Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2019-20

Examen final, enero de 2020

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: __________________________________

FIRMA: ____

Notas y comentarios:

- **Todos los problemas son de desarrollo y puntúan igual (2 puntos por problema).**
- Algunas series de Taylor útiles:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\,,\ x > -1\,, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

- Teorema de Bolzano: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

1. Decídase razonadamente la existencia de los siguientes límites y, en su caso, calcúlese su valor: (se aconseja usar el desarrollo de Taylor)

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)^{10}}{(e^x - 1 - x)^{15}}, \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\left(\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}\right)^{4}}{\left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)^{5}}.$$

Solución. (a) Usamos el desarrollo de Taylor (que se recuerda en la primera página) y para x cerca de cero, obtenemos

$$\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \sim_{x\to 0} \frac{x^3}{3}$$

donde R_4 es el resto (puede tener varias expresiones, pero nos quedamos con el o pequeño). Es bueno recordar que $o(f(x))$ significa que $o(f(x)) = h(x)f(x)$ con $h(x) \to 0$ para $x \to 0$. Lo mismo para el denominador:

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto, puedo sustituir en el limite $x \to 0$ las expresiones asintoticas obtenidas arriba:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)^{10}}{(e^x - 1 - x)^{15}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{15}} = \frac{2^{15}}{3^{10}}$$

(b) Usamos el desarrollo de Taylor (que se recuerda en la primera página) y para x cerca de cero, obtenemos

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!} = \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

y tambien

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} = \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

Por lo tanto, puedo sustituir en el limite $x \to 0$ las expresiones asintoticas obtenidas arriba:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}\right)^{4}}{\left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right)^{5}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^5}{5!}\right)^{4}}{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^{5}} = \frac{(4!)^5}{(5!)^4}$$

---

2. Estudiar el comportamiento de las siguientes series: decidir si son convergentes (absolutamente o solo condicionalmente) o si son divergentes (a infinito o bien oscilantes). Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)}{6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left[\log(n+28)\right]^{\frac{8}{7}}} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Solución. (a) Es evidente que el limite del termino general de la serie tiende a cero (sandwich)

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)}{6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left[\log(n+28)\right]^{\frac{8}{7}}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$$

donde hemos usado la misma desigualdad que abajo en (1). Por lo tanto la serie podría converger. Observamos que el denominador y el numerador (dejando afuera el $(-1)^n$) son positivos por lo tanto coincide con su valor absoluto. Estudiamo primero la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+\sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)|}{6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left[\log(n+28)\right]^{\frac{8}{7}}}$$

Dado que $|\sin(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|1+\sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)| \leq 1 + |\sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)| \leq 2$$

mientras el denominador:

$$6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{+3\left[\log(n+28)\right]^{\frac{8}{7}}}_{\geq 0} \geq 6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{3}{2}}$$

por lo tanto, podemos acotar la serie (de terminos no-negativos) y probar su convergencia, por comparación (sandwich)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+\sin^5\left(n^n - 2^{n!}\right)|}{6\left(n^3+5\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left[\log(n+28)\right]^{\frac{8}{7}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty \tag{1}$$

dado que sabemos que la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$es convergente cuando $\alpha > 1$ (en este caso $\alpha = 3/2 > 1$). Siendo **la serie convergente absolutamente es también convergente condicionalmente.**

(b)Recuerdo que por el desarrollo de Taylor:

$$\sin(x) \sim x \qquad \text{cuando } x \to 0\,, \qquad \text{por lo tanto } \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

por lo tanto la serie podria converger. Estudiamos primero la convergencia absoluta, es decir la convergencia de

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < +\infty \qquad \text{si y solo si} \qquad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} < +\infty$$

por el criterio de convergencia asintotica. Por lo tanto la serie **NO será absolutamente convergente**, dado que la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$es divergente cuando $\alpha \leq 1$ (en este caso $\alpha = 1/2$).
Para estudiar la convergencia condicional podemos ver si el criterio de Leibnitz se puede aplicar:
Primero notamos que $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = a_{n+1}$ es decreciente, dado que $\sin(x)$ es creciente cuando $|x| \leq 1$, y aqui $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$. Tambien $a_n \geq 0$, y como hemos visto arriba

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Por lo tanto, el criterio de Leibnitz nos dice que **la serie es condicionalmente convergente**.

