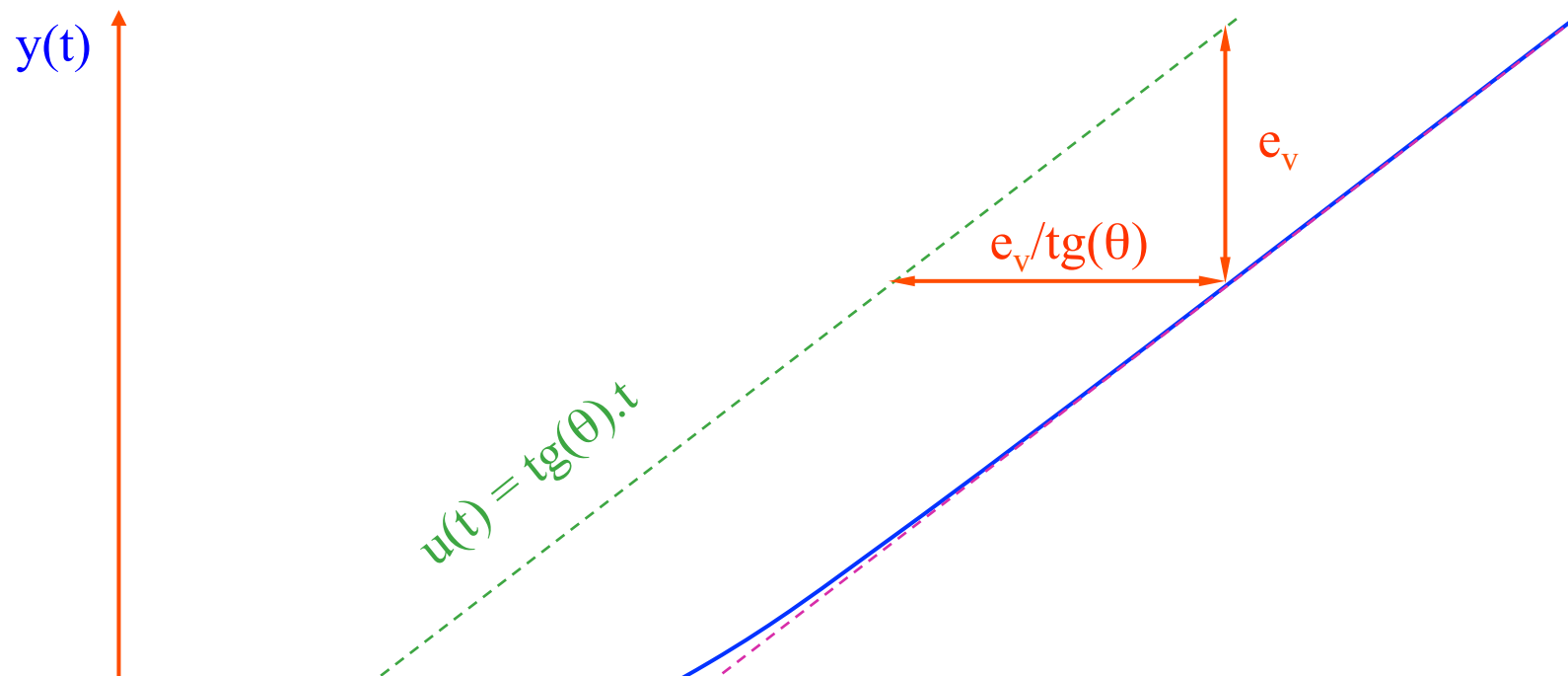
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de velocidad (e_v)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de aceleración (e_a)

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} B \frac{1}{s^3} = B \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$e_a = \frac{B}{K_a}$$

K_a : constante de error de aceleración = $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)$
(s)

Si $G(s)$ tiene cero polos en $s = 0 \Rightarrow K_a = 0 \Rightarrow e_a = \infty$

Si $G(s)$ tiene un polo en $s = 0 \Rightarrow K_a = 0 \Rightarrow e_a = \infty$

Si $G(s)$ tiene dos polos en $s = 0 \Rightarrow K_a = \frac{K \cdot N(0)}{K} \Rightarrow e_a = \frac{B}{K}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

