Implícitas→Paramétricas

- Si partimos de las ecuaciones implícitas, matricialmente tenemos un matriz $B \in \mathcal{M}_{(n-k)\times n}$ de $\mathrm{rango}(B) = n - k$ y tal que

$$\mathbb{A} = G[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}] = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = O\}$$

- Hallar las ecuaciones paramétricas supone resolver el sistema homogéneo
$$BX = O.$$

- Como $\mathrm{rango}(B) = n - k$, aplicando Rouché-Frobenius existen $n - (n - k) = k$ vectores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ linealmente independientes tal que

$$\mathbb{A} = \mathrm{Ker}\, B = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}] = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{v}_k : \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

lo que nos daría directamente las ecuaciones paramétricas.

Implícitas→Paramétricas

Recíprocamente, supongamos

$$\mathbb{A} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : -x_1 - x_2 + x_5 = 0, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\right\}$$

Tenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Implícitas→Paramétricas

- Tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

- Tomando como parámetros $\lambda_1 = x_3$, $\lambda_2 = x_4$, $\lambda_3 = x_5$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_2 - 2\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Implícitas→Paramétricas

Las ecuaciones parámetricas vienen dadas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ x_2 & = & 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_1 \\ x_4 & = & \lambda_2 \\ x_5 & = & \lambda_3 \end{array}\right.$$

Además

$$\mathbb{A} = \operatorname{Ker} B = G[\{(-2,2,1,0,0),(1,-1,0,1,0),(1,0,0,0,1)\}]$$