3. Demostrar que la ecuación $\mathrm{e}^x = 4\,\mathrm{sen}(x)$ tiene exactamente dos soluciones en el intervalo $[0, \pi]$.
(se aconseja usar el Teorema de Bolzano y luego estudiar el crecimiento/decrecimiento de la función $f(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{sen}(x)$)

Solución. Primero encontramos los ceros usando el Teorema de Bolzano, usamos la función $f(x) = \mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{sen}(x)$

$f(0) = \mathrm{e}^{\pi} - 4\,\mathrm{sen}(0) = \mathrm{e}^{\pi} > 0\,,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{\pi/4} - 4\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}) \cong -0{,}63514 < 0$ y $f(\pi) = \mathrm{e}^{\pi} - 4\,\mathrm{sen}(\pi) = \mathrm{e}^{\pi} > 0$

Entonces por el Teorema de Bolzano tendremos dos ceros, uno en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ y otro en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \pi]$, de hecho, extremos excluidos (hemos calculado los valores y tienen signo opuesto y no son ceros), es decir, los dos ceros de f están en $(0, \frac{\pi}{4})$ y en $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ respectivamente. Pero podría haber mas ceros.
Por el Teorema de Rolle, dado que $f(0) = f(\pi)$ sabemos que hay al menos un punto critico, es decir existe $\xi \in (0, \pi)$ tal que $f'(\xi) = 0$, pero podría haber más. De hecho, sabiendo que hay dos ceros, llamamolos $\xi_1 < \xi_2$, con $\xi_1 \in (0, \frac{\pi}{4})$ y $\xi_2 \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$ también por el Teorema de Rolle hay un punto critico $\tilde{\xi} \in (\xi_1, \xi_2)$, pero no podemos asegurar que sea distinto que ξ. Esta discusión sobre el Teorema de Rolle no sirve estrictamente en el ejercicio.
Falta probar que hay exactamente dos ceros. Estudiamos la derivada primera y la segunda:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 4\cos(x) \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \mathrm{e}^x + 4\sin(x) > 0$$

Notamos que $f'' > 0$ en $(0, \pi)$, dado que $\mathrm{e}^x > 0$ y $\sin(x) > 0$ en $(0, \pi)$, por lo tanto la función f es (estrictamente) convexa, y si tiene un punto critico, tiene que ser un mínimo (porque la derivada primera es creciente y si cambia de signo solo puede hacerlo una vez, pasando de positiva a negativa). Pues, resulta que

$$f'(0) = 1 - 4 < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(\pi) = \mathrm{e}^{\pi} - 4\cos(\pi) \cong 27{,}14069 > 0$$

entonces por el Teorema de Bolzano hay un cero de f' en $(0, \pi)$, es decir existe $\underline{\xi} \in (0, \pi)$ tal que $f'(\underline{\xi}) = 0$ y ese es un punto de mínimo, y es unico, como hemos visto, por convexidad (o por ser f' estrictamente creciente). Por lo tanto, la derivada primera solo se anula en un punto, y como consecuencia, la función f solo puede cortar el eje de las x como mucho en dos puntos (es como si fuese una parabola a forma de $\bigcup$, con un mínimo/vertice negativo). Esto, junto con el hecho que sabemos que f tiene al menos dos ceros, prueba que f tiene exactamente dos ceros en el intervalo $(0, \pi)$.

4. (a) Encontrar una función f continua en $[0, +\infty[$ tal que

$$\int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2$$

para todo $x > 0$.
(b) Demostrar que existe el siguiente límite y que es finito

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} dt$$

Solución. El Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI) nos dice que definiendo

$$G(x) := \int_0^x g(t)\, dt \qquad \text{se tiene que} \qquad G'(x) = \frac{dG}{dx}(x) = g(x).$$

para todo $x \geq 0$. Por lo tanto en el problema tenemos que $G(x) = x^2$ y por el TFCI $g(t) = 2t$, por otra parte, sabemos como dato del problema que $g(t) = (1+t^2)f(t)$ y por lo tanto

$$g(t) = 2t = (1+t^2) f(t) \qquad \text{entonces es facil ver que} \qquad f(t) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Con dicha elección de f, se puede comprobar también que la integral es correcta haciendo una simple sustitución

$$\int_0^x (1+t^2) f(t) dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2.$$

