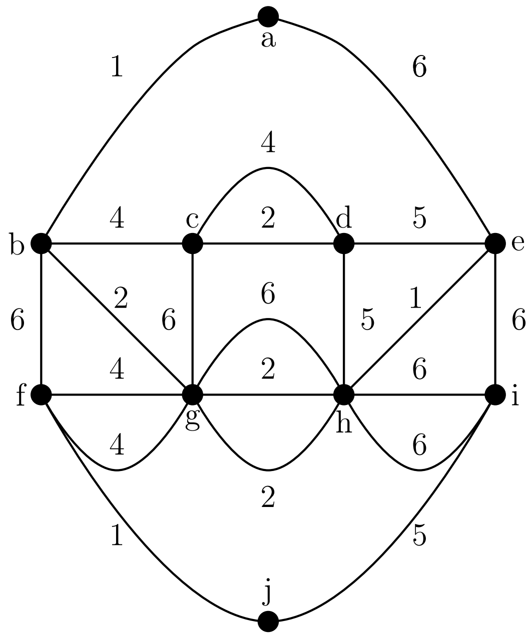
Soluciones a los ejercicios

PROBLEMA 1:
Considérese el grafo G siguiente:



(a) ¿Es G un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo?

(b) Hallar el número de regiones, vértices y aristas del grafo dual $G^\star$.

(c) ¿Es G Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible.

(d) Hallar un árbol A generador mínimo de G y el peso total de dicho árbol.

<u>SOLUCIÓN.</u>

a) No es un grafo simple, porque hay tres aristas entre los vértices h y g. Es plano, ya que su representación gráfica no tiene aristas que se crucen. No es bipartito porque tiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, (f, g, b, f)). No es completo porque no todos sus vértices están conectados entre sí (por ejemplo, los vértices a y f no son adyacentes). No es regular porque no todos los vértices tiene el mismo grado (por ejemplo, el grado de a es 2 y el de d, 4). Es conexo, porque dado cualquier par de vértices, existe un camino elemental que los une.

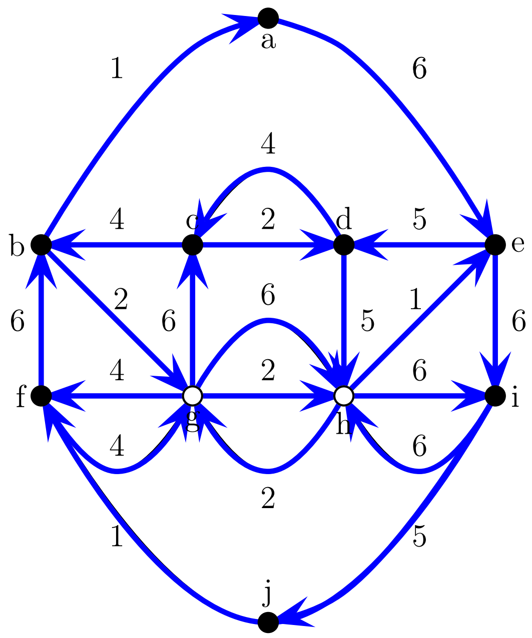
b) Al ser G plano, podemos definir su dual $G^\star$. El número de vértices, aristas y regiones del grafo original puede ser contado directamente de la figura

$$|V| = 10\,, \quad |E| = 21\,, \quad R = 13\,.$$

Estas cantidades satisfacen la ecuación de Euler: $|V| - |E| + R = 10 - 21 + 13 = 2$. Las correspondientes cantidades para el grafo dual son

$$|V^\star| = R = 13\,, \quad |E^\star| = |E| = 21\,, \quad R^\star = |V| = 10\,.$$

