



Lógica

Unificación y Resolución con UMG



Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de informática

Curso académico 2013-2014
Pepa Hernández

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Punto de partida

- EL objetivo es aplicar la regla de resolución para analizar la satisfacibilidad de fórmulas de primer orden en forma clausular.
- Ya vimos que para aplicar la regla de resolución es fundamental disponer de un literal en una cláusula que sea "complementario" con otro literal de otra cláusula.
- Con cláusulas proposicionales esto era muy sencillo, pero con cláusulas con variables la solución es más complicada.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sustituciones

- Una *sustitución* es una función finita de un conjunto de variables de un lenguaje en el de términos. Se representa como $\alpha = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\}$ donde x_1, \dots, x_n son variables diferentes y t_1, \dots, t_n son términos.
- Un par x_i/t_i se denomina *ligadura*
- Una sustitución que no sustituye ninguna variable se llama *sustitución vacía* (λ)
- Una sustitución que sustituye variables por otras variables se denomina *renombrado*

Ejemplos: $Ctes = \{a, b, c, d\}$, $Var = \{x, y, z, w\}$, $Func = \{f/1, h/2\}$

□ $\alpha_1 = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$

□ $\alpha_2 = \{x/a, y/a, z/h(b,c), w/f(d)\}$

□ $\alpha_3 = \{x/v, z/w\}$ (renombrado)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sustituciones

- Dada una sustitución $\alpha = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, se denomina **aplicación de α a una fórmula F** (o a un término t) a la fórmula obtenida reemplazando simultáneamente cada ocurrencia en F (o en t) de x_i por t_i , para cada $x_i/t_i \in \alpha$.
 - $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$
 - $P(x, y, z) \alpha = P(f(a), f(a), h(b, f(a)))$ *incorrecto*
 - $P(x, y, z) \alpha = P(f(a), x, h(b, y))$ *correcto*
- Una fórmula F' es **instancia** de otra F si existe una sustitución no vacía α tal que $F' = F\alpha$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Composición de sustituciones

- Dadas dos sustituciones $\alpha = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ y $\beta = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$ su *composición* $\alpha\beta$ se define eliminando del conjunto

$$\{x_1/t_1\beta, \dots, x_n/t_n\beta, y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$$

- las ligaduras $x_i/t_i\beta$ tales que $x_i \equiv t_i\beta$,
 - y las ligaduras y_i/s_i tales que $y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$
-
- Ejemplo: $\alpha = \{x/3, y/f(x,1)\}$ y $\beta = \{x/4\}$
 - $\alpha\beta = \{x/3, y/f(4,1)\}$
 - $\beta\alpha = \{x/4, y/f(x,1)\}$
-
- Propiedades de la composición:
 - $(F\alpha)\beta = F(\alpha\beta)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Unificadores

- Una sustitución α es un *unificador* de dos fórmulas A y B si $A\alpha = B\alpha$. En este caso se dice que A y B son unificables
- Un unificador α de A y B se denomina *unificador de máxima generalidad (umg)* sii para cualquier otro unificador β de A y B existe alguna sustitución γ tal que $\beta = \alpha\gamma$
- Si dos fórmulas son unificables entonces tienen umg
- El umg de dos fórmulas es único (salvo renombrado)
- Ejemplo:
 - $A \equiv P(x, f(x, g(y)), z)$ y $B \equiv P(r, f(r, u), a)$
 - $\alpha_1 = \{x/r, u/g(y), z/a\}$ y $\alpha_2 = \{x/a, r/a, y/b, u/g(b), z/a\}$
 - $A\alpha_1 = B\alpha_1 = P(r, f(r, g(y)), a)$
 - $A\alpha_2 = B\alpha_2 = P(a, f(a, g(b)), a)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Algoritmo de Unificación

Sean A y B dos átomos con el mismo símbolo de predicado:

(1) $\alpha = \lambda$

(2) Mientras $A\alpha \neq B\alpha$:

(2.1) Encontrar el símbolo más a la izquierda en $A\alpha$ tal que el símbolo correspondiente en $B\alpha$ sea diferente

(2.2) Sean t_A y t_B los términos de $A\alpha$ y $B\alpha$ que empiezan con esos símbolos:

