Definición de derivada

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de $f(x) = x^3$ y de $g(x) = \cos x$.

2. Decida razonadamente la diferenciabilidad en los puntos $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x+1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

3. Supongamos que $|f(x)| \leq x^2$ en cierto intervalo $(-\delta, \delta)$. Utilizar la definición de derivada para calcular $f'(0)$.

4. Compruebe, usando la definición de derivada,

a) que las funciones $f(x) = 1/(x^2|x|+1)$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ verifican $f'(0) = g'(0) = 0$;

b) que $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ no es derivable en cero.

Cálculo de derivadas. Regla de la Cadena

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde estén definidas:

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$, *b)* $f(x) = \ln\left(e^{5x}+1\right)$, *c)* $f(x) = (x+2^x)e^x$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$, *e)* $f(x) = \dfrac{x \ln x}{e^x + \operatorname{sen}^2 x}$, *f)* $f(x) = e^{\left(e^{1/x}+1\right)^2}$.

6. ¿Qué se obtiene al derivar tres veces la función $f\,g$? ¿Y al derivar dos veces la función e^f?

7. La fórmula

$$f'(x) = f(x)\big(\ln f(x)\big)'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Es útil para calcular $f'(x)$ sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, $\log a^b = b \log a$.

a) Use la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^2+1)^7(e^x+1)(\cos x + \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = (x^2+1)^{x^2+1}.$$

b) Escriba una regla para derivar un producto de funciones $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$.

Primeras aplicaciones de la derivada

8. Determine las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto indicado:

(a) $f(x) = \ln(e + \operatorname{sen} x)$ en $x = 0$, (b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ en $x = \pi/6$.

9. ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = x_0$?

10. Determine el valor del parámetro real a para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5ax$ en el origen: (a) sea horizontal; (b) tenga pendiente -1.

11. Considerando la gráfica de $f(x) = e^x$ y la recta tangente en el punto $(0,1)$, deduzca geométricamente la desigualdad $1 + x \le e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. La fórmula

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

es bien conocida y se prueba por inducción o simplemente multiplicando por $x - 1$.

a) Derivando, utilícela para calcular $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 15 \cdot 2^{15}$.

b) ¿Cómo calcularía la suma $1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + 15^2 \cdot 2^{15}$?

Sobre derivadas de funciones inversas

13. Las funciones $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x) = \arccos x$ se definen en $(0,1)$ como las inversas de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, respectivamente, restringidas a $(0, \pi/2)$.

a) Compruebe que $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

b) Empleando el hecho de que $f + g$ tiene derivada nula, halle una relación entre $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\arccos x$.

14. La función *seno hiperbólico* viene dada por $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Llamamos arcoseno hiperbólico a su inversa. Explique por qué el arcoseno hiperbólico es derivable en todo punto y compruebe que su derivada es $1/\sqrt{x^2 + 1}$.

15. Halle una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

Una aplicación computacional

16. Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_1 \in \mathbb{R}$, sea x_2 la intersección con el eje X de la recta tangente en $x = x_1$ a la gráfica de f, x_3 la intersección de la tangente en $x = x_2$ y así sucesivamente.

a) Compruebe que la fórmula que da x_{n+1} en función de x_n es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

b) Explique geométricamente por qué es lógico que bajo condiciones adecuadas la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a una solución de $f(x) = 0$.

Nota: Este método para resolver $f(x) = 0$ se llama *método de Newton–Raphson*, y suele ser más rápido que el de bisección.

17. (*Ejercicio computacional*) Queremos resolver la ecuación $3t - 4t^3 = \frac{1}{2}$, con $0 < t < 1$.

a) Aproxime la solución con 2 iteraciones del método de Newton, comenzando en $t = 0$.

b) Use el método de la bisección para comprobar que la aproximación del apartado anterior da, al menos, 4 cifras decimales de precisión.