c) No es euleriano porque hay vértices de grado impar (g y h). Sin embargo, es semi-euleriano ya que sólo hay dos vértices con grado impar por lo que admite un camino euleriano que, por ejemplo, comienza en g y acaba en h. Este camino se puede obtener mediante la modificación del algoritmo de Fleury: $g \to c \xrightarrow{2} d \xrightarrow{4} c \to b \to g \xrightarrow{4\uparrow} f \to b \to a \to e \to d \to h \to e \to i \xrightarrow{6\uparrow} h \xrightarrow{6\downarrow} i \to j \to f \xrightarrow{4\downarrow} g \xrightarrow{2\downarrow} h \xrightarrow{2\uparrow} g \xrightarrow{6} h$, donde $h \xrightarrow{p} i$ significa la arista de peso p que une h con i. Cuando hay dos aristas entre los mismos vértices y con el mismo peso p, escribimos $h \xrightarrow{p\uparrow} i$ para denotar la que está encima y $h \xrightarrow{p\downarrow} i$ la que está debajo.



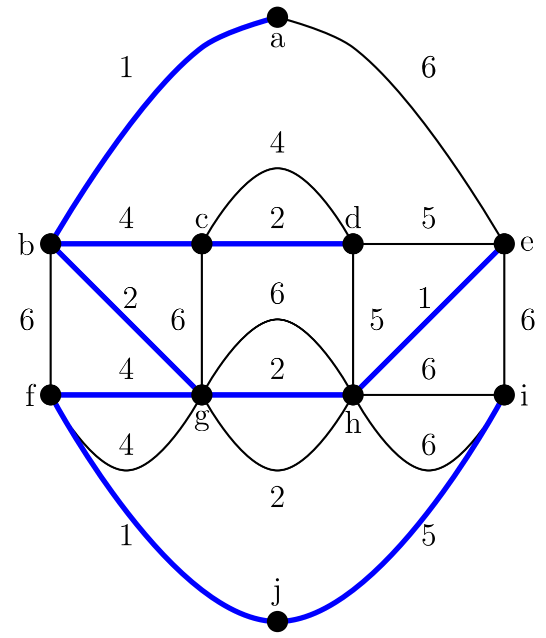
d) Un árbol de peso mínimo lo obtenemos por ejemplo usando el algoritmo de Kruskal. El resultado $A = (V, F)$ lo podemos escribir dando el conjunto F de las aristas del árbol

$$F = \{\{a,b\}, \{e,h\}, \{f,j\}, \{b,g\}, \{c,d\}_2, \{g,h\}_2, \{b,c\}, \{f,g\}_4, \{i,j\}\}\,,$$

donde, por ejemplo, $\{g,h\}_2$ significa que tomamos una de las aristas de peso $\omega = 2$ (si hubiese varias) entre los vértices g y h. Hay $|F| = 9$ aristas, como es de esperar ($|F| = |V| - 1$). El peso total de este árbol es

$$\omega \;=\; \sum_{i \in F} \omega_i \;=\; 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \;=\; 22\,.$$

Nótese que en este caso no hay un único árbol recubridor de peso mínimo. ∎

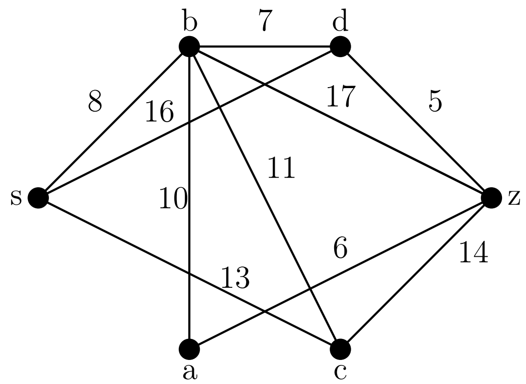


PROBLEMA 2:
Considérese el grafo ponderado de la figura y contéstese a las siguientes preguntas:

1. Calcular el árbol recubridor de peso mínimo sobre dicho grafo y dar su peso.

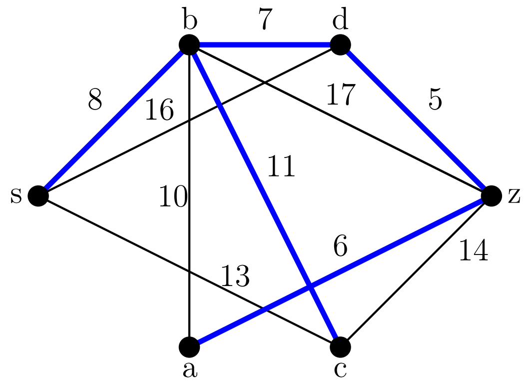
2. Decir si el grafo es euleriano o semi-euleriano y por qué. En caso de que alguna de las respuestas sea afirmativa, encontrar el correspondiente recorrido euleriano o semi-euleriano.