(a) Si ni t_A ni t_B son variables o, si uno de ellos es una variable que aparece en el otro \rightarrow terminar con fallo (A y B no son unificables)

(b) En otro caso, sea t_A una variable \rightarrow el nuevo α es el resultado de $\alpha\{t_A/t_B\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Algoritmo de Unificación

- Ejemplo: $A \equiv P(x, x)$ y $B \equiv P(f(a), f(b))$

α	$A \alpha$	$B \alpha$	(t_A, t_B)
λ	$P(x, x)$	$P(f(a), f(b))$	$(x, f(a))$
$\{x/f(a)\}$	$P(f(a), f(a))$	$P(f(a), f(b))$	(a, b)

Fallo \rightarrow A y B no son unificables

- Ejemplo: $A \equiv P(x, f(y))$ y $B \equiv P(z, x)$

α	$A \alpha$	$B \alpha$	(t_A, t_B)
λ	$P(x, f(y))$	$P(z, x)$	(x, z)
$\{x/z\}$	$P(z, f(y))$	$P(z, z)$	$(f(y), z)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resolución con variables

- **Regla de resolución con umg:** Sean $L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C_1$ y $\neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee C_2$ dos cláusulas, donde todos los L_{ij} son literales con el mismo símbolo de predicado. Puede deducirse una nueva cláusula $(C_1 \rho_1 \vee C_2 \rho_2)\beta$, llamada *resolvente*, donde
 - ρ_1 y ρ_2 son renombrados de todas las variables de cada cláusula que garantizan la no repetición de nombres entre ellas
 - β es umg de $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m' \rho_2\}$
- La regla de resolución con umg se apoya en una versión de la **regla de factorización** para LPO: Dada una cláusula $L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C$, siendo L_1, \dots, L_n literales con el mismo símbolo de predicado, puede deducirse una nueva cláusula $L \vee C\beta$ donde
 - β es unificador de L_1, \dots, L_n

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El Método de Resolución con UMG

- El método se basa en la aplicación sucesiva de la regla de resolución con umg, definiendo lo que se conoce también como procedimiento de saturación.
- **Procedimiento de saturación:** Sea C un conjunto de cláusulas
 - 1) Sea $S_0 = C$ y $n = 0$
 - 2) Si $\square \in S_n \rightarrow C$ es insatisfacible
 - 3) Construir $S_{n+1} = \{\text{resolventes de } C1 \text{ y } C2 / C1 \in (S_0 \cup \dots \cup S_n), C2 \in S_n\}$
 - 4) Si $S_{n+1} = \emptyset$ o $S_{n+1} \subset S_0 \cup \dots \cup S_n \rightarrow C$ es satisfacible
 - 5) Hacer $n = n+1$ y repetir desde 2)
- El paso 3) requiere considerar todos los posibles factores F , de predicados distintos de las cláusulas $C1$ y $C2$ sobre los que se pueden

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

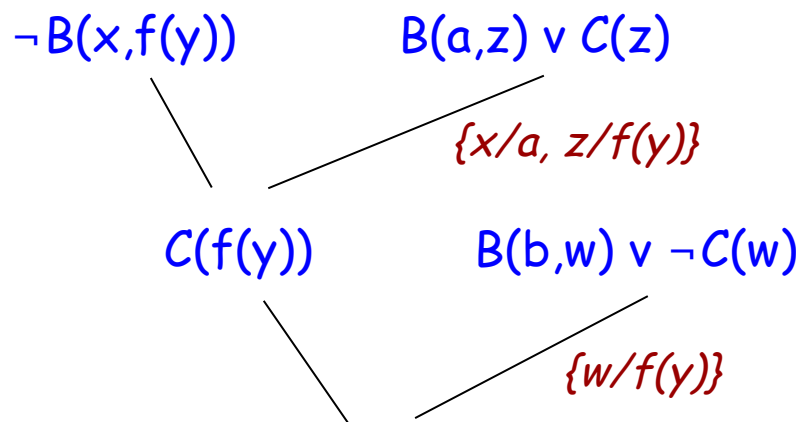
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

partir de un conjunto de cláusulas

Resolución con variables

- Pueden construirse árboles de resolución en los que los resolventes de cada dos cláusulas se obtienen en un paso de resolución con umg
- Por cada paso de resolución en instancias básicas puede definirse un paso de resolución con umg

