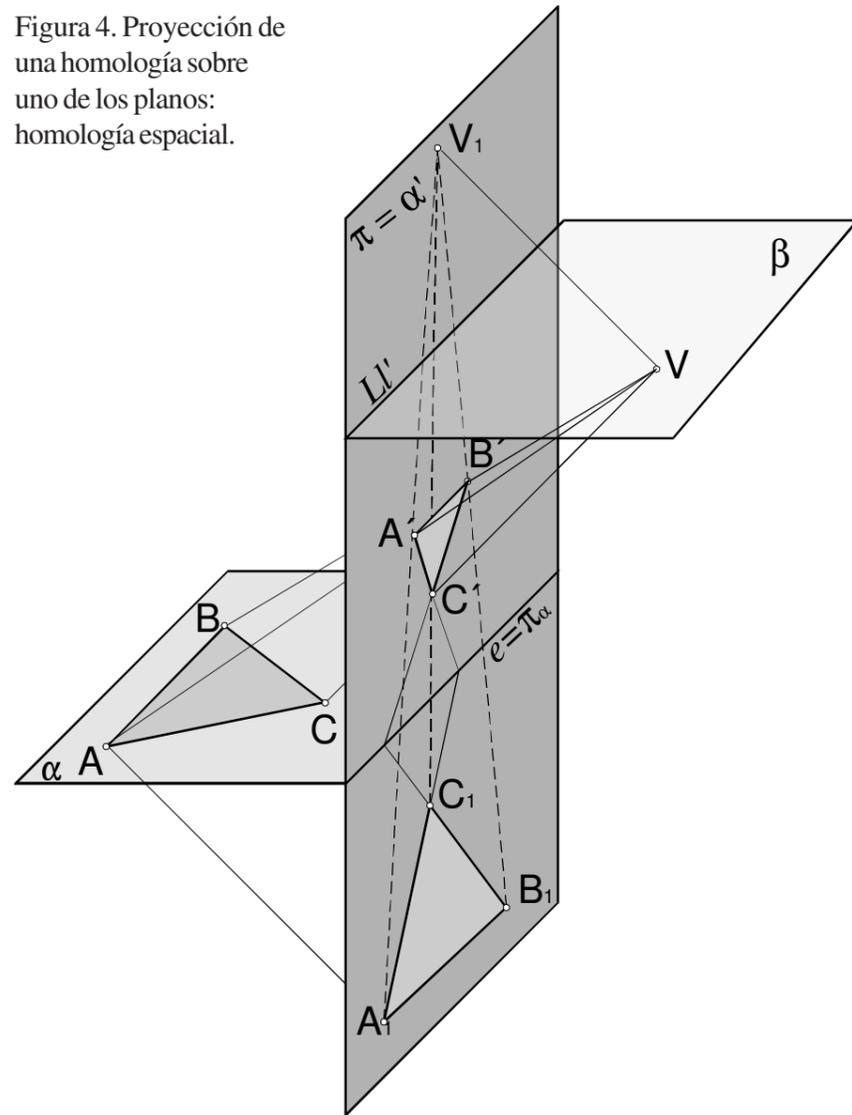


Figura 4. Proyección de una homología sobre uno de los planos: homología espacial.



Nótese podemos considerar cualquier homología plana como una homología espacial en la cual coinciden los planos α y α' y a su vez contienen al centro de homología y que viene definida por la posición de las rectas límite l y l' . El hablar sin más de homología entre dos figuras o dos elementos en el mismo plano es ambiguo puesto que una misma figura podríamos considerarla como perteneciente al plano α o al plano α' . Por ello, al definir la homología plana hay que identificar convenientemente las rectas límite. La mayoría de los autores habla de elementos originales y de elementos homólogos derivados de estos y numera las rectas límites. Si los primeros se encuentran sobre α y los segundos sobre α' , a l se le llama *primera recta límite* y a l' *segunda recta límite*. Un caso interesante de homología plana es aquel en que l coincide con l' en cuyo caso figuras homólogas son figuras idénticas.

Hay que señalar que una homología plana puede así derivarse de una infinidad de homologías espaciales. Para obtener una basta tomar el centro de la homología espacial en la perpendicular a π que pasa por el centro de la plana. Una vez fijado este todo lo demás queda definido.

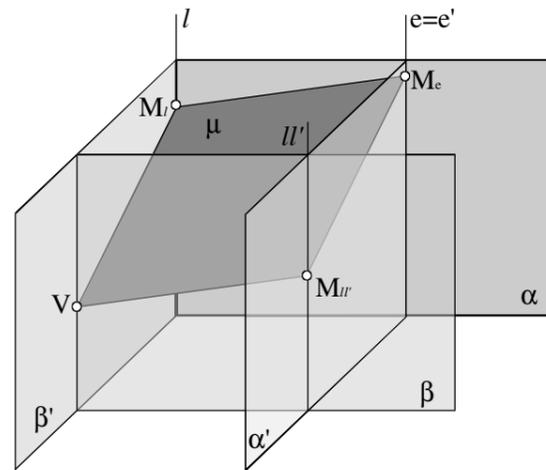


Figura 5. Trazas con un plano de los elementos de una homología.

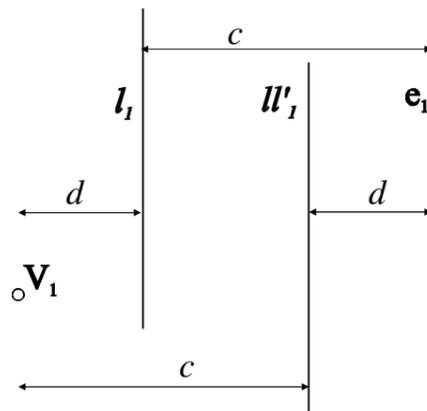


Figura 6. Elementos de la homología plana.

Debido al paralelismo de la intersección de estos cuatro planos el centro V de la homología espacial muestra las trazas de estos planos. Los otros dos vértices M_1 y M_2 de este paralelogramo son, en primer lugar, vértice opuesto es el punto M_e , traza espacial. Los otros dos vértices M_1 y M_2 de las rectas límite l y l' . Esto hace que, en las homologías espaciales, la distancia de l al eje; o que la distancia de l' al eje; o que la distancia de l a l' sea la misma. Esta propiedad permite definir una homología plana, reconstruyendo el cuarto elemento, reconstruyendo el cuarto elemento. Debemos, así mismo, destacar que una homología guardará una relación de abatimiento equivalente a una proyección de los planos homólogos.

Todo lo dicho es válido a la homología espacial esté infinita o finita. Nótese, como se muestra en la figura, que la homología plana obtenida como proyección perpendicular al eje de afinidad es una homología afines.

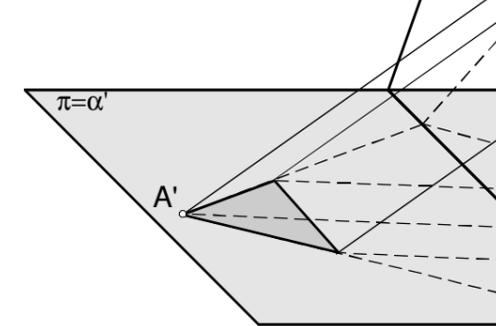


Figura 7. Afinidad. Proyección s

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Homología plana

Entre las propiedades de las proyecciones vimos en el capítulo 2 que la proyección de una recta es otra recta. Esto implica que las proyecciones sobre un mismo plano de dos puntos homólogos deben seguir estando alineadas con la proyección del centro de la homología inicial puesto que las rectas generatrices se proyectarán también como rectas. Diremos pues que existe una nueva relación de homología plana entre las proyecciones sobre un plano π , no perpendicular al eje, de dos figuras homólogas con centro en V . Los elementos de la homología plana son pues: el eje de la homología (recta proyección del eje espacial), el centro de homología (proyección del punto del mismo nombre) y las rectas límites (proyecciones de l y l' sobre π). Las propiedades de la homología espacial siguen cumpliéndose entre su proyección plana. Así, un punto, su homólogo y el centro de homología se encuentran alineados; la intersección de dos rectas homólogas se encuentra necesariamente en el eje; las homólogas de dos rectas paralelas se cortan en la recta límite.