3. Decir si es regular, bipartito y completo y por qué.



Solución.

1) El árbol generador de peso mínimo está formado por las aristas {s,b}, {b,d}, {d,z}, {z,a}, y {b,c} y pesa 37 unidades.



2) Puesto que hay más de dos vértices con grado impar el grafo no es ni euleriano ni semi-euleriano.

3) El grafo no es regular ya que hay vértices con grados distintos. No es completo porque hay vértices que no son adyacentes. Tampoco es bipartito ya que contiene ciclos de longitud tres, por ejemplo, (s,d,b,s). ∎

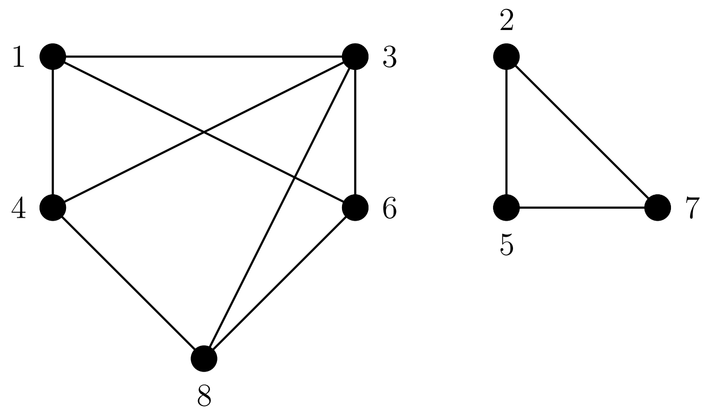
PROBLEMA 3:
Sea el grafo $G = (V, E)$ definido por la siguiente matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Es bipartito? ¿Es planar?
2. Encontrar, si es posible, un árbol generador.
3. ¿Es G semi-euleriano? ¿Cuál es el número mínimo de aristas que necesitamos añadir a G para que sea euleriano?

SOLUCIÓN.

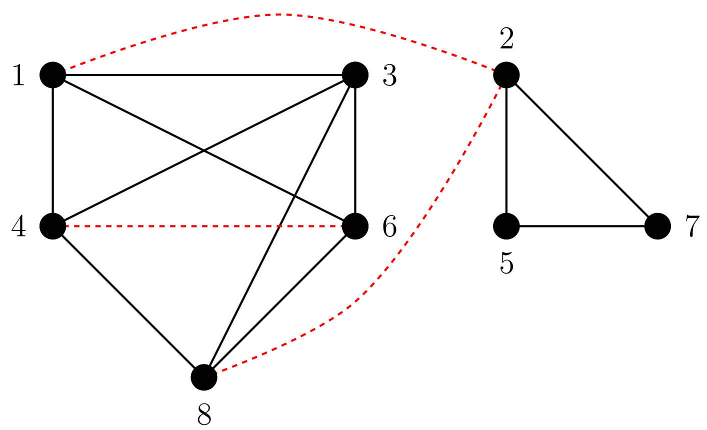
1) Si nombramos los vértices $1, 2, 3, \ldots, 8$ según el orden en la matriz de adyacencia, una representación gráfica de G es



G no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar: por ejemplo, $(2, 7, 5, 2)$. Es planar porque se puede representar en el plano sin que se crucen las aristas: la arista $\{3, 4\}$ se puede llevar por fuera del vértice 1, mientras que la arista $\{3, 8\}$ se puede llevar entre las dos componentes conexas de G.