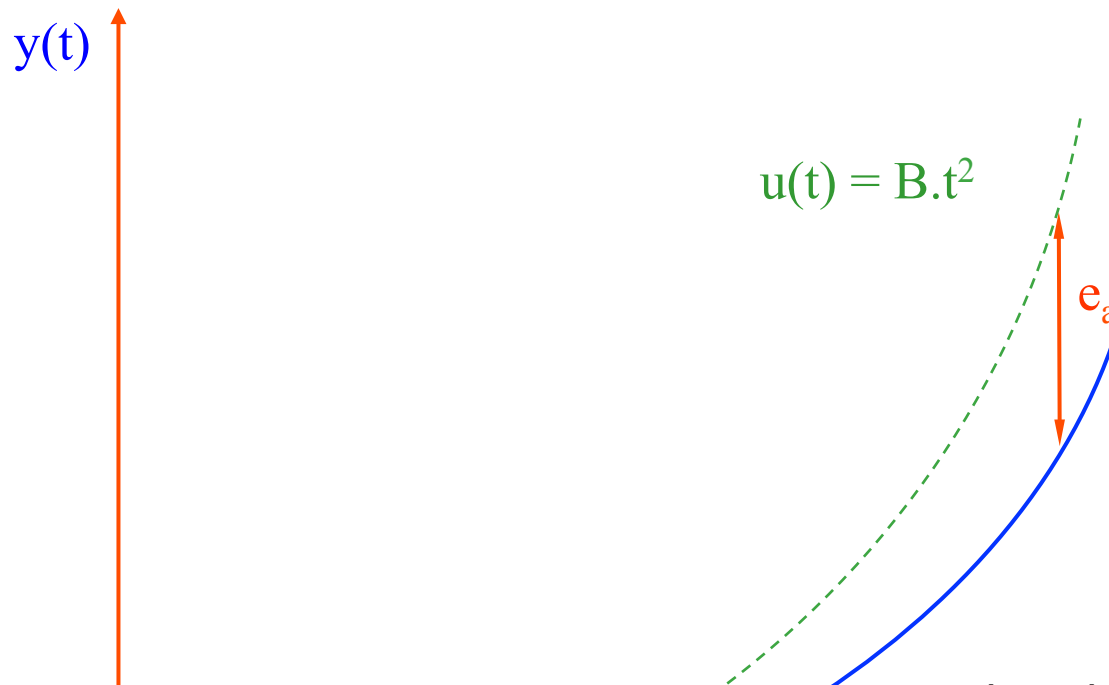
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

...

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Error de aceleración (e_a)



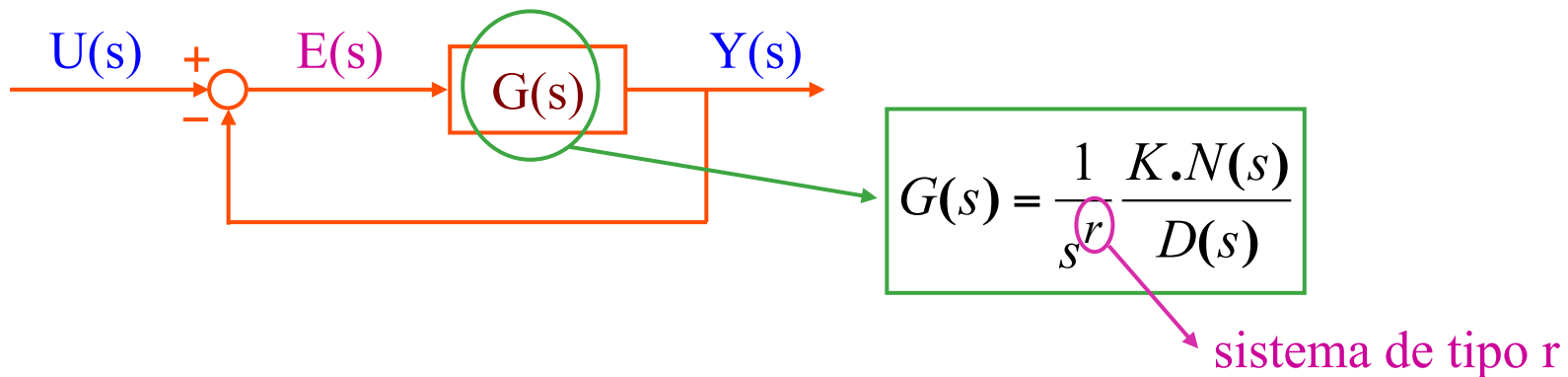
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Tipo de un sistema: número de polos en $s = 0$ de $G(s)$



Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$\frac{A}{1 + K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{tg(\theta)}{K}$	∞