Proyección de secciones

Según lo que acabamos de exponer, las proyecciones sobre un plano de dos secciones cualesquiera de una superficie radiada y sus abatidas sobre el mismo plano guardan una relación de homología plana. Así, las proyecciones sobre un plano de dos secciones diferentes de una pirámide -que corten todas las aristas- guardan una relación de homología, con centro en la proyección del vértice y eje la proyección de la recta intersección de los planos secantes. Las rectas límite vendrán determinadas por los planos secantes y el vértice (centro de homología) según ya hemos expuesto (figura 8). En particular podemos considerar la base de la pirámide como otra sección plana de la figura radiada por lo que también será homóloga de aquellas secciones que corten todas las aristas.

Si se conoce, pues, la proyección (horizontal o vertical) de una sección de una superficie radiada -o en particular la sección por el plano horizontal- lo habitual, para construir otra sección es aplicar las relaciones de homología entre segmentos. El eje de la relación de homología que guardan será la proyección de la recta intersección de los planos secantes y el centro la proyección del vértice de la superficie.

También es posible, conocida la figura inicial, el eje, el centro de homología y el homólogo de un punto, hallar los demás mediante el procedimiento recursivo de prolongar los segmentos iniciales que contienen puntos conocidos hasta cortar el eje. Entonces las rectas homólogas pasan por dicho punto del eje y los homólogos desconocidos deben estar a su vez en rectas que unan el centro de homología con los puntos originales.

Si queremos hallar la sección abatida en verdadera magnitud podemos también aplicar la relación de homología entre la proyección de las secciones y la abatida conforme se muestra en la figura 9.

En el caso de secciones de un prisma o de un cilindro, el vértice está en el infinito por lo que la relación entre secciones se convierte en una relación de afinidad. El procedimiento será igual, con la única salvedad de encontrarse puntos afines alineados en la misma dirección, en lugar de alineados con un centro de homología ahora inexistente (o infinitamente alejado).

Merece la pena destacar que las secciones de una superficie radiada son homólogas o afines siempre y cuando no corten a las bases. Esto, en cualquier caso se puede comprobar al ir trazando la sección.

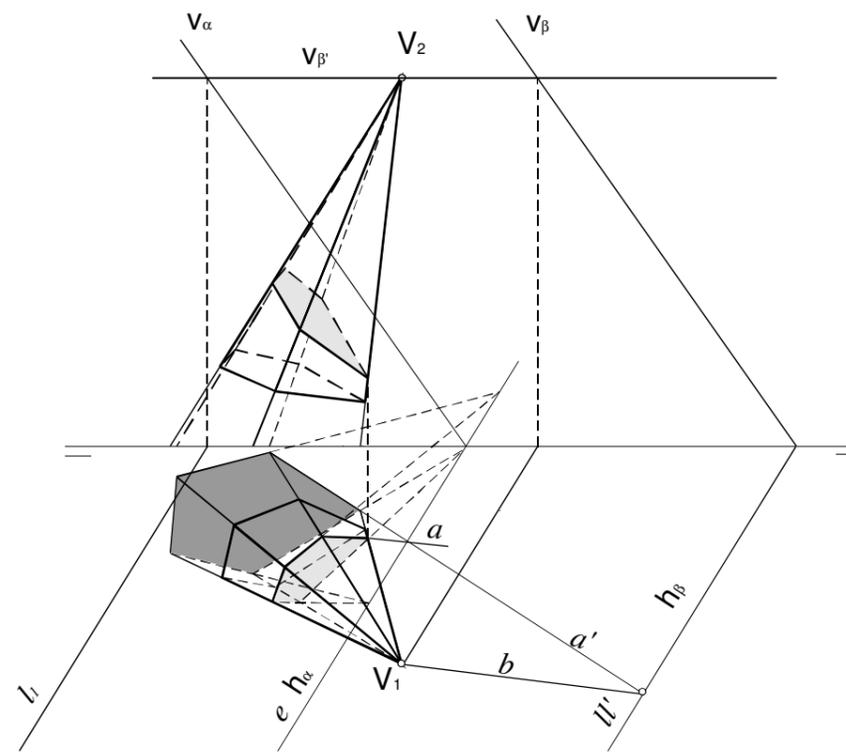


Figura 8. Cálculo de la sección de una pirámide por homología. A la izquierda se muestra en procedimiento aplicando la relación de homología con la sección por el plano horizontal de la figura radiada. La primera operación que se ha realizado ha sido el cálculo de esta sección ficticia por el plano horizontal, para lo cual se han prolongado las proyecciones verticales de las aristas de la pirámide hasta cortar la línea de tierra hallando así las trazas horizontales de las aristas. Estas constituyen los vértices del polígono sección por el plano horizontal.

La relación de homología existente entre el plano horizontal y el plano α secante tiene el eje de la homología plana en la traza horizontal del plano secante h_α y su vértice en la proyección horizontal V_1 del vértice de la pirámide. La recta límite l_1' es la traza horizontal del plano β paralelo al secante α que pasa por el vértice V . La otra recta límite l_1 es la proyección de la recta horizontal intersección de α con el plano β horizontal que pasa por V .

Para calcular, entonces, la recta a homóloga de la a' , prolongamos esta hasta cortar a l_1' y, desde este punto, trazamos la recta auxiliar b hasta V_1 . La recta a que buscamos será paralela a b y cortará a a' sobre el eje de afinidad.

A la derecha se muestra el trazado de la sección por α mediante homología con la base en γ . El eje de la homología entre las proyecciones horizontales es la proyección horizontal de la intersección entre ambos planos. El vértice es la propia proyección V_1 del vértice. La recta límite l_1' es la recta paralela al eje intersección del plano β con γ .

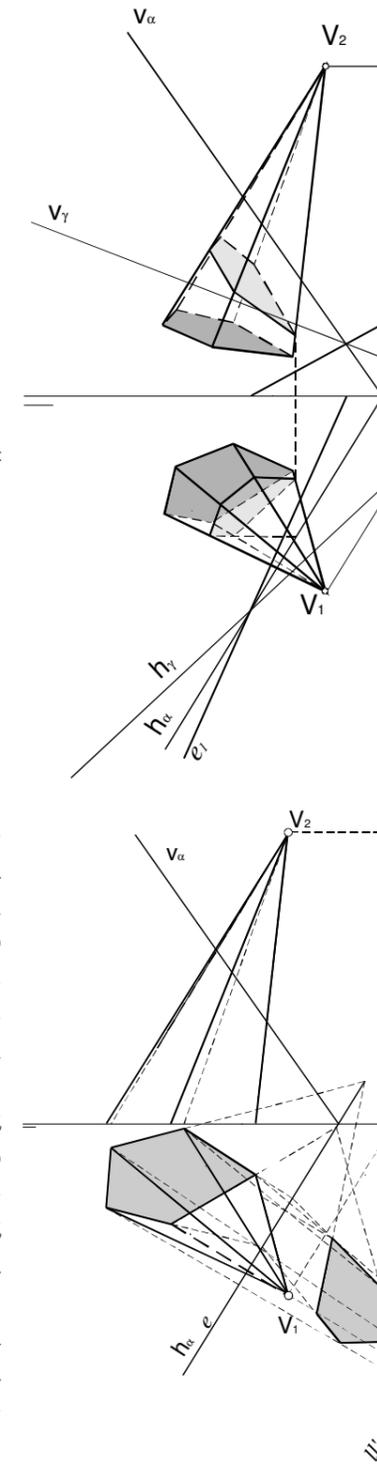


Figura 9. Cálculo directo de la sección de una pirámide mediante homología. El eje de la homología que establece entre la sección por α y la base γ -contenido en el plano β paralelo al eje de homología- sigue siendo la proyección horizontal de la intersección de los planos α y β .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



