Sistemas lineales. 2^a parte

Seguimos intentando resolver el sistema lineal

$$AX = B$$

en donde $A \in \mathcal{M}_{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^m$. Vamos a estudiar el caso

$$\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = l < k.$$

- Consideremos el sistema lineal $AX = B$. En particular, consideremos el sistema lineal asociado homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow AX = O$$

- Al conjunto de soluciones de dicho sistema se le denomina Ker o núcleo de A

$$\ker A = \{X \in R^k : AX = O\}$$

Caso $\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A) = l < k$

Sistema homogéneo asociado

$$AX = O$$

Podemos observar que se cumple lo siguiente:

- $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ siempre es solución. Dicha solución es la única si $l = k$.
- Si $l < k$, siempre vamos a encontrar soluciones no nulas del sistema homogéneo.

Caso $\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A) = l < k$

Sea X una solución arbitraria de $AX = B$ y como $l < k$ existe $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \neq \mathbf{0}$ tal que $AV = O$. En dicho caso

$$A(X + \lambda V) = AX + \lambda AV = B + O = B$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto prueba que la recta

$$\mathbf{x} + G[\{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es también solución del sistema. Recordemos que usamos la notación

$$G[\{\mathbf{v}\}] = \{\lambda\mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Caso $\text{rango}(A^*) = \text{rango}(A) = l < k$

- En el caso

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Recordemos que $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$ era solución del sistema.
- Por otro lado, el vector $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ es solución del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Por tanto todos los elementos de la siguiente recta son soluciones del sistema $AX = B$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + G[\{\mathbf{v}\}] &= \{(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) = (0, \lambda, \lambda + 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Caso $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = l < k$

- La condición $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = l < k$ asegura que existen

$$\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-l}\}$$

linealmente independientes que son soluciones del sistema homogéneo. El conjunto de soluciones Sol viene caracterizado por el "*espacio afín*"

$$\mathrm{Sol} = \mathbf{x} + G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-l}\}] = \{\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_{k-l} \mathbf{v}_{k-l} : \lambda_1, ..., \lambda_{k-l} \in \mathbb{R}\},$$

en donde

$$\mathrm{Ker}\, A = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-l}\}] = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_{k-l} \mathbf{v}_{k-l} : \lambda_1, ..., \lambda_{k-l} \in \mathbb{R}\}.$$

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

En suma:

- **Tma Rouché-Frobenius.** Si $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = l < k$, el sistema es compatible indeterminado con $k - l$ parámetros.
- Los conjuntos de soluciones son
  - puntos
  - rectas
  - planos
  - ...
  - hiperplanos

  Tienen por tanto una interpretación geométrica.

Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius

- En el caso del sistema anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

como $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = 2 < 3$, el sistema es compatible determinada con 1 parámetro. Luego podemos asegurar que el conjunto solución viene dado por la recta

$$\mathrm{Sol} = \{(x_1, x_2, x_3) = (0,0,1) + \lambda(0,1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Sistema lineales. Un ejemplo

Ejercicio: *Resolver*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

En este caso

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2, \ \operatorname{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) = 2$$

Sistemas lineales. Un ejemplo

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

- Por operaciones elementales se puede ver que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{-2F_1+F_2,-3F_1+F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Dos filas linealmente independientes, luego rango 2.

Sistemas lineales. Un ejemplo

- Luego $\mathrm{rango}(A^*) = \mathrm{rango}(A) = 2 < 3$, Sistema compatible indeterminado con un parámetro .
- La tercera fila es combinación de la otras dos, podemos eliminarla.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Directamente

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{x_3}{3} \to x_1 = 0 - x_3 + x_2 = -x_3 + \frac{5}{3} + \frac{x_3}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3.$$

Sistemas lineales. Un ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución viene dada por

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{x_3}{3}, \; x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3.$$

Luego si denotamos el parámetro $\lambda = x_3$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sol} &= \left\{ \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda, \frac{5}{3} + \frac{\lambda}{3}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) + \lambda \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Sistemas lineales. Conclusiones

- Teorema de Rouché-Frobenius es un resultado de clasificación, no indica si un sistema lineal es resoluble o no, a partir de plantearlo como un problema de combinación lineal entre vectores de $\mathbb{R}^n$.
- El conjunto solución de un sistema lineal $AX = B$ es un conjunto afín
  - punto (0 parámetros)
  - recta (1 parámetro)
  - plano (2 parámetros)
  - ....

  cuya parte vectorial viene dada por el **núcleo** o *Ker* de la matriz A del sistema.

Sistemas lineales. Conclusiones

- Para resolver algorítmicamente un sistema lineal se suele usar el *Algoritmo de Gauss-Jordan*.
- El *Algoritmo de Gauss-Jordan*, no es más que multiplicar por determinadas matrices (matrices elementales) a ambos lados del sistema lineal

  `Enlace vídeo sobre operaciones elementales`
- Curso 0 Matemática. UNED 1

  `Enlace a curso 0. Algebra y Geometría`