Ejemplo: $C_1: \neg B(x, f(y))$ $C_2: B(a, z) \vee C(z)$ $C_3: B(b, w) \vee \neg C(w)$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

con umg

Resolución con variables

- El método basado en la regla de resolución con umg **es correcto**
 - Si por su aplicación deducimos \square , entonces el conjunto inicial de cláusulas es insatisfacible (*demostración en el anexo al final del tema*).
- El método basado en la regla de resolución con umg **es completo**
 - Si el conjunto inicial es insatisfacible, entonces podemos asegurar que con la aplicación sucesiva de la regla de resolución llegaremos a deducir la cláusula vacía (*demostración en el anexo al final del tema*).

- Un conjunto de cláusulas es insatisfacible sii se puede deducir \square a partir de él por resolución con umg

(demostración en el anexo al final del tema)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Anexo: Corrección de la resolución con umg

- **Corrección de la regla de resolución con umg:** La estructura deductiva $[\forall x_1 \dots x_p (L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C_1), \forall y_1 \dots y_q (\neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee C_2)] \vdash \forall z_1 \dots z_r (C_1 \rho_1 \vee C_2 \rho_2) \beta$ es correcta
 - siendo $x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_q$ y $z_1 \dots z_r$ todas las variables de las respectivas cláusulas
 - ρ_1 y ρ_2 renombrados de $x_1 \dots x_p$ y $y_1 \dots y_q$ respectivamente y
 - β es umg de $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m \rho_2\}$

Demostración:

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\forall x_1 \dots x_p (L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C_1)$ | Hipótesis |
| 2. $\forall y_1 \dots y_q (\neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee C_2)$ | Hipótesis |
| 3. $F \vee \dots \vee F \vee E_1$ | Sustitución u_i/t_i tal que $L_i = L_j$ y renombrado de variables |
| 4. $\neg F \vee \dots \vee \neg F \vee E_2$ | Sustitución v_i/t_i tal que $L_i' = L_j'$ y renombrado de variables |
| 5. $F \vee E_1$ | Intercambio $F \vee F$ por F (Idempotencia) (n-1 veces) |
| 6. $\neg F \vee E_2$ | Intercambio $\neg F \vee \neg F$ por $\neg F$ (Idempotencia) (m-1 veces) |
| 7. $E_1 \vee E_2$ | Corte |

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Anexo: Completud de la resolución con umg I

- **Lema de elevación:** Si B es resolvente de B_1 y B_2 , ambas instancias básicas de C_1 y C_2 , respectivamente, entonces
 - Existe una cláusula C tal que B es instancia básica suya
 - C resulta de un paso de resolución entre copias de C_1 y C_2 sobre un literal L , factor común a ambas: $C_1 = L_1 \vee \dots \vee L_n \vee D_1$, $C_2 = \neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee D_2$, $C = (D_1 \rho_1 \vee D_2 \rho_2) \theta$, tal que ρ_1 y ρ_2 son renombrados y θ es un umg: $\{L_1 \rho_1 \dots L_n \rho_1\} \theta = \{\neg L_1' \rho_2 \dots \neg L_m' \rho_2\} \theta = L$
- **Demostración:**
 1. Existen $B_1 = F \vee \dots \vee F \vee E_1$ y $B_2 = \neg F \vee \dots \vee \neg F \vee E_2$ tal que $B = E_1 \vee E_2$
 2. Existen σ_1, σ_2 , $\text{Rango}(\sigma_1) = \text{Rango}(\sigma_2) = \emptyset$ (e.d. sin variables) tal que: $C_1 \sigma_1 = B_1$ y $C_2 \sigma_2 = B_2$
 3. Existen σ_1' y ρ_1 , tal que $C_1 \rho_1 \sigma_1' = C_1 \sigma_1$ y ρ_1 es un renombrado de todas las variables de C_1
 4. Existen σ_2' y ρ_2 , tal que $C_2 \rho_2 \sigma_2' = C_2 \sigma_2$ y ρ_2 es un renombrado de todas las variables de C_2 sin variables compartidas con ρ_1 (e.d. $\text{Rango}(\rho_2) \cap \text{Rango}(\rho_1) = \emptyset$)
 5. $C_1 \rho_1 \sigma_1' = C_1 \rho_1 (\sigma_1' \sigma_2')$, pues $C_1 \rho_1 (\sigma_1' \sigma_2') = C_1 (\rho_1 \sigma_1') \sigma_2'$ (asociatividad) = $C_1 \rho_1 \sigma_1'$, dado que $\text{Rango}(\sigma_1') = \emptyset$ (las ligaduras de σ_2' son irrelevantes)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