2) No existe un árbol generador de G porque G no es conexo: tiene dos componentes conexas $G = G_1 \cup G_2$ con $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ y $V_2 = \{2, 5, 7\}$.

3) G no es semi-euleriano porque no es conexo (para que un grafo sea euleriano no basta con que todos sus vértices tengan grado par). Los vértices de grado impar son $\{1, 4, 6, 8\}$ y todos ellos pertenecen a la componente conexa G_1.
Para conseguir un grafo euleriano a partir de G necesitamos en primer lugar unir las dos componentes conexas de G. Para ello debemos añadir una arista que conecte uno de los vértices de $V_2 = \{2, 5, 7\}$ (por ejemplo, el 2) con un vértice de $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ con grado impar (por ejemplo, el 1). El nuevo grafo obtenido de esta forma es conexo y tiene cuatro vértices de grado impar: $\{2, 4, 6, 8\}$. En segundo lugar es necesario añadir dos aristas más en las que uno de sus extremos sea un vértice de grado impar y sin repetir ninguno (por ejemplo, las aristas $\{2, 8\}$ y $\{4, 6\}$). Ahora todos los vértices tienen grado par y el grafo es euleriano. En definitiva, el número mínimo de aristas adicionales que es necesario añadir es tres. $\blacksquare$



PROBLEMA 4:
Resolver las siguientes cuestiones:

1. Calcular el número de maneras de colocar en un tablero de ajedrez orientado y con 64 casillas las siguientes piezas: un rey, una reina, un caballo, una torre y un alfil blancos y un rey, una torre, un caballo y un alfil negros.
2. En los alambres que hay entre dos postes de un tendido trifásico de alta tensión en Bodega Bay se distribuyen 99 mirlos indistinguibles. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en los tres alambres si no consideramos la distancia entre pájaros?
3. Si, por el contrario, tenemos en cuenta la distancia entre pájaros y si en cada alambre solo hay 200 posiciones posibles para los pájaros, ¿de cuántas maneras se pueden colocar los 99 mirlos?

NOTA: Los resultados se darán en función de números combinatorios $\binom{a}{b}$ y/o factoriales $a!$

SOLUCIÓN.

1) Las piezas de ajedrez son todas distintas entre sí y las casillas del ajedrez también son distintas entre sí (al estar orientado). Por lo tanto debemos colocar $5 + 4 = 9$ piezas distintas en $8^2 = 64$ casillas distintas. La primera pieza la podemos colocar de 64 maneras, una vez colocada, podemos colocar la segunda de 63 maneras distintas, etc. Una vez colocadas las ocho primeras piezas, hay $64 - 8 = 56$ maneras de colocar la última pieza. Luego, la solución del problema es

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdots 57 \cdot 56 = \frac{64!}{55!} = 9993927307714560\,.$$

También se podría hacer de la siguiente manera: hay $\binom{64}{9}$ maneras de elegir las 9 casillas a ocupar y, una vez elegidas, hay $9!$ maneras de colocar las 9 piezas en ellas. Luego, la solución es $\binom{64}{9}\,9! = 64!/55!$

2) Tenemos que distribuir 99 objetos iguales (los mirlos) en 3 cajas distintas (los alambres). Como en cada alambre puede haber cualquier número de mirlos (incluido ninguno), el resultado es

$$\binom{99+2}{2} = \binom{101}{2} = 5050\,.$$

3) En este caso, las posiciones de los mirlos son distinguibles. De hecho hay 600 posiciones posibles que pueden ocupar los 99 mirlos. Luego habrá

$$\binom{600}{99}$$

maneras de colocar a los 99 mirlos. ∎

PROBLEMA 5:
Resolver los siguientes problemas:

(a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir diez bolas idénticas en seis recipientes distintos?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si ningún recipiente puede quedar vacío?

(c) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si el cuarto recipiente contiene un número impar de bolas?