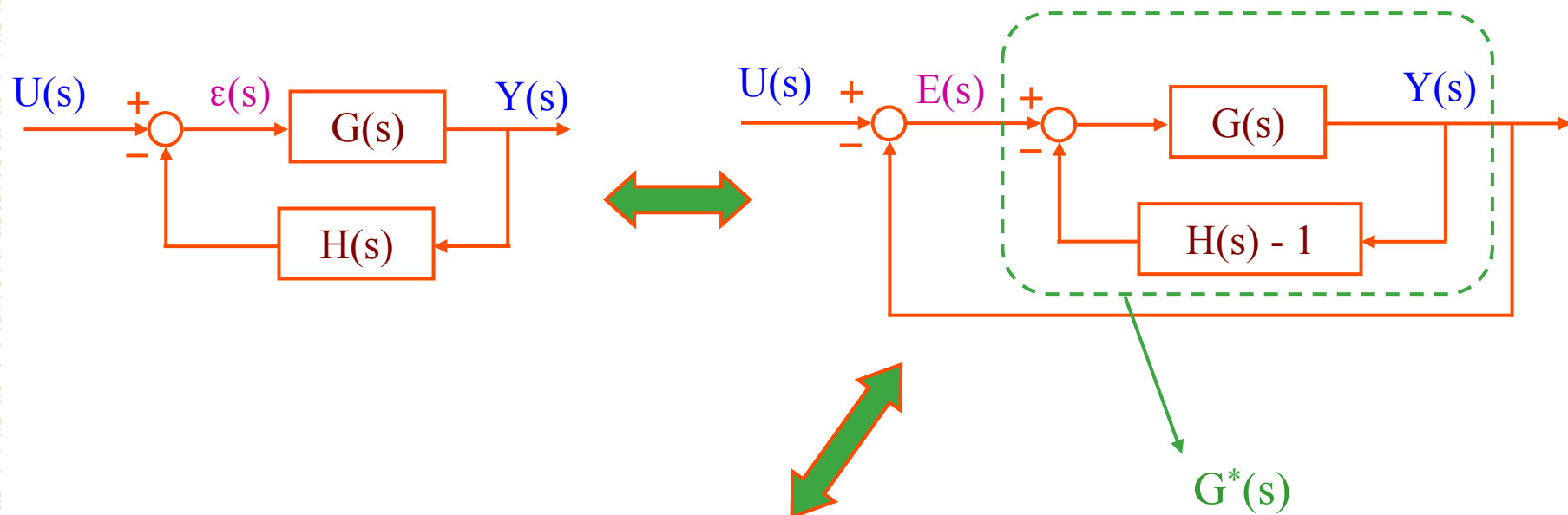
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Análisis de la respuesta estacionaria (errores)

Realimentación no unitaria



$U(s)$ $E(s)$ $Y(s)$
 CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

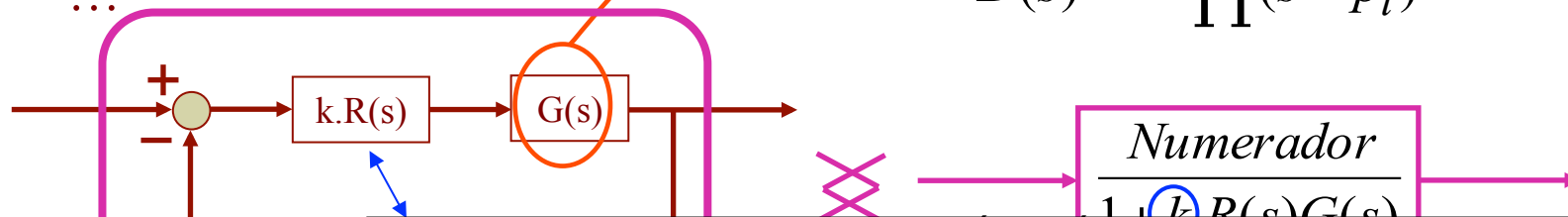
Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Es una técnica gráfica que permite ver la variación de los polos de un sistema EN LAZO CERRADO cuando cierto parámetro k varía de 0 a ∞ . Permite realizar estudios sobre:

- Régimen transitorio
- Estabilidad
- Diseño de reguladores
- ...

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \hat{K} \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$



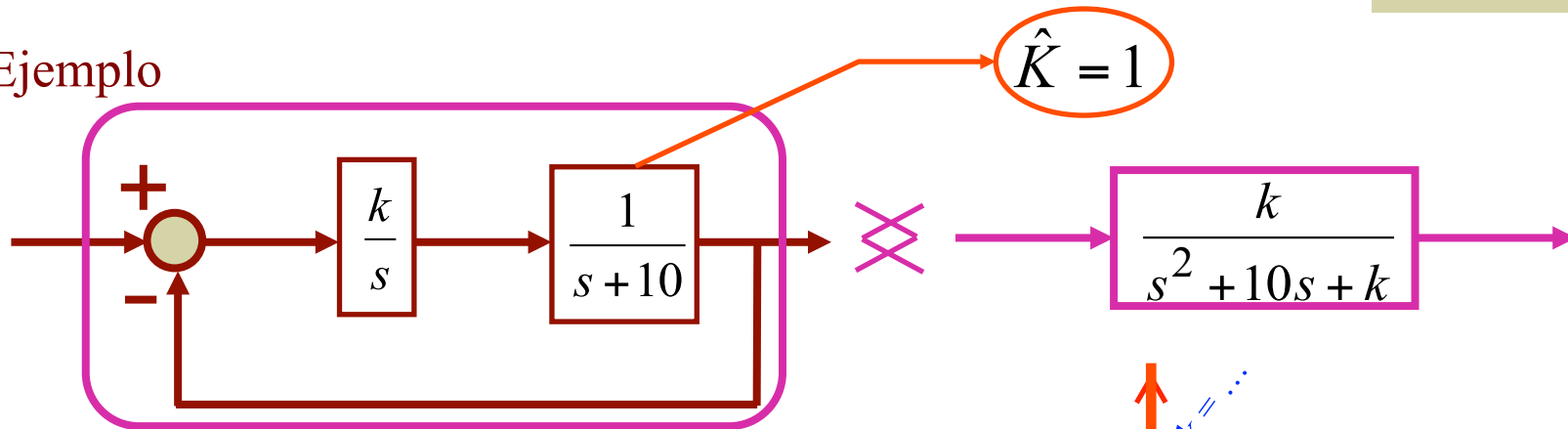
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