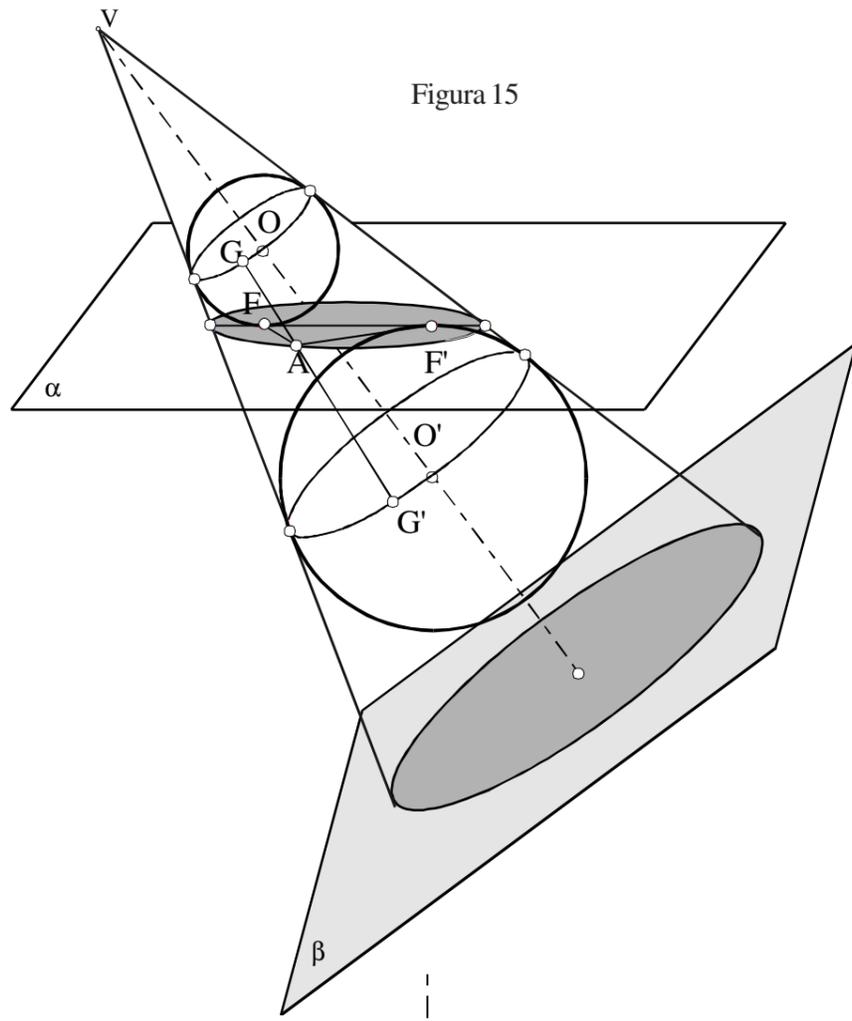


Figura 15

Teorema de Dandelin

Los focos de la cónica resultante de la sección de un cono regular se encuentran en los puntos de tangencia de las dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano.

La demostración puede hacerse como se muestra en la figura 15. Tomemos una generatriz del cono, de forma que G y G' son los puntos de tangencia con las dos esferas inscritas en el cono. Sea A el punto intersección de esta generatriz con el plano secante. Este punto A es por consiguiente un punto de la elipse. Debido a que AG es tangente a la esfera, la distancia de este punto al punto G es igual a la longitud de cualquier otro segmento que, con extremo en A, sea tangente a la esfera centrada en O. En particular, en el mismo plano secante tendremos que el punto F de tangencia se encontrará a la misma distancia de A que el punto G.

El mismo razonamiento aplicado a la esfera centrada en O' lleva a la deducción de que la distancia GG' que es independiente de la generatriz elegida es igual a la suma de las distancias FA+F'A, lo cual demuestra que F y F' son los focos de la elipse.

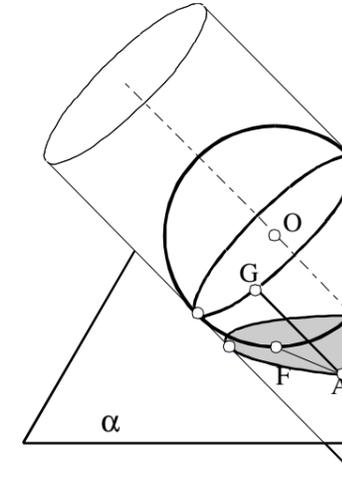


Figura 18. H

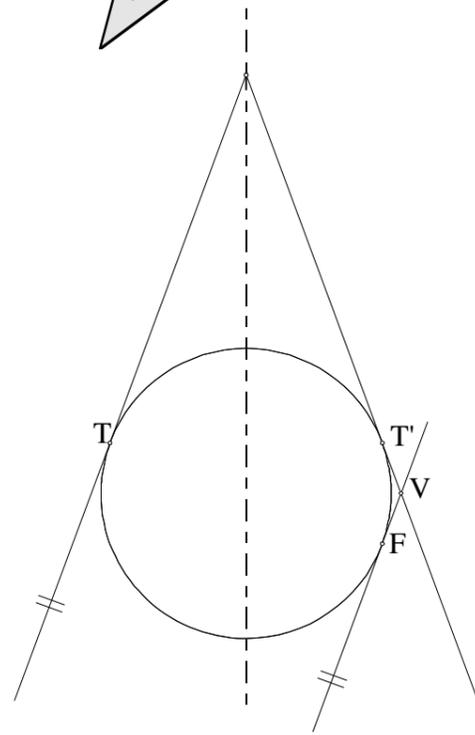


Figura 16. Caso parabólico

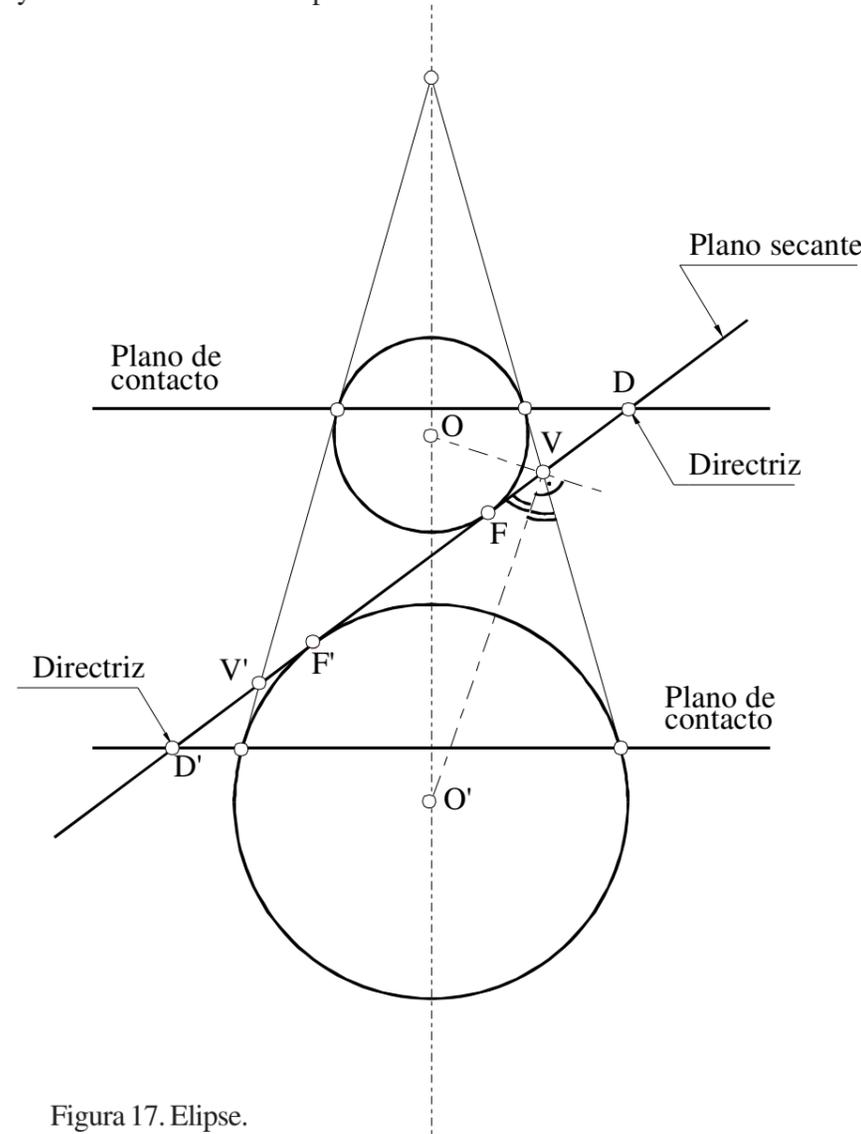
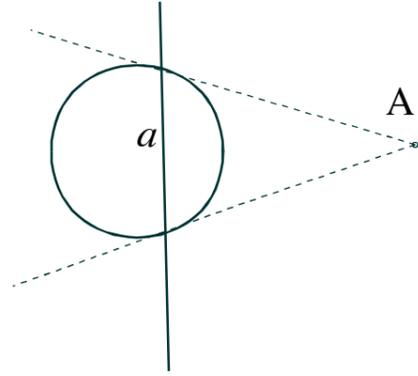


Figura 17. Elipse.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Se llama recta r polar de un punto A respecto de una circunferencia a la recta definida por cortar sobre la circunferencia a las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A .



