

- Sea una base cualquiera $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, seguimos la notación usual:

$$\{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Sea A la matriz que tiene por columnas dichos vectores

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

- Los siguientes enunciados son equivalentes:

- ▶ $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ es base de \mathbb{R}^n

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

- Recordemos que dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, las coordenadas de \mathbf{v} con respecto de $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ son los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- Por ejemplo, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ tiene coordenadas

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

respecto de la base canónica

$$\mathbf{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

ya que trivialmente



CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

- Recordemos que dado $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, las coordenadas de \mathbf{v} con respecto de $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ son los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

- El mismo vector $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ tiene coordenadas

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$

respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$

ya que en este caso



CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}$

- Sea base $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$.
- Supongamos un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que tiene por coordenadas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base \mathbf{E} y coordenadas $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base \mathbf{A}

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + y_3 \mathbf{a}_3 \\ &= y_1 (a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + a_{31} \mathbf{e}_3) + \dots + y_3 (a_{13} \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) \mathbf{e}_1 + \dots + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

- Como $\mathbf{v} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3$, igualando componentes

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

- Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow X = AY$$

- $M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}} := A$ es la matriz de cambio de la base \mathbf{A} a la base \mathbf{E} , sus columnas viene dadas por las coordenadas de los vectores de \mathbf{A} con respecto a \mathbf{E}

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}$

En el caso del vector \mathbf{v} con coordenadas $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = -1$ con respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}$

Supongamos \mathbf{v} con coordenadas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base \mathbf{E} y coordenadas $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ respecto de la base \mathbf{A} .

Hemos visto que

$$X = AY$$

y por tanto

$$Y = A^{-1}X$$

- $M_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}} = M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}}^{-1} = A^{-1}$ nos da la matriz de cambio de la base.
- Las columnas de $M_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}}$ nos dan las coordenadas de los elementos de \mathbf{E} con respecto de la base \mathbf{A} .



CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}$

Sea la base $\mathbf{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$

- La matriz de cambio de la base \mathbf{A} a la base \mathbf{E} viene dada por

$$M_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Sus columnas nos dan las coordenadas de los elementos de \mathbf{E} con respecto de \mathbf{A} , por ejemplo

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_3$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $E \rightarrow A$

Sea $\mathbf{v} = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$, calcule sus coordenadas y_1, y_2, y_3 con respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$

- Como $X = AY \Leftrightarrow Y = A^{-1}X$, se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{E}$

Resumiendo, dadas bases canónica $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y un base cualquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas x_1, \dots, x_n respecto de la base canónica e y_1, \dots, y_n respecto de la base \mathbf{A} . Se tiene la siguiente relación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}} Y$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}}^{-1} X = M_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{A}} X$$



CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.

- Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas x_1, \dots, x_n respecto de \mathbf{A} e y_1, \dots, y_n respecto de la base \mathbf{B} . Se tiene la siguiente relación

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} X$$

- Las columnas de $M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}$ son las coordenadas de los elementos de \mathbf{A} con respecto de \mathbf{B} . Por ejemplo,

$$\mathbf{a}_1 = \tilde{a}_{11} \mathbf{b}_1 + \dots + \tilde{a}_{n1} \mathbf{b}_n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expresión matricial del cambio de base $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$

Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.

- Dado un vector $v \in \mathbf{R}^n$ con coordenadas x_1, \dots, x_n respecto de \mathbf{A} e y_1, \dots, y_n respecto de la base \mathbf{B} . Se tiene la siguiente relación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \cdots & \tilde{b}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}} Y$$

- Las columnas de $M_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}}$ son las coordenadas de los elementos de \mathbf{B} con respecto de \mathbf{A} . Por ejemplo,

$$\mathbf{b}_1 = \tilde{b}_{11} \mathbf{a}_1 + \dots + \tilde{b}_{n1} \mathbf{a}_n$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aclaración de notación con respecto del texto *Temas de Matemáticas*

- Sean bases cualesquiera $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$.
- En *Temas de Matemáticas*, (Prof. Rodríguez-Marín) se denota por A a la matriz de cambio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo A la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de \mathbf{A} con respecto de \mathbf{B} . Recordemos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Aclaración de notación con respecto del texto *Temas de Matemáticas*

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Sean bases cualesquiera

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1 = (b_{11}, \dots, b_{n1}), \dots, \mathbf{b}_n = (b_{1n}, \dots, b_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n$$

En nuestro caso, la matriz por columnas asociada a los vectores de columna del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70