Ondas EM en medios materiales:

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} + j\omega\sigma\mu\vec{E} = 0$$

En el interior de la guía $\sigma = 0$ y por tanto la propagación de E cumple:

$$\nabla^2 E + \omega^2\varepsilon\mu E = 0$$

La solución a esa ecuación es: $E(x,y,z) = E(x,y)\cdot e^{-j\beta z}$

$$\nabla^2 E(x,y) + (\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)\,E(x,y) = 0$$

En coordenadas rectangulares, el laplaciano puede escribirse $\nabla^2 E = (\nabla^2_{xy} + \nabla^2_z)\,E$

Se llega así a las expresiones:

$$(\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)\,E_x = -j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y} - j\beta\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\qquad)\,E_y = j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$(\qquad)\,H_x = j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$(\qquad)\,H_y = -j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

Jugando con estas expresiones consigo llegar a que: Obteniendo E_z y H_z puedo llegar a obtener el resto: E_x, E_y, H_x, H_y. De manera que el objetivo será resolver:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2\right)E_z = 0$$

$$\left(\qquad\qquad\right)H_z = 0$$

Las soluciones a estas ecuaciones pueden ser de forma trivial

$E_z = 0 \Rightarrow$ Modos TE (pues solo existirán E_x E_y que son transversales a la dirección de propagación Z)

$H_z = 0 \Rightarrow$ Modos TM

$E_z = 0$ y $H_z = 0 \Rightarrow$ Modos TEM (no son posibles en guías conductoras huecas)

— o —

__Modos TM__ $(H_z = 0)$

Para resolver la ecuación: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2\right) E_z = 0$

Aplico separación de variables: $E_z(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

Quedando: $Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} + (\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2)\, X \cdot Y = 0$

Divido todo entre $X \cdot Y$ para obtener grupos de únicas variables y queda:

$$\underbrace{-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}_{f(Y)}$$

De forma que:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = +K_x^2 \Rightarrow X = A \cdot \operatorname{sen} K_x x + B \cos K_x x$$

$$-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = K_y^2 \Rightarrow Y = C \cdot \operatorname{sen} K_y \cdot y + D \cos K_y \cdot y$$

Aplicando las condiciones de contorno obtengo A, B, C, D. (I)

* $E_z(x,y)\Big]_{x=0\,;\,x=a} = 0 \quad \begin{cases} \Rightarrow B = 0 \\ \Rightarrow K_x = \dfrac{m\pi}{a} \qquad m = 1, 2, \ldots \end{cases}$

no pueden tomar valor N pues haría $E_z = 0$.

* $E_z(x,y)\Big]_{y=0\,;\,y=b} = 0 \quad \begin{cases} \Rightarrow D = 0 \\ \Rightarrow K_y = \dfrac{n\pi}{b} \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Quedando :

$$E_z(x,y) = E_0 \cdot \operatorname{sen} K_x x \cdot \operatorname{sen} K_y \cdot y$$

Sustituyendo E_z en las ecuaciones, obtengo E_x, E_y :

$$E_x = -j\beta \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}\right)x \ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}\right)y$$

$$E_y = -j\beta \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}\right)x \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)y$$

y también el resto : H_x, H_y ya que $H_z = 0$

$$H_x = j\omega\varepsilon \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_y = -j\omega\varepsilon \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Los valores de m y n nos indican el tipo de modo $TM_{m,n}$.

Relación de dispersión de la guía : $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - K_x^2 - K_y^2}$

Tendremos propagación de la onda $e^{-j\beta z}$ cuando el valor de β sea real. Si el valor de β es imaginario, no tendremos propagación de la onda. Por tanto el límite para la propagación de un modo en una guía es:

$$\omega^2 \mu \varepsilon = K_x^2 + K_y^2$$

de donde obtenemos la denominada <u>frecuencia de corte</u>

$$f_{c_{m,n}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

frecuencias mayores que f_c se propagarán. frecuencias menores que f_c no se propagarán por la guía.

$$\lambda_{g_{m,n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{m,n}}}{f}\right)^2}}$$

longitud de la onda dentro de la guía.