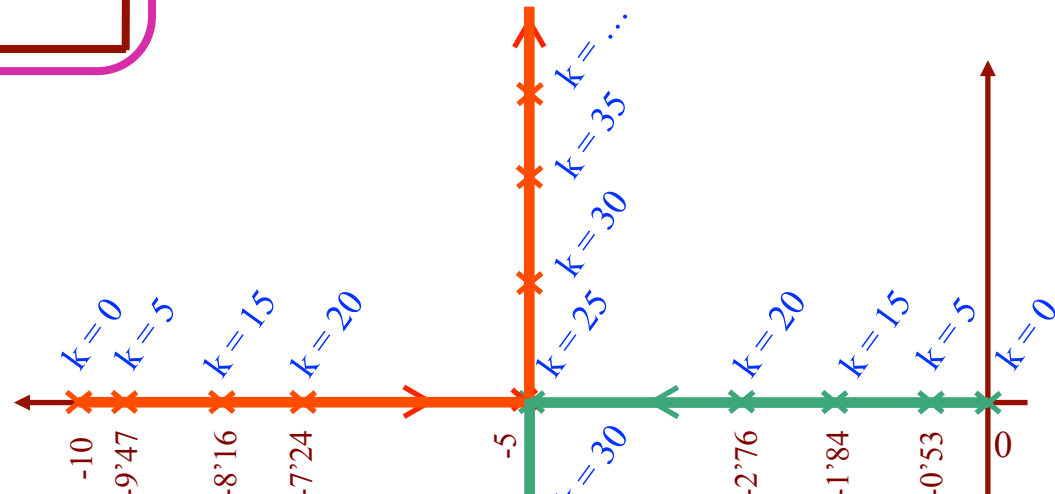
Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Ejemplo



k	Raíz 1	Raíz 2
0	-10	0
5	-9'47	-0'53
15	-8'16	-1'84
20	-7'24	-2'76



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

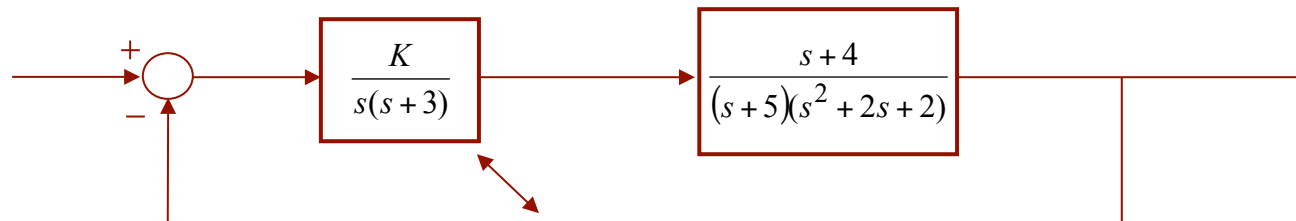
Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Reglas para su trazado

- Permiten un trazado aproximado del $\mathcal{L.R.}$
- Usan información en lazo abierto y en lazo cerrado
- Es necesaria cierta experiencia

EJEMPLO



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

- 1) Calcular los polos y los ceros del sistema en lazo abierto (l.a.)

$$z_1 = -4, p_1 = 0, p_2 = -3, p_3 = -5, p_4 = -1+j, p_5 = -1-j$$

- 2) El número de ramas es igual al número de polos en lazo abierto $\rightarrow 5$
- 3) Las ramas comienzan en los polos en lazo abierto ($k = 0$) y acaban en los ceros en lazo abierto ($k = \infty$). Si el n° de ceros (m) es menor que el n° de polos (n) entonces se supone que hay $n-m$ ceros en el infinito $\rightarrow m = 1, n = 5$
- 4) Los puntos del eje real que pertenecen al $\mathcal{L.R.}$ son los que cumplen que el n° de polos reales más el número de ceros reales (l.a.) situados a su derecha es impar.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

