

APLICACIÓN DE TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

- Hállese un valor  $c \in (1, e)$  tal que  $\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c)$  para  $f(x) = \ln x + 1$ .
- ¿Existe una función  $f$  diferenciable, con  $f(1) = 4$ ,  $f(5) = 7$  y  $f'(x) \geq 1$  para todo  $x$ ?
- Use el teorema del valor medio de Lagrange para demostrar que  $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ .
- Usando primero el teorema de Bolzano y después el teorema de Rolle, demuestre que cada una de las ecuaciones

$$x^5 + 14x + 31 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 2 + \cos \frac{\pi}{2}x = 0$$

tiene exactamente una raíz real.

- Calcule el número exacto de soluciones reales de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$a) 2x - 1 = \sin x, \quad b) x = \arctan x, \quad c) (x + 2)^{1/4} - x^{1/4} = 1.$$

*Indicación:* Por el Teorema de Rolle, si  $f'$  no se anula en un intervalo, entonces  $f(x) = 0$  no puede tener dos soluciones en dicho intervalo. Recuerde también el Teorema de Bolzano.

- Sea  $f$  es una función dos veces derivable tal que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene, al menos, tres soluciones en  $[a, b]$ . Usando el teorema de Rolle, pruebe que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f''(c) = 0$ .

LA REGLA DE L'HOPITAL

- Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 8x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(6x))}{\ln(\cos(3x))}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 9}{e^x}.$$

- Halle los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - 2 \ln(1 + x)}{x^2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \quad a, b > 0.$$

SOBRE MÁXIMOS/MÍNIMOS

- Calcule los valores máximo y mínimo de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  en el intervalo  $[-2, 6]$ .
- El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

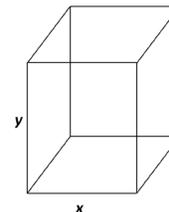
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

**Cartagena99**

12. Determine los puntos de la curva  $y = 4 - x^2$  que están *lo más cerca* posible del punto  $P = (0, 2)$ .

(Sugerencia: Sitúe el punto  $P$  en el plano y esboce la curva  $y = 4 - x^2$ .)

13. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por  $m^2$ , mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por  $m^2$ . Además, el volumen de las cajas debe ser  $0.25 m^3$ . ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?




---

ANÁLISIS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

14. Halle los intervalos de crecimiento/decrecimiento y de concavidad/convexidad de:

a)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;      b)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ ;      c)  $f(x) = \arctg(2x) - x$ .

15. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = e^{1/x}$ ,      b)  $f(x) = x \ln x$ ,      c)  $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ .

d)  $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{2}}$ ;      e)  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$  ;      f)  $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$ ,

Para ello, tendrá que determinar los valores en los que las funciones están definidas, son continuas, derivables, etc. Luego, con la información de  $f'$  y  $f''$ , determine intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, extremos locales (o relativos), puntos de inflexión, etc. Recuerde calcular, cuando sea necesario, los límites en los extremos de los dominios.

16. Dibuje la gráfica de la función  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

---

SOBRE POLINOMIOS Y SERIES DE TAYLOR

17. Halle los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $a = 16$  y estime sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de  $\sqrt{16.2}$ . Compruebe después, con ayuda de una calculadora, la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar, encuentre también aproximaciones sencillas de  $e$  y de  $\ln 0.8$ .

18. Calcule los polinomios de Taylor de grado 3 en  $a = 0$  para las siguientes funciones

a)  $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ ,      b)  $f(x) = \frac{1}{3 + e^x}$ ,      c)  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x}\right)$ .

19. Halle la serie de Taylor de la función  $f(x) = (x^2 - 3x)e^{x^4}$  en  $a = 0$  a partir de la de  $e^x$  y úsela para hallar  $f^{(5)}(0)$  y  $f^{(10)}(0)$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70