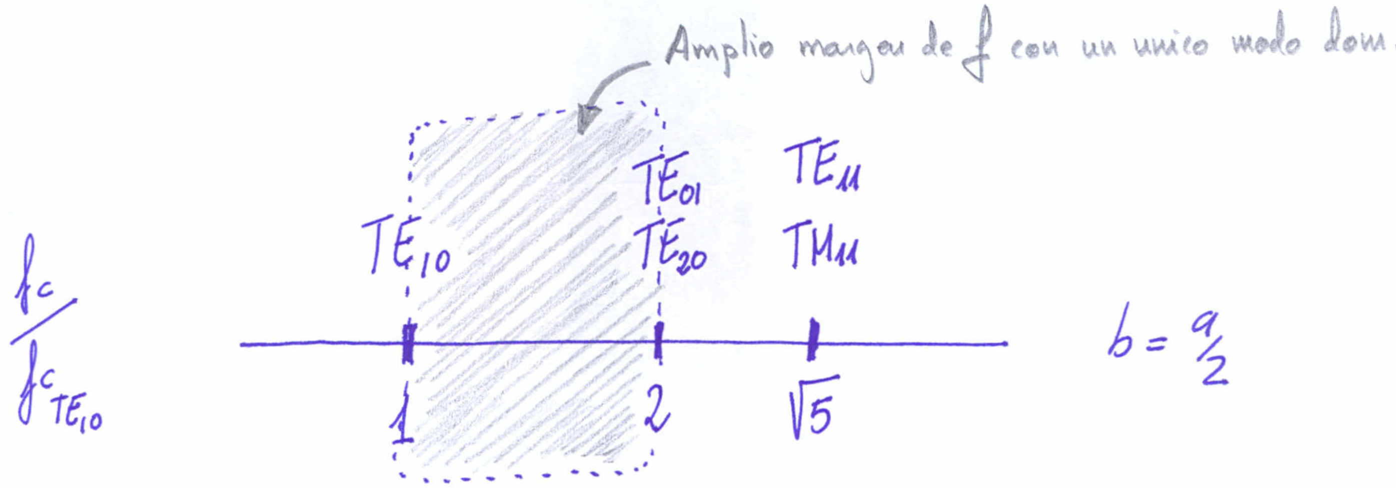
El modo de menor frecuencia de corte, se denomina <u>Modo dominante o fundamental</u>

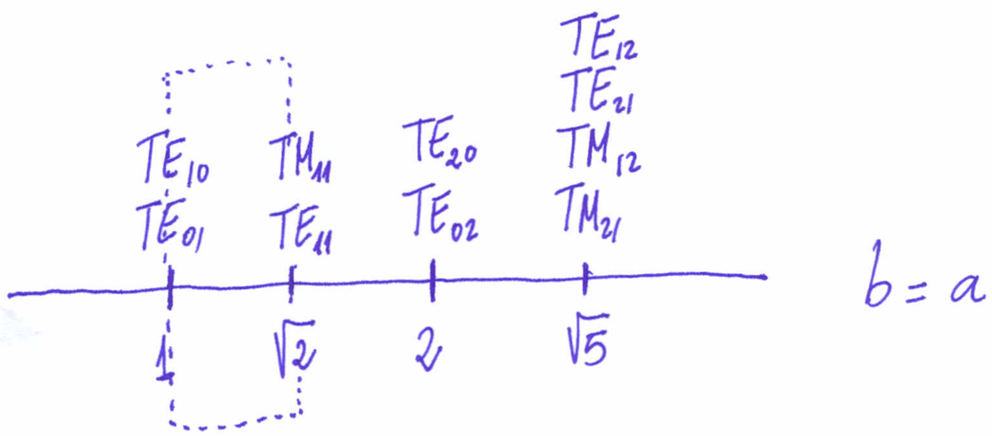
La velocidad de fase de la onda que se propaga en la guía es:

$$u_p = \frac{u}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

La velocidad de fase en una guía de ondas es siempre mayor que "fuera de la guía", y dependen de la frecuencia, son medios de transmisión DISPERSIVOS.