- 5) El $\mathcal{L.R.}$ es simétrico respecto al eje real
- 6) Las ramas del $\mathcal{L.R.}$ que terminan en el infinito son asintóticas a rectas cuyos ángulos con el eje real son: $\theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{n-m}$; $q = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$

$$\left. \begin{array}{l} n = 5 \\ m = 1 \\ n - m - 1 = 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = 0 \longrightarrow q_{a1} = p/4 \\ q = 1 \longrightarrow q_{a2} = 3p/4 \\ q = 2 \longrightarrow q_{a3} = 5p/4 \\ q = 3 \longrightarrow q_{a4} = 7p/4 \end{array} \right.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

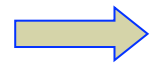
7) Las asíntotas cortan al eje real en un punto situado a una distancia dada por:

$$\sigma_o = \frac{\sum \text{polos en l.a.} - \sum \text{ceros en l.a.}}{n - m}$$

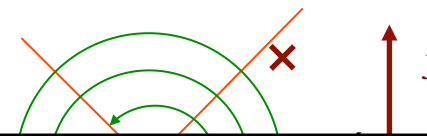
$$n = 5$$

$$m = 1$$

$$n - m = 4$$



$$s_o = \frac{0 - 3 - 5 - 1 + j - 1 - j - (-4)}{4} = -1,5$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

8) Puntos de confluencia y dispersión

Son los puntos donde las ramas del $\mathcal{L}\mathcal{R}$ entran o salen del eje real

Coinciden con los máximos y mínimos relativos de K

$$1 + K.R(s).G(s) = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{R(s)G(s)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow s \Rightarrow K$$

$$K = \frac{1}{\frac{s(s+3)}{(s+4)} \frac{(s+5)(s^2+2s+2)}}{-1} \Rightarrow K = \frac{-s(s+3)(s+5)(s^2+2s+2)}{(s+4)}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow 2s^5 + 25s^4 + 113s^3 + 221s^2 + 184s + 60 = 0$$

(1.234 + 0.668j) No puede ser

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

9) Puntos de intersección del $\mathcal{L.R.}$ con el eje imaginario

$$s = j\omega \longrightarrow 1 + K.R(s).G(s) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{cases} \longrightarrow K \text{ y } \omega$$

$$1 + K \frac{1}{s(s+3)} \frac{(s+4)}{(s+5)(s^2+2s+2)} = 0 \longrightarrow$$

$$s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + (30 + K)s + 4K = 0 \xrightarrow{s = j\omega}$$