Se llama polo de una recta p respecto de una circunferencia, al punto P tal que, si trazamos polar y desde el punto B de intersección de esta con p trazamos, de nuevo, su polar; P es intersección de a y b . Se dice que estas dos rectas a y b son conjugadas.

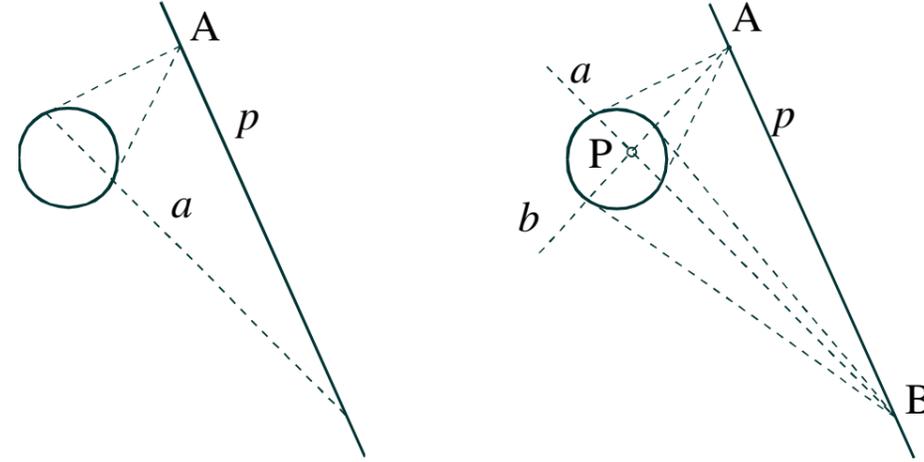


Figura 21 Construcción de una parábola por homología con una circunferencia tangente a l en el punto A . Trazamos la recta a que pasa por V y por A . Esta recta, por pasar por V es doble, es decir coincide con su homóloga y nos da la dirección del eje de la parábola. Trazamos por el vértice su perpendicular hasta cortar a l en el punto L . Desde éste se traza la recta t tangente a la circunferencia en T . Su homóloga t' será tangente a la parábola en su vértice y T' será el vértice de esta.

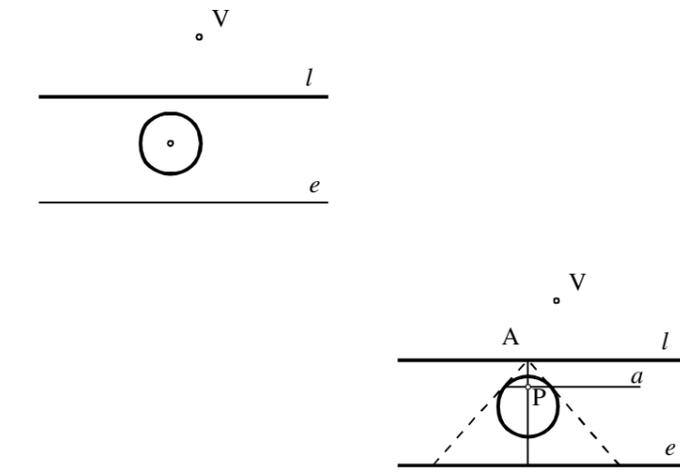
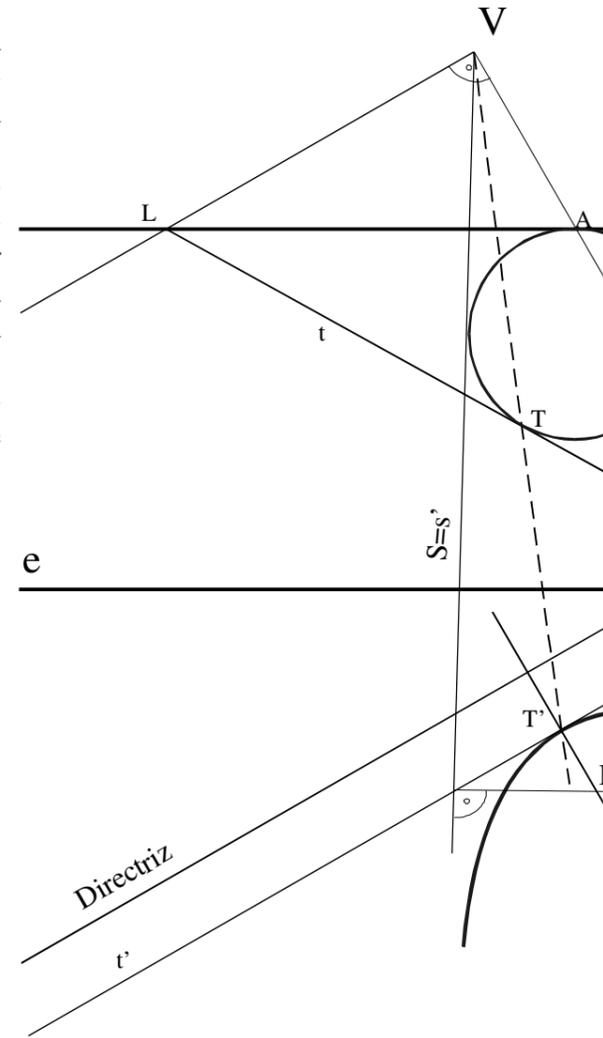
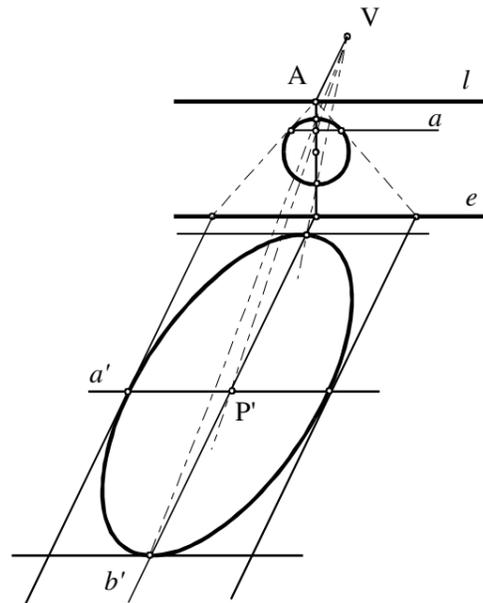


Figura 20. Trazado de una elipse por homología con una circunferencia. En primer lugar, se encuentra el punto P , polo de la recta l respecto de la circunferencia. Basta tomar ahora dos rectas en la circunferencia conjugadas respecto de l y hallar las homólogas para tener dos diámetros conjugados de la elipse.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