El modo fundamental en guías rectangulares conductoras es el TE_{10}





Las dimensiones de las guías afectan a los modos que por ellas pueden propagarse.

Modos con las mismas frecuencias de corte: MODOS DEGENERADOS.

Modos TEM

En guías conductoras "huecas" no existen modos TEM.

Potencia transmitida por una Guía

$$S^{TE}_{m,n} = \left|A_{m,n}\right|^2 \cdot \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{2\eta\,\varepsilon^2}\left(\frac{a}{\varepsilon_{om}}\right)\left(\frac{b}{\varepsilon_{on}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{f_{c\,m,n}}{f}\right)^2}$$

$$\text{donde} \quad \varepsilon_{oq}\begin{cases} 1 & q=0 \\ 2 & q\neq 0 \end{cases}$$

$$S^{TM}_{m,n} = \left|B_{m,n}\right|^2 \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{2\mu^2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{f_{c\,m,n}}{f}\right)^2}$$

$$S_{TOTAL} = \sum_{m,n} S^{TE}_{m,n} + \sum S^{TM}_{m,n}$$

Atenuación

Las pérdidas en una guía conductora, se deben a dos causas:

a) El dieléctrico interior no es perfecto. (α_d)

b) El conductor de las paredes no es perfecto (α_c)

$$\alpha_{total} = \alpha_c + \alpha_d$$

Pérdidas dieléctricas : α_d

Un dieléctrico real: $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega} = \boxed{\varepsilon\left[1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]}$

Sustituyendo en $\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}$

La parte imaginaria es la relacionada con las pérdidas y la atenuación, y queda:

$$\alpha_{d_{m,n}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma \cdot \eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

¡Aumenta con σ y con la frecuencia f!

Cuanto más dieléctrico sea y menores f, mejor

otra expresión:

$$\alpha_{d_{m,n}} = \underbrace{\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)}_{Np/m} = \underbrace{\frac{27.27}{\lambda}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)}_{dB/m}$$

Atenuación (Pérdidas)

Pérdidas debidas a a) El dieléctrico interior no es perfecto (αd)

b) El conductor no es perfecto (α_c)

Pérdidas Dieléctricas (Aumentan con σ y con f)

Modos TM
Modos TE $\rightarrow$

$$\alpha d = \frac{1}{2} \frac{\sigma \cdot \eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \underbrace{\frac{27.27}{\lambda} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)}_{\text{en dB/m}}$$

Pérdidas por conducción (Aumentan con f y $\frac{1}{\sigma}$)

$R_s \rightarrow \sqrt{\frac{\pi \mu}{\sigma}} \sqrt{f}$ → depende de f.

Modos TM $\rightsquigarrow$

$$(\alpha_c)_{mn} = \frac{2 R_s}{a \cdot b \cdot \eta \cdot \left[\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}\right]} \cdot \frac{m^2 b^3 + n^2 a^3}{(mb)^2 + (na)^2}$$

Modos TE $\rightsquigarrow$

$$\alpha_c = \frac{2 R_s}{b \cdot \eta \cdot \sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[\left(\varepsilon_m + \varepsilon_n \frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{b}{a}\left[1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right] \cdot \frac{m^2 ab + (na)^2}{(mb)^2 + (na)^2}\right]$$

donde $\varepsilon_p \begin{cases} 2 & p = 0 \\ 1 & p \neq 0 \end{cases}$

Conclusiones

Para evitar al máximo las pérdidas.

* Dieléctrico muy aislante
* Conductor muy buen conductor.
* Frecuencias no muy altas.

For an X-band WR waveguide with inner dimensions $a = 0.9$ in. (2.286 cm) and $b = 0.4$ in. (1.016 cm), made of copper ($\sigma = 5.7 \times 10^7$ S/m) and filled with a lossless dielectric, we can plot the attenuation coefficient $(\alpha_c)_{10}$ (in Np/m and dB/m) for $\varepsilon = \varepsilon_0$, $2.56\varepsilon_0$, and $4\varepsilon_0$ as shown in Figure 8-10. The attenuation