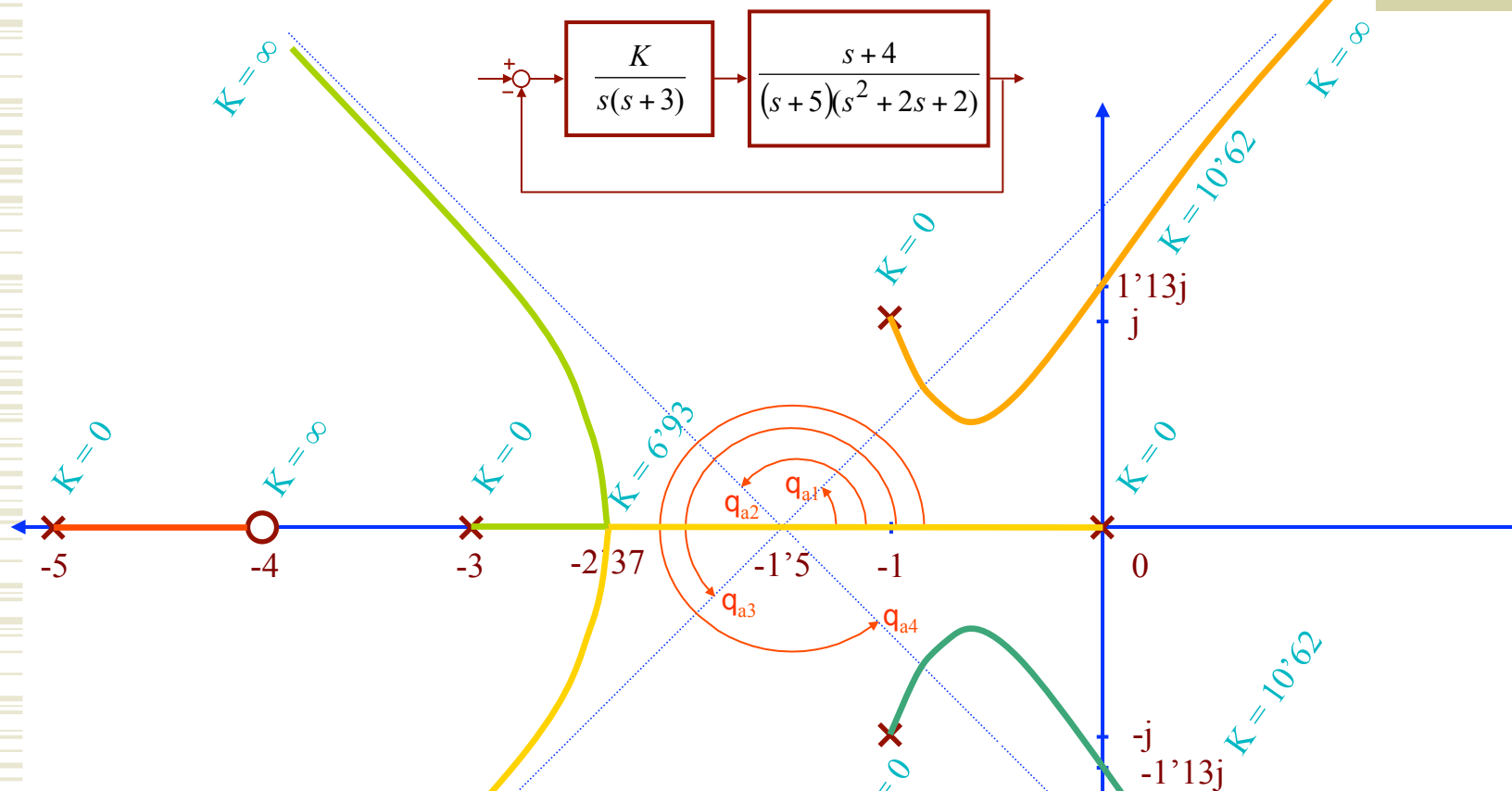
$$\omega^5 \cdot j + 10 \cdot \omega^4 - 33 \cdot \omega^3 \cdot j - 46 \cdot \omega^2 + (30 + K) \cdot \omega j + 4K = 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

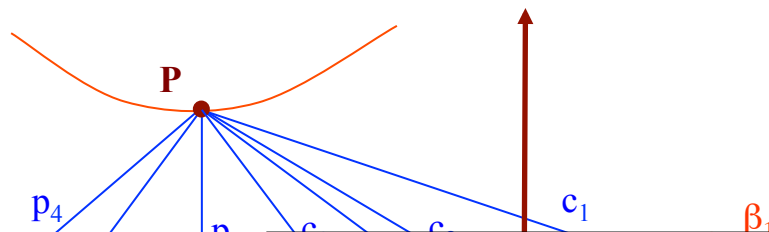
Propiedades:

Todos los puntos del $\mathcal{L.R.}$ cumplen que:

$$\angle R(s)G(s) = (2q + 1)\pi; \quad q \in \mathbb{Z}$$

La ganancia K que provoca la aparición de un punto del $\mathcal{L.R.}$ es:

$$K = \frac{1}{|G(s)R(s)|}$$



$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = (2q + 1)\pi$$

pudiendo ser $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

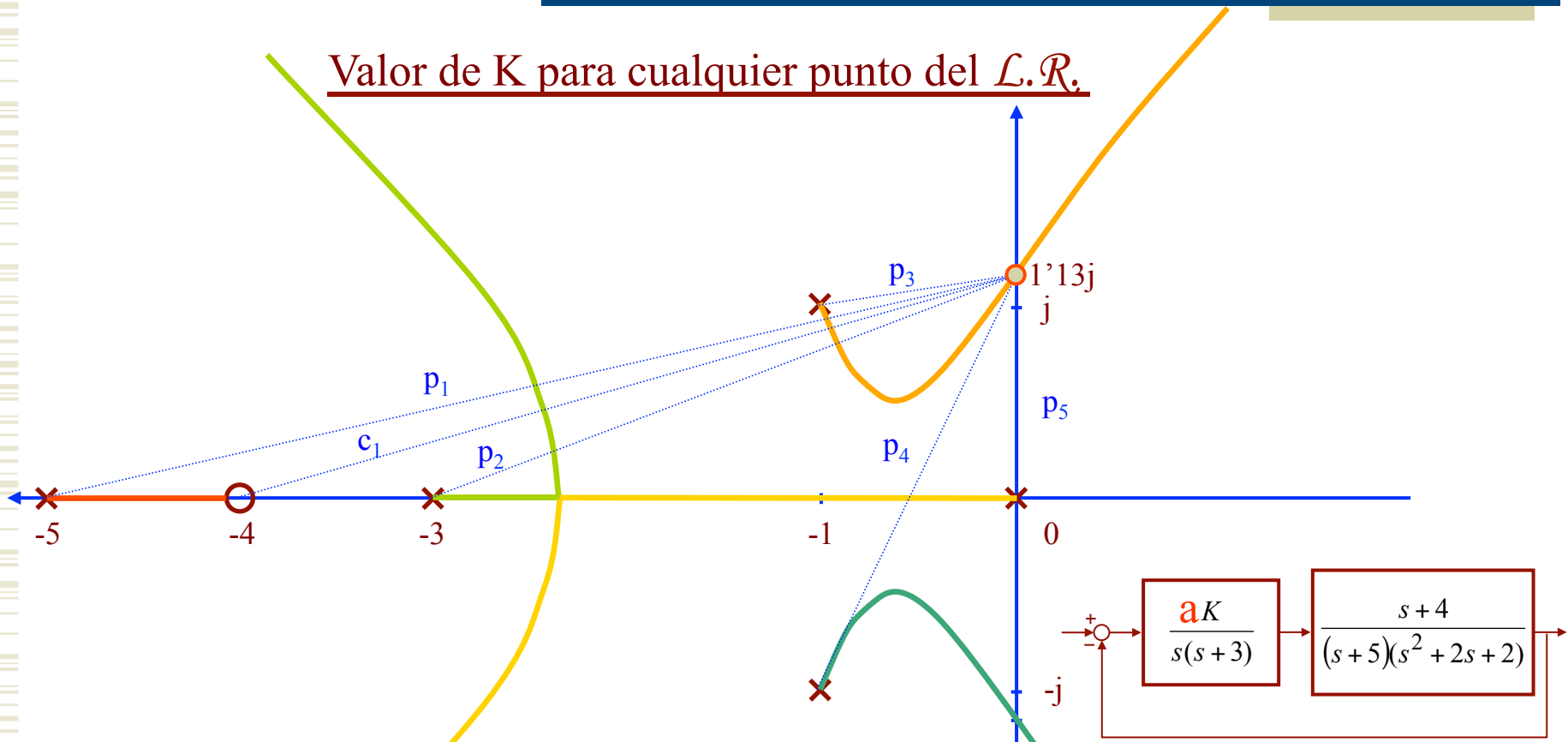
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Valor de K para cualquier punto del $\mathcal{L.R.}$



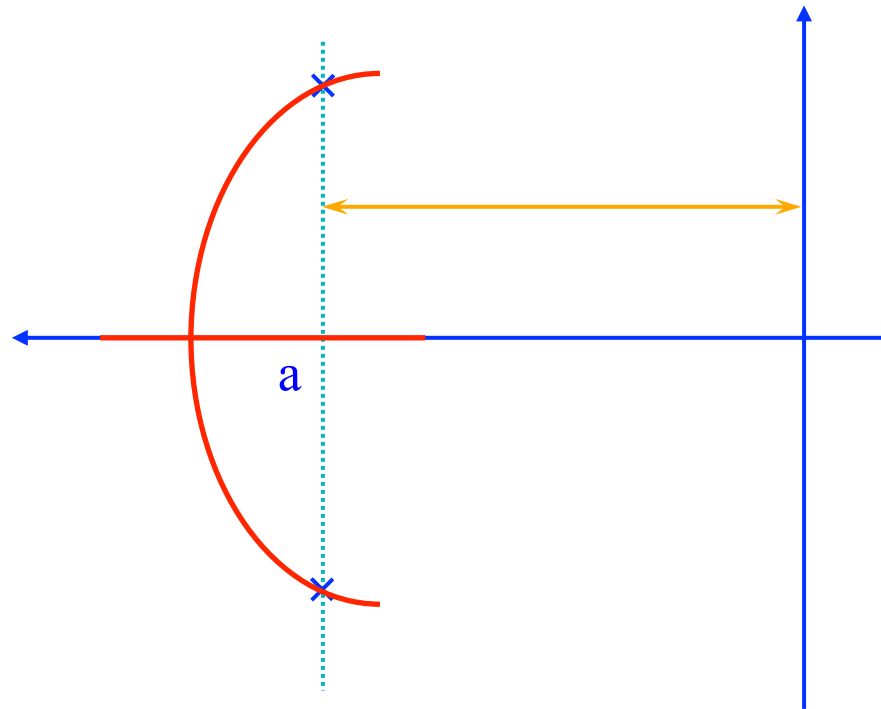
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Cálculo de K que da lugar a polos con parte real predeterminada



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces

Cálculo de K que de lugar a polos con parte real predeterminada

Ejemplo

¿Qué valores de K provocan la aparición de polos con parte real -3?