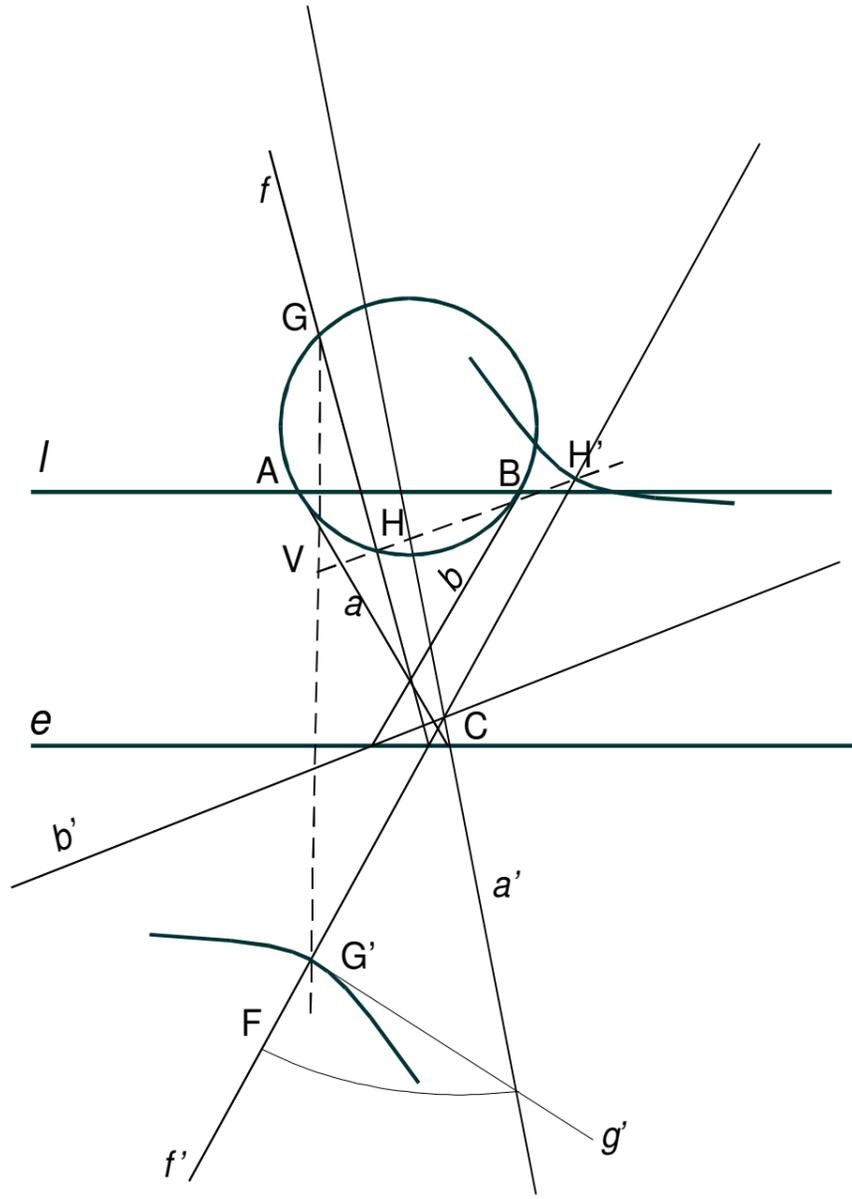
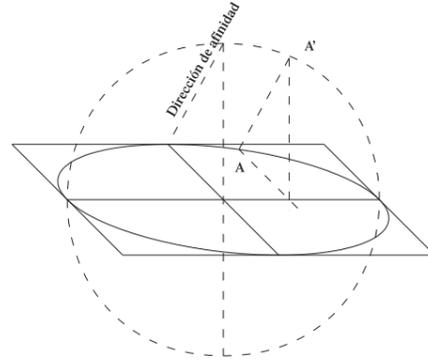


Figura 22. Construcción de una hipérbola por homología con una circunferencia. Dados los elementos de la homología y una circunferencia secante al eje l en A y B . Trazamos las rectas a y b tangentes a la circunferencia en A y B . Hallamos sus homólogas a' y b' que resultan ser las asíntotas por ser tangentes a la homóloga en el infinito. Una de las bisectrices de los ángulos que forman a' y b' será f' , eje focal de la hipérbola. Encontramos f , cuyos puntos G y H intersección con la circunferencia resultan homólogos de los vértices de la hipérbola. Para hallar el foco basta tener en cuenta que la distancia focal del centro C de la hipérbola a cada foco es igual a distancia de C al punto M de intersección de la asíntota a' con la tangente g' en el vértice G' .

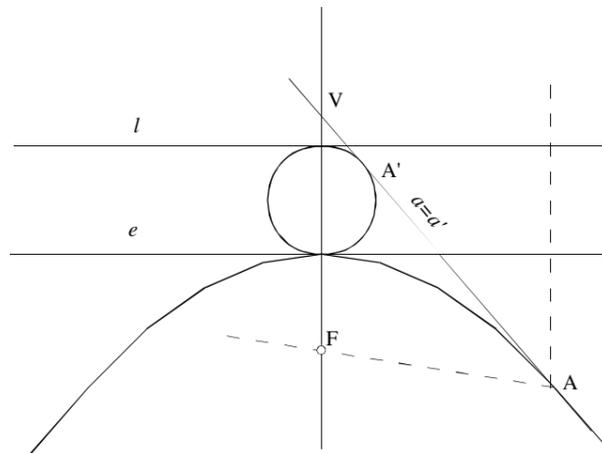
Para resolver los siguientes cuatro problemas se puede emplear una circunferencia homóloga a la cónica y esolverlo sobre ella. Estos cuatro problemas son:

1. Trazado de la tangente a una cónica en un punto dado de ella.
2. Trazado de la tangente desde un punto exterior a una cónica.
3. Trazado de la tangente a una cónica paralela a una dirección dada.
4. Puntos de intersección de una recta secante a la cónica.

En el caso de la elipse se empleará una afinidad por su mayor sencillez. Si se conocen en general dos diámetros conjugados, una posibilidad es construir la circunferencia de diámetro igual al diámetro mayor de los dos y centro en el centro de la elipse. Se establece la dirección de afinidad por el punto de intersección de la perpendicular al diámetro mayor con dicha circunferencia que resultará afín del extremo del otro diámetro.



En el caso de la parábola, dado que el primero de los problemas se puede resolver encontrando la bisectriz del ángulo formado por la recta del punto al foco y de la recta perpendicular a la directriz; podemos construir una circunferencia homóloga de la parábola como sigue. Tomamos un punto arbitrario de ella -tanto más lejos cuanto mayor queramos que sea la circunferencia- y encontramos su tangente t y trazamos la circunferencia con centro sobre el eje de la parábola y tangente a t en A y B y a la parábola en su



vértice. Los elementos de la h en su vértice; la recta límite, l punto de corte de la circunfer vértice será el punto donde t

En la hipérbola al conc trivial aplicar el caso anterior asíntotas y a uno de los vértic la recta perpendicular al eje d límite tendrá obviamente la m gencia de la circunferencia co el centro de la cónica.

Otra posibilidad, si la h una circunferencia mayor es que pase por los vértices de la recta límite pasará por el cent el otro vértice de la hipérbola.

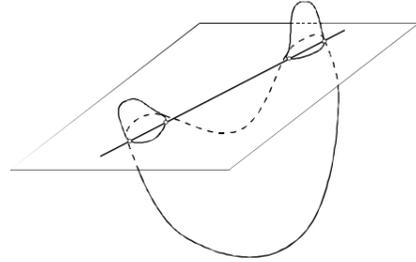
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 - - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Intersección de recta con superficie

En general, para encontrar la intersección de una recta con una superficie existe un método general que consiste en incluir la recta en un plano, hallar la sección de la superficie por dicho plano y sobre ella determinar la intersección buscada. El plano en que incluimos la recta debe ser tal que la sección de la superficie por el plano sea fácilmente calculable.

Figura 23



Así por ejemplo para hallar la intersección de una recta con un cono o con una pirámide elegiremos un plano definido por la propia recta y el vértice. Para hallar la intersección con un cilindro o un prisma se emplea un plano auxiliar que contiene a la recta y es paralelo a las generatrices del cilindro. Obsérvese que ser paralelo a las generatrices del cilindro equivale a contener el «vértice» del cilindro que se encuentra infinitamente alejado en esa dirección. En el caso de la esfera ya vimos que podríamos elegir un plano que contuviera el centro de esta.