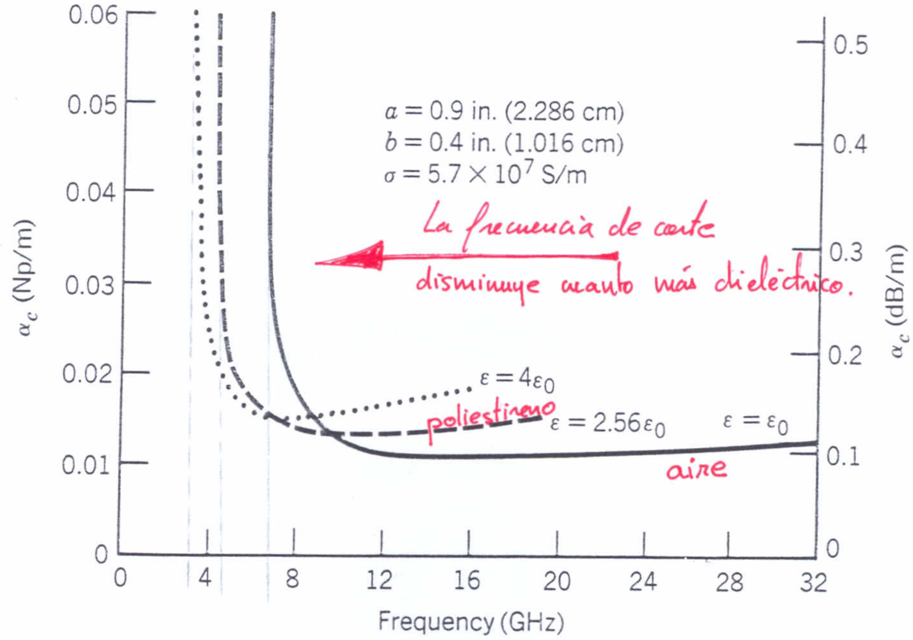


FIGURE 8-10 TE_{10} mode attenuation constant for the X-band rectangular waveguide.

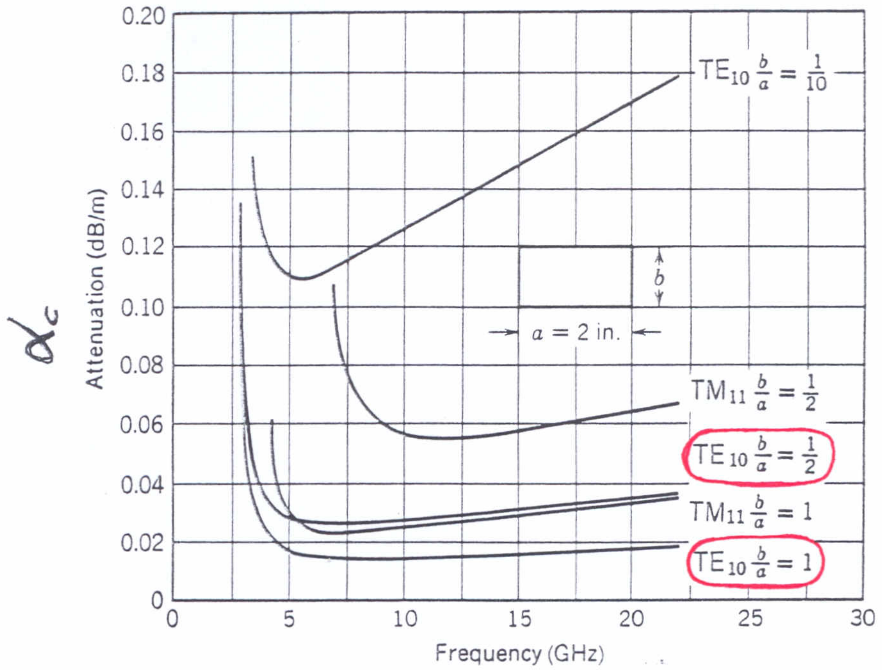


FIG. 8.7c Attenuation due to copper losses in rectangular waveguides of fixed width.

* Observar el aumento de α con la frecuencia
* Las dimensiones de la guía afectan a las atenuaciones.
* Observar el modo de menor atenuación, para unas dimensiones dadas.