$$s^5 + 10s^4 + 33s^3 + 46s^2 + (30 + K)s + 4K \quad (\text{obtenido anteriormente}) \quad \longrightarrow \quad s_1 = s + 3$$

$$\longrightarrow (s_1 - 3)^5 + 10(s_1 - 3)^4 + 33(s_1 - 3)^3 + 46(s_1 - 3)^2 + (30 + K)(s_1 - 3) + 4K = 0$$

$$\xrightarrow{\text{operando}} s_1^5 - 5s_1^4 + 3s_1^3 + 19s_1^2 - (30 - K)s_1 + K \quad \xrightarrow{s_1 = j\omega}$$

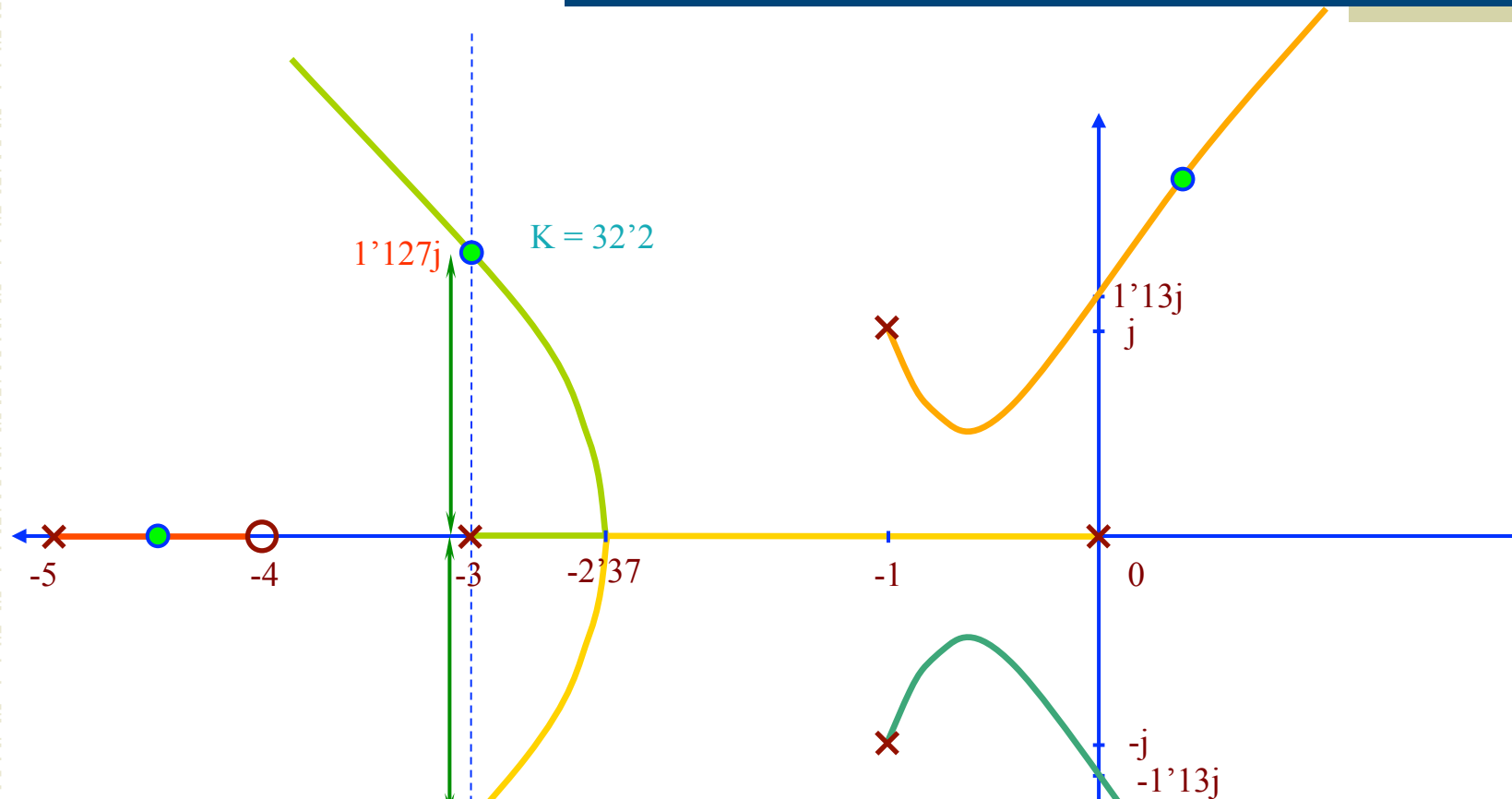
$$\omega^5 \cdot j - 5\omega^4 - 3\omega^3 \cdot j - 19\omega^2 - (30 - K)\omega j + K = 0 \quad \longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \text{parte real} = 0 \\ \text{parte imaginaria} = 0 \end{array} \right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Respuesta temporal: Lugar de las Raíces



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99