... sea $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$, es una sustitución básica pues σ_1 y σ_2 lo son

Anexo: Completud de la resolución con umg II

- Demostración del lema de elevación (continuación):
 8. $B_1 = C_1 \rho_1 \sigma = (L_1 v \dots v L_n v D_1) \rho_1 \sigma = L_1 \rho_1 \sigma v \dots v L_n \rho_1 \sigma v D_1 \rho_1 \sigma = F v \dots v F v E_1$ y $B_2 = C_2 \rho_2 \sigma = (\neg L_1' v \dots v \neg L_m' v D_2) \rho_2 \sigma = \neg L_1' \rho_2 \sigma v \dots v \neg L_m' \rho_2 \sigma v D_2 \rho_2 \sigma = \neg F v \dots v \neg F v E_2$
 9. $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1\} \sigma = F$ y $\{\neg L_1' \rho_2, \dots, \neg L_m' \rho_2\} \sigma = \neg F$, luego $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m' \rho_2\} \sigma = F$
 10. Si $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m' \rho_2\}$ es unificable, existe un umg θ para este conjunto
 11. Sea $L = \{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m' \rho_2\} \theta$, luego L es factor de $C_1 \rho_1$ y $C_2 \rho_2$
 12. Si θ es umg y σ un unificador cualquiera, existe ω tal que $\theta \circ \omega = \sigma$
 13. $B = E_1 v E_2 = D_1 \rho_1 \sigma v D_2 \rho_2 \sigma = (D_1 \rho_1 v D_2 \rho_2) \sigma = (D_1 \rho_1 v D_2 \rho_2) \theta \omega$
 14. Sea $C = (D_1 \rho_1 v D_2 \rho_2) \theta$, entonces $B = C \omega$ y $C \omega$ es instancia básica de C pues $\theta \circ \omega = \sigma$ y σ es una sustitución básica.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Anexo: Completud de la resolución con umg III

- Lema: Si un conjunto C de cláusulas es insatisfacible, se deduce de él \square por resolución con umg
 1. Si C es insatisfacible, entonces de un conjunto de instancias básicas cuyo se deduce \square por resolución
 2. Existe un árbol de resolución de \square con profundidad n
 3. Si $n=1$ la resolución entre instancias básicas permite definir un paso de resolución con umg entre cláusulas de C (Lema de elevación)
 4. Si $n>1$, existe un conjunto de resolventes R de cláusulas de C , tal que $C \cup R$ tiene un árbol de resolución de \square con profundidad $n-1$:
 - Para cada paso de resolución de nivel 1, sean B_1 y B_2 instancias básicas de cláusulas C_1 y C_2 de C las que se resuelven dando B
 - Existe un paso de resolución con umg entre C_1 y C_2 con resolvente RC tal que B es instancia básica de RC (Lema de elevación). Sea R el conjunto de dichas cláusulas RC .
 - Si se eliminan todos los pasos de resolución que dan instancias B , los nuevos nodos de nivel 0 serán instancias básicas de R o de C .
 - El conjunto $C \cup R$ tiene un árbol de resolución de \square con profundidad $n-1$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Anexo: Completud de la resoluci3n con umg IV

- Teorema: Un conjunto de cl1usulas es insatisfacible sii se deduce de 3l \square por resoluci3n con umg
 - ⇒ Si el conjunto de cl1usulas es insatisfacible entonces se deduce de 3l \square por resoluci3n con umg (lema anterior)
 - ⇐
 1. $C \vdash \square$ aplicando la regla de resoluci3n con umg
 2. La regla de resoluci3n con umg es una regla correcta de deducci3n, luego si $C \vdash \square$ entonces $C \models \square$ (teorema de validez)
 3. \square es falsa en cualquier interpretaci3n
 4. C no puede ser verdadero en ninguna interpretaci3n
 5. C es insatisfacible

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70