(b) Primero, es fácil ver que la integral es finita por comparación (sandwich): para todo $t \geq 0$ tenemos que

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} \leq \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}} = \mathrm{e}^{-t}$$

por lo tanto

$$0 \leq \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} dt \leq \int_1^x \mathrm{e}^{-t} dt = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow{x\to+\infty} \mathrm{e}$$

Esta es una manera de probarlo (con cota explícita):

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} dt \leq \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}.$$

Otra posibilidad es calcular la integral por substitución:

$$u = \mathrm{e}^t, \qquad \text{entonces} \qquad du = \mathrm{e}^t\, dt$$

y en los extremos $t = 1$ se transforma en $u = \mathrm{e}$ y $t = x$ se transforma en $u = \mathrm{e}^x$, por lo tanto

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(\mathrm{e})$$

y se puede concluir y hasta calcular el limite:

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{1+u^2} du = \lim_{x\to+\infty} \arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \arctan 1 < +\infty$$

5. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
(dar una prueba/explicación si son verdaderas o un contraejemplo/explicación si son falsas)

(a) Una sucesión a_n tiende a cero si y solo si la sucesión $(-1)^n a_n$ tiende a cero.

(b) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión a_n tiende a cero.

(c) Una función es continua en x_0 si y solo si es derivable en x_0.

(d) El polinomio de Taylor de orden cuatro de $\frac{1}{1-x}$ en $x_0 = 0$ es $1 - x^2 + x^3 - x^4$.

(e) La siguiente formula es cierta para todas las funciones $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)$$

Solución.
(a) VERDADERA. Probamos las dos implicaciones por separado: recuerdo que $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$. Si a_n tiende a cero entonces $b_n := (-1)^n a_n$ tiende a cero: claramente tenemos que

$$0 \le |b_n| = |(-1)^n|\,|a_n| \le |a_n|$$

y también sabemos que $c_n = |a_n|$ tiende a cero si y solo si a_n tiende a cero. Este ultimo resultado se ha hecho en clase, pero lo recuerdo: por definición de limite de $a_n \to 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|a_n - 0| = |a_n| \to 0$, por lo tanto también $c_n = |a_n| \to 0$: de hecho, basta con escribir la definición de los dos limites y observar que $|a_n| = |a_n - 0| = |\,|a_n| - 0\,| = |c_n - 0|$.
La otra implicación sigue precisamente del hecho que $a_n \to 0$ si y solo si $|a_n| \to 0$.

(b) FALSA. Lo hemos visto en clase muchas veces: el contraejemplo mas famoso es $a_n = \frac{1}{n}$, tiende a cero, pero la serie en divergente (por ser la serie armonica con exponente $\alpha = 1$). O bien se puede facilmente ver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \infty$ con el criterio de condensacion:

$$0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n} = +\infty \qquad \text{si y solo si} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

(c) FALSA. Lo hemos visto en clase muchas veces: el contraejemplo mas famoso es $f(x) = |x|$, es continuo en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en cero. Por cierto, una implicación es siempre verdadera: si una función es derivable, entonces es continua. El problema, como hemos visto con un contraejemplo, es la implicación contraria.

(d) FALSA. Hemos visto en clase muchisimas veces (desde la suma de la serie geometrica), que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

y se puede concluir por unicidad del polinomio de Taylor (que vale dado que el resto es $o(x^4)$).

Otra posibilidad es usar directamente la formula para el Polinomio de Taylor:

$$T_4 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

notamos que $f''(0) = 2$ y no -1 como se pretende en el enunciado, y lo mismo para $f^{(iv)}(0) = 4!$.

(e) FALSA. como ejemplo basta con tomar $f(x) = x = g(x)$:

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx \neq 1 = 1{\cdot}1 = \left(\int_0^1 x\, dx\right)\left(\int_0^1 x\, dx\right) = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)$$