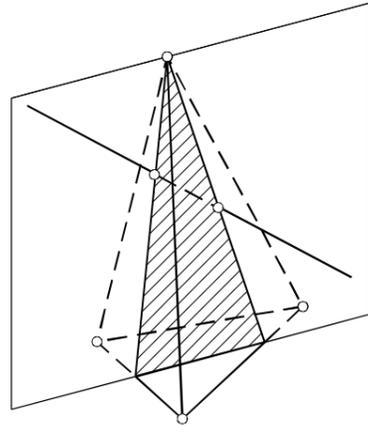


Figura 24

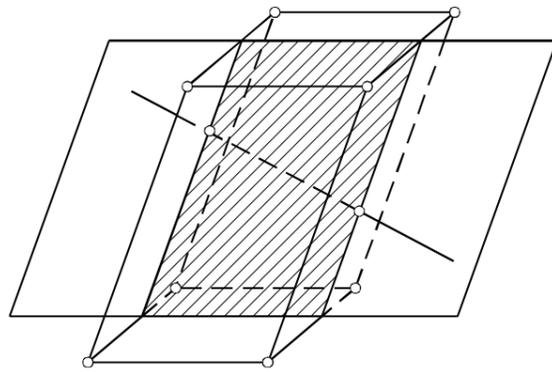


Figura 25

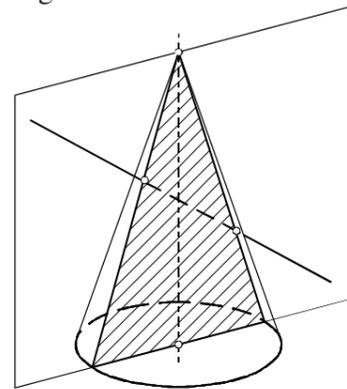


Figura 26

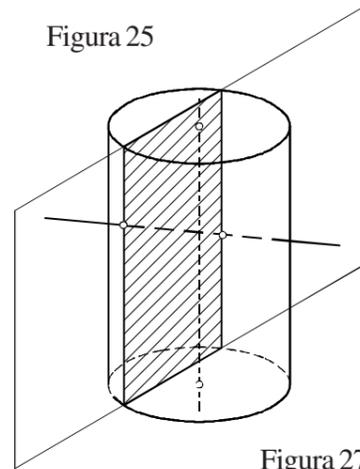


Figura 27

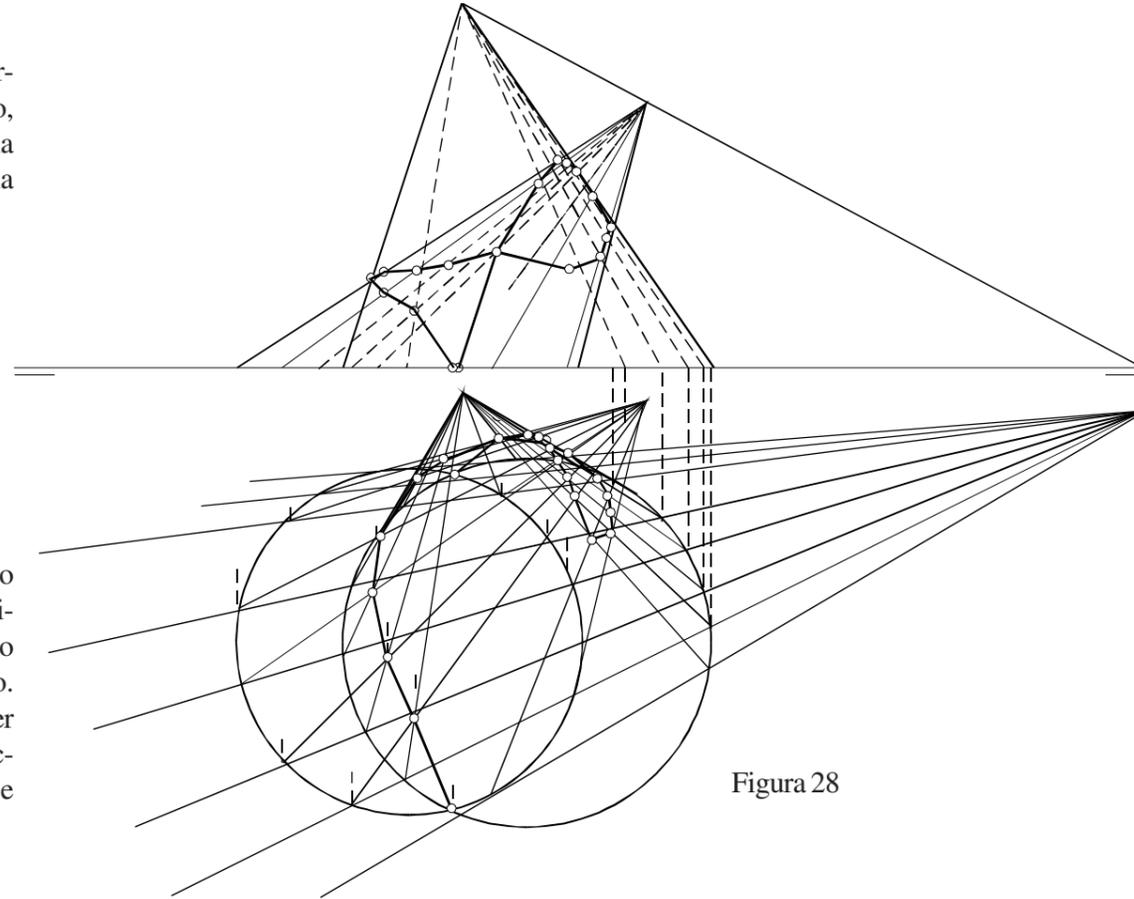


Figura 28

Intersecciones de superficies

La intersección de dos superficies se resuelve en general recurriendo al empleo de planos auxiliares cuyas intersecciones con las superficies problema sean conocidas o de fácil construcción. Dado uno de estos planos auxiliares y sus intersecciones con ambas superficies, los puntos comunes a ambas serán puntos de la solución buscada. Empleando otros planos auxiliares se van obteniendo más puntos de la intersección de las superficies.

La elección de los planos auxiliares viene condicionada por la fácil construcción de las secciones de estos con las superficies. Así por ejemplo en la figura 28 se muestra la intersección de dos conos. Para hallarla se recurre a un haz de planos auxiliares que contengan a los dos vértices. En las figuras 29 y 30 se muestran las intersecciones de cilindro con cono. Los planos auxiliares para este caso son paralelos a la generatriz del cilindro y pasan por el vértice del cono. En el caso de la figura 29, por ser los planos secantes además proyectantes resulta mucho más fácil de realizar.

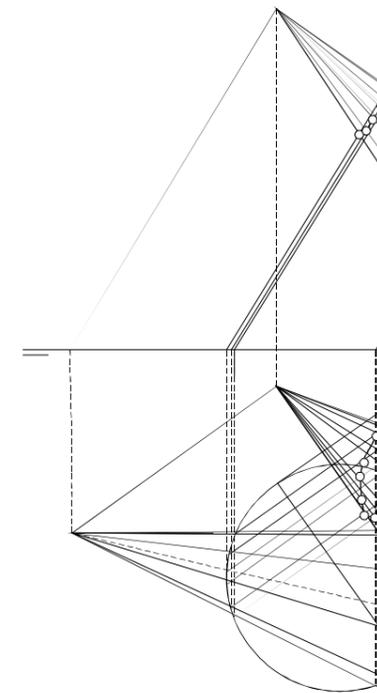


Figura 30

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



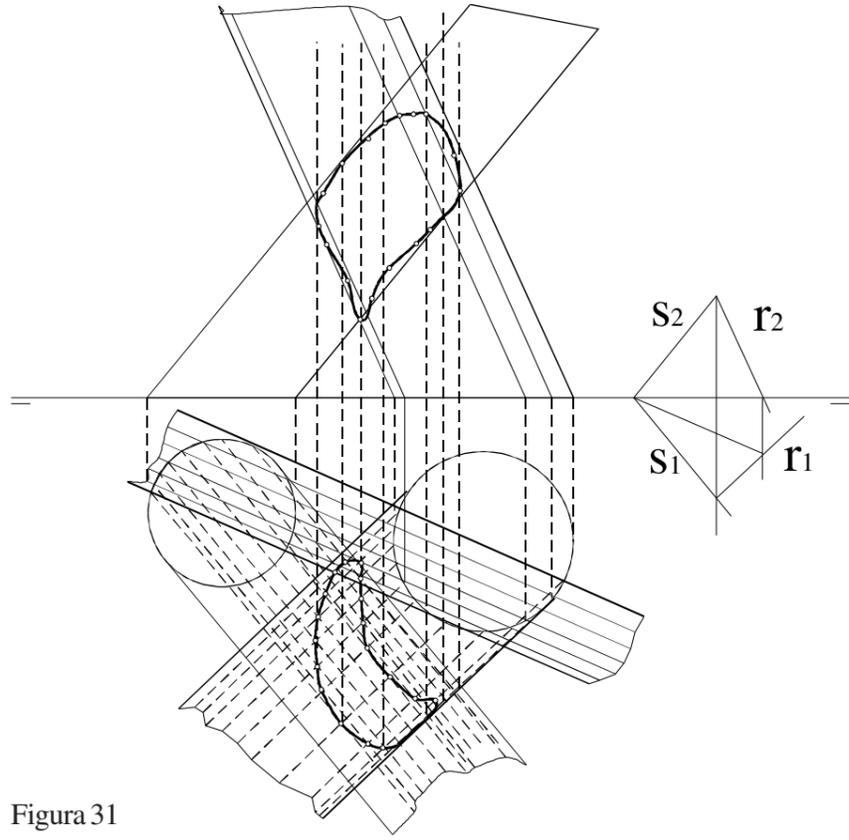


Figura 31

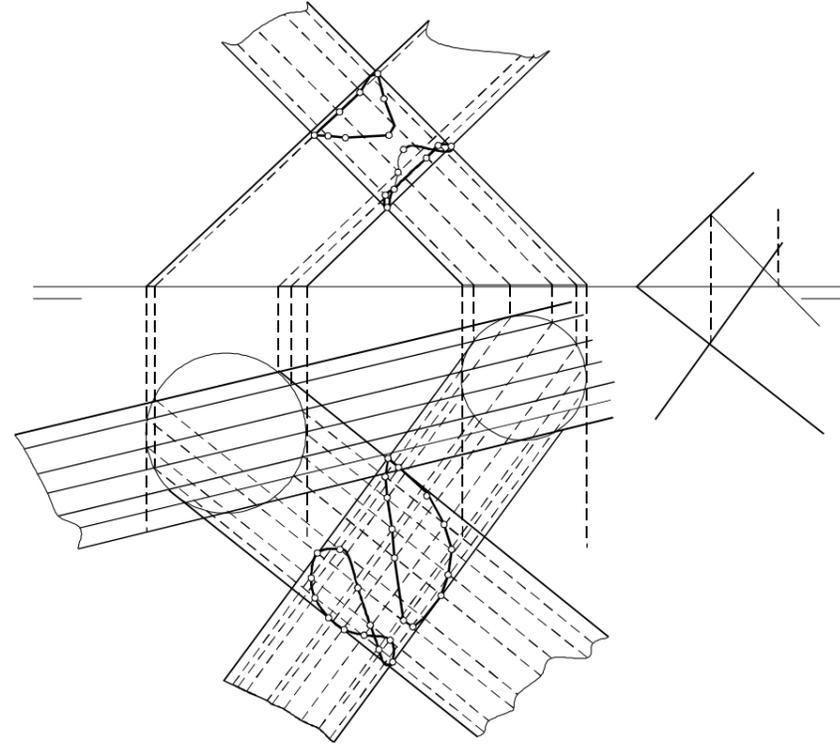


Figura 32

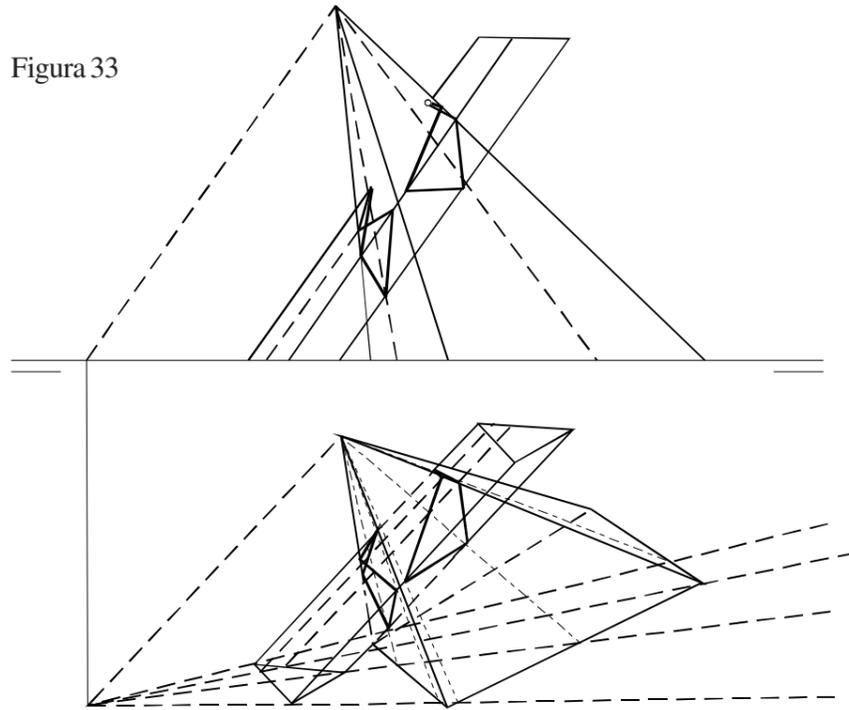


Figura 33

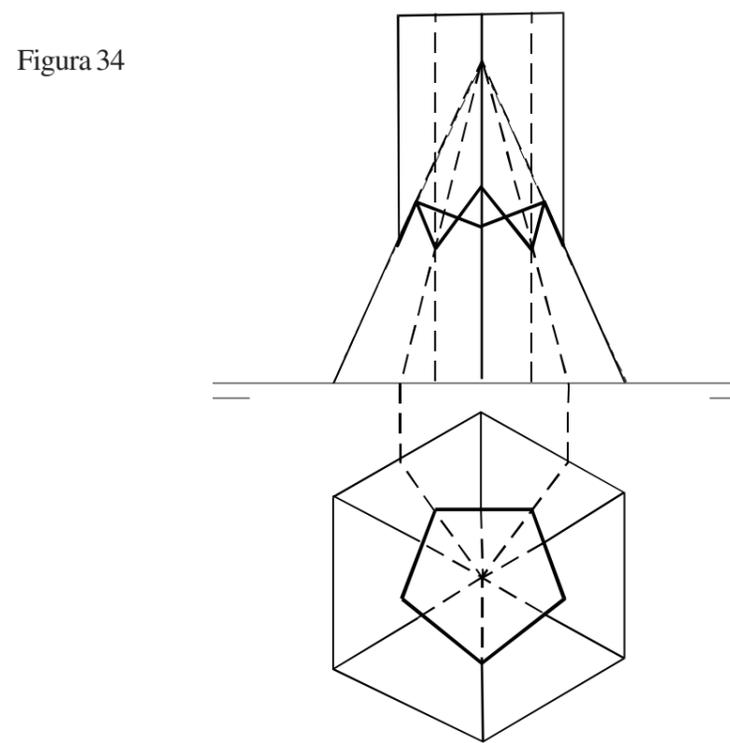


Figura 34

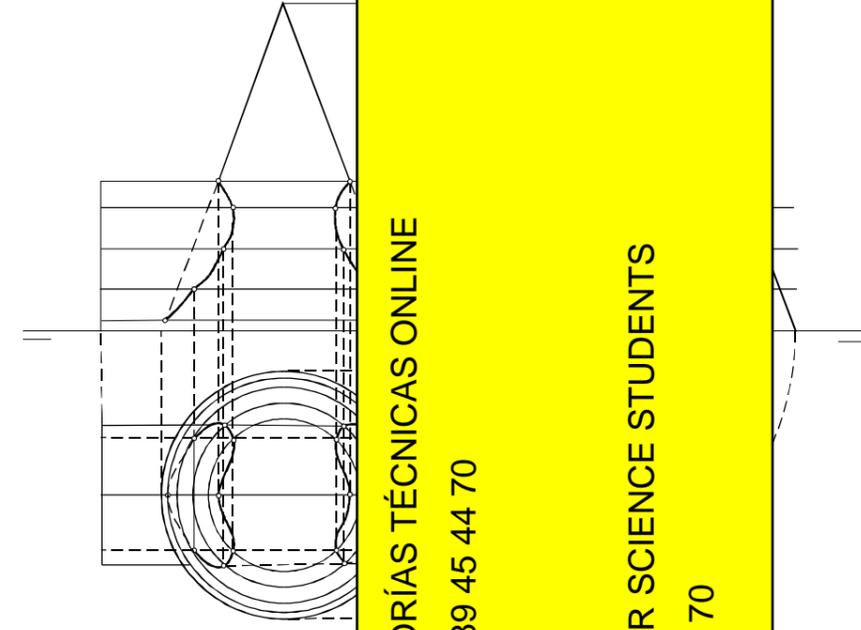


Figura 35

En la intersección de dos cilindros paralelos a ambas generatrices polidricas con caras planas los encuentros de aristas y cada uno de los planos auxiliares. En las figuras 33 y 34 se muestran como planos auxiliares de y son paralelos a las generatrices poliedros pueden incluso resultar en posiciones especiales como en

Puede también darse el caso de planos diferentes de los mencionados. En esta se ha empleado una familia de planos para determinar su sección con ambas superficies

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Las intersecciones de superficies pueden ser de tres tipos: de mordedura (figura 36), resultando una única curva; de penetración total (figura 37), con dos curvas inconexas como intersección y tangencia (figura 38), con una curva con un punto de cruce o tangencia.

Figura 36. MORDEDURA

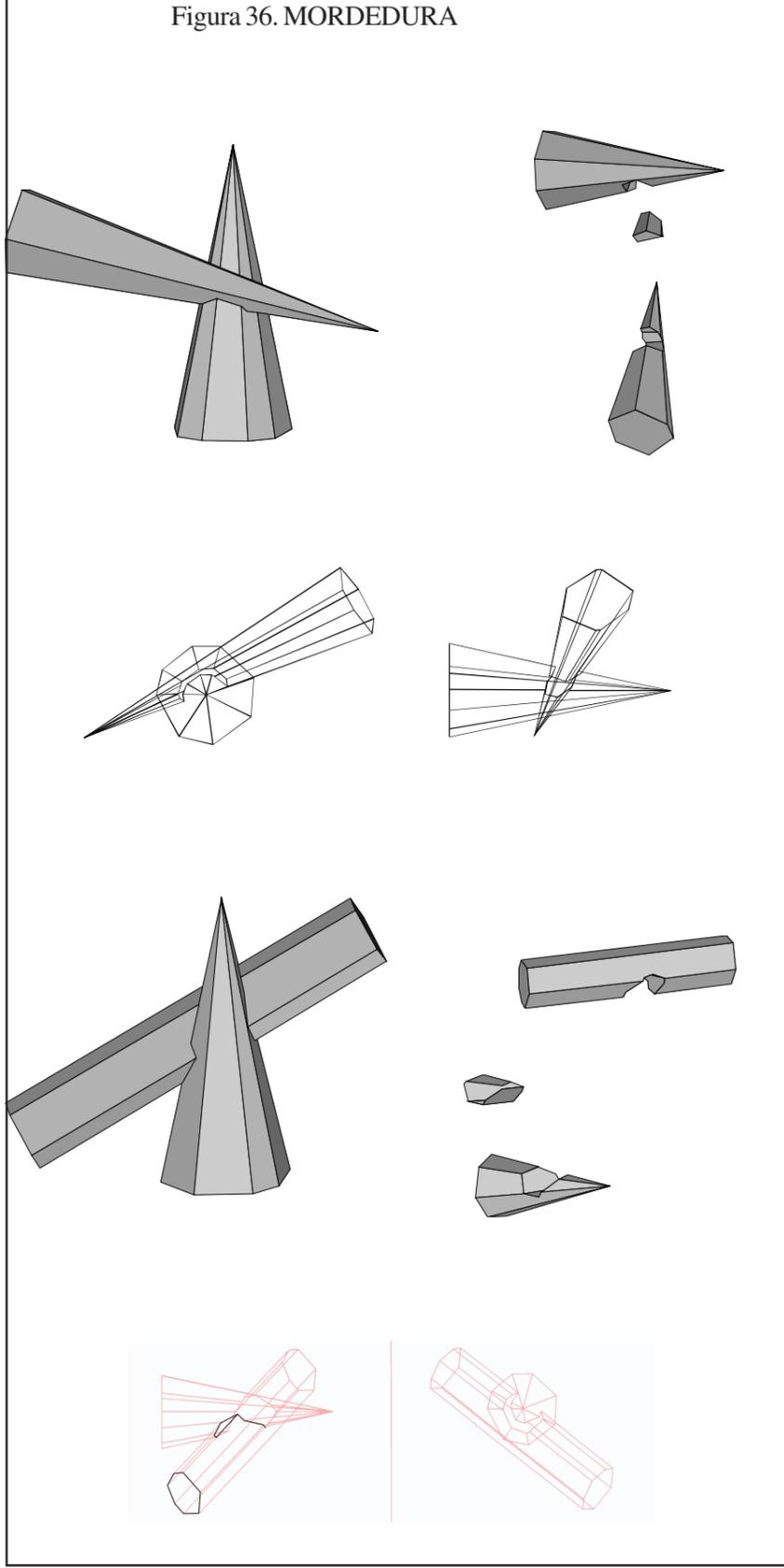
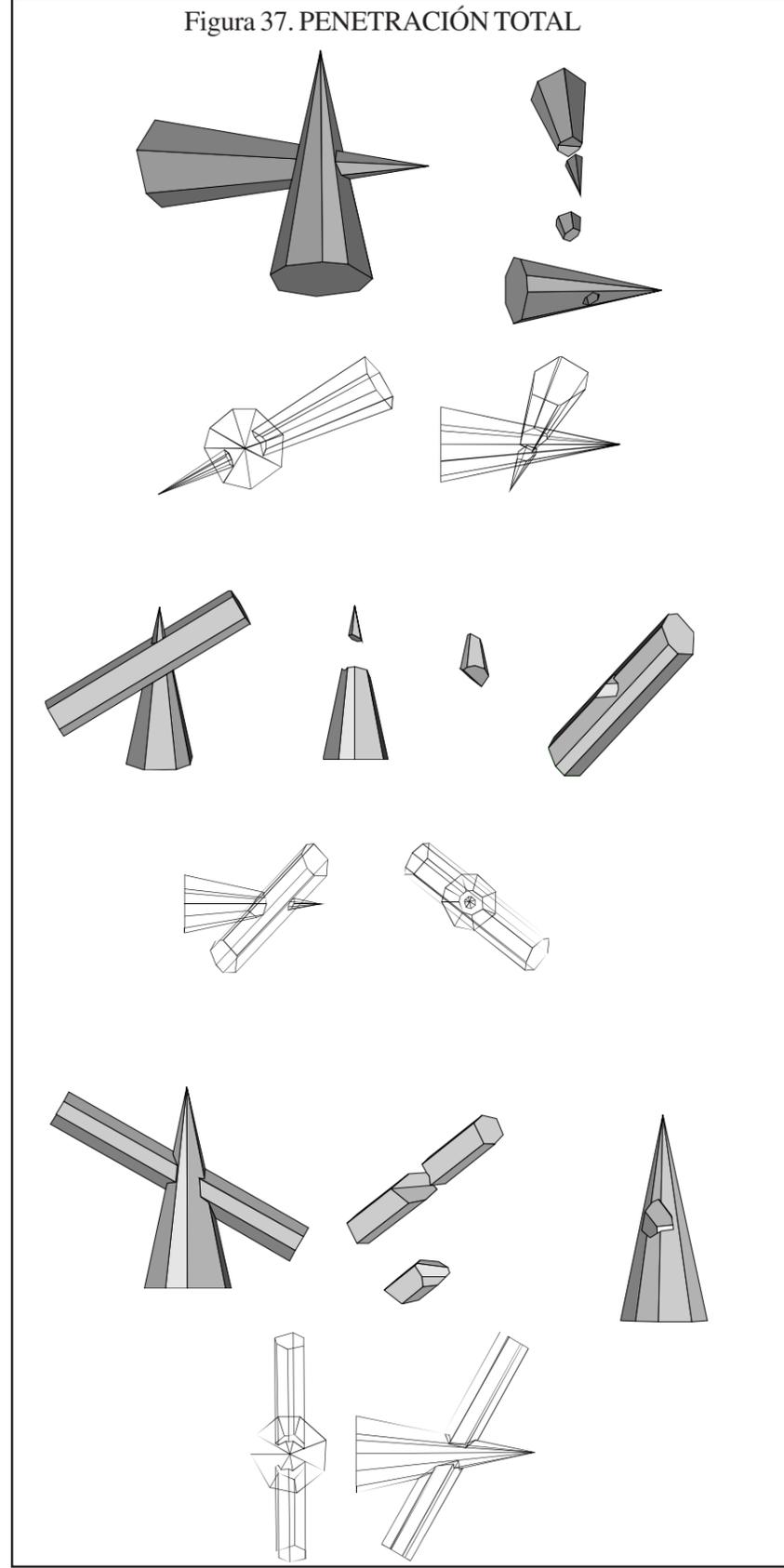