Solución.

a) Representamos cada bola mediante un cuadrado y cada recipiente por un par de barras. El enunciado nos dice que las bolas son idénticas; pero los recipiente no lo son. Una manera posible de hacer el reparto es la siguiente:

$$| \square \square \square \mid \square \square \square \mid \quad \mid \square \square \square \square \mid \; \mid \; |$$

Los restantes repartos se obtienen reordenando los objetos que aparecen en la representación anterior. En concreto, contamos con siete barras; pero las dos de los extremos no las podemos mover, de manera que sólo hay cinco barras móviles y diez cuadrados. Como no hay ninguna restricción en la manera de colocar las barras y los cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{10+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003\,.$$

b) Si ningún recipiente puede quedar vacío, el argumento es el casi el mismo que en el apartado a). La única diferencia es que ahora las cinco barras móviles hay que colocarlas obligatoriamente entre dos cuadrados para que siempre haya al menos un cuadrado en cada recipiente (es decir, entre dos barras consecutivas). Una reparto posible es el siguiente:

$$| \square \square \mid \square \square \mid \square \mid \square \square \square \mid \square \mid \square |$$

Como hay nueve espacios entre los diez cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{9}{5} = 126\,.$$

c) Si el cuarto recipiente tiene un numero impar de bolas, sólo puede contener $1, 3, 5, 7$ ó 9 bolas. En el primer caso, tendríamos una bola en dicho recipiente y nueve bolas en el resto a colocar sin ninguna restricción en los cinco recipientes restantes. Usando el mismo argumento que en el primer apartado, la solución de este caso sería $\binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$.
Si colocamos 3 bolas en el cuarto recipiente, tenemos que situar las siete bolas restantes en los cinco recipiente que nos quedan. La solución es $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$. Claramente si colocamos k bolas en el cuarto recipiente, el número de maneras de situar las $10-k$ bolas restantes en los cinco recipientes es $\binom{10-k+5-1}{5-1} = \binom{14-k}{4}$. La solución pedida es por tanto

$$\binom{13}{4} + \binom{11}{4} + \binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4} = 1211\,. \qquad \blacksquare$$

PROBLEMA 6:
Determinar el número de subconjuntos de un conjunto de 10 elementos que

(a) tengan menos de 5 elementos,

(b) tengan más de 7 elementos,

(c) tengan un número impar de elementos.

Solución.

La manera más rápida de solucionar este problema es aprovechar la biyección entre el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos y el de las cadenas binarias de longitud n, de manera que si un elemento pertenece a un subconjunto dado, el bit correspondiente es 1 (y 0 en caso contrario).

El apartado a) nos pide el número de cadenas de bits de longitud 10 con menos de 5 unos. El número de cadenas de bits de longitud 10 con k unos es simplemente

$$N_k \;=\; \binom{10}{k}\,, \qquad 0 \le k \le 10\,.$$

De esta modo, la solución de a) es

$$N_{k<5} \;=\; \sum_{k=0}^{4} N_k \;=\; \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} \;=\; 1 + 10 + \frac{90}{2} + \frac{720}{3!} + \frac{10!}{6!\,4!} \;=\; 386\,.$$

El apartado b) consiste en calcular el número $N_{k>7}$ de cadenas de bits de longitud 10 con más de 7 unos. Luego,

$$N_{k>7} \;=\; \sum_{k=8}^{10} N_k \;=\; \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \;=\; \frac{90}{2} + 10 + 1 \;=\; 56\,.$$

El apartado c) consiste en calcular el número de cadenas de bits de longitud 10 con un número impar de unos. Luego,

$$\begin{aligned} N_{k\ \text{impar}} \;&=\; \sum_{p=0}^{4} N_{2p+1} \\ &=\; \sum_{p=0}^{4} \binom{10}{2p+1} \\ &=\; 2\left[\binom{10}{1} + \binom{10}{3}\right] + \binom{10}{5} \\ &=\; 512\,. \end{aligned}$$

El resultado es lógico ya que el número total de cadenas de bits de longitud 10 es $2^{10} = 1024$ y aquellas con un número impar de unos serán, por simetría, la mitad (i.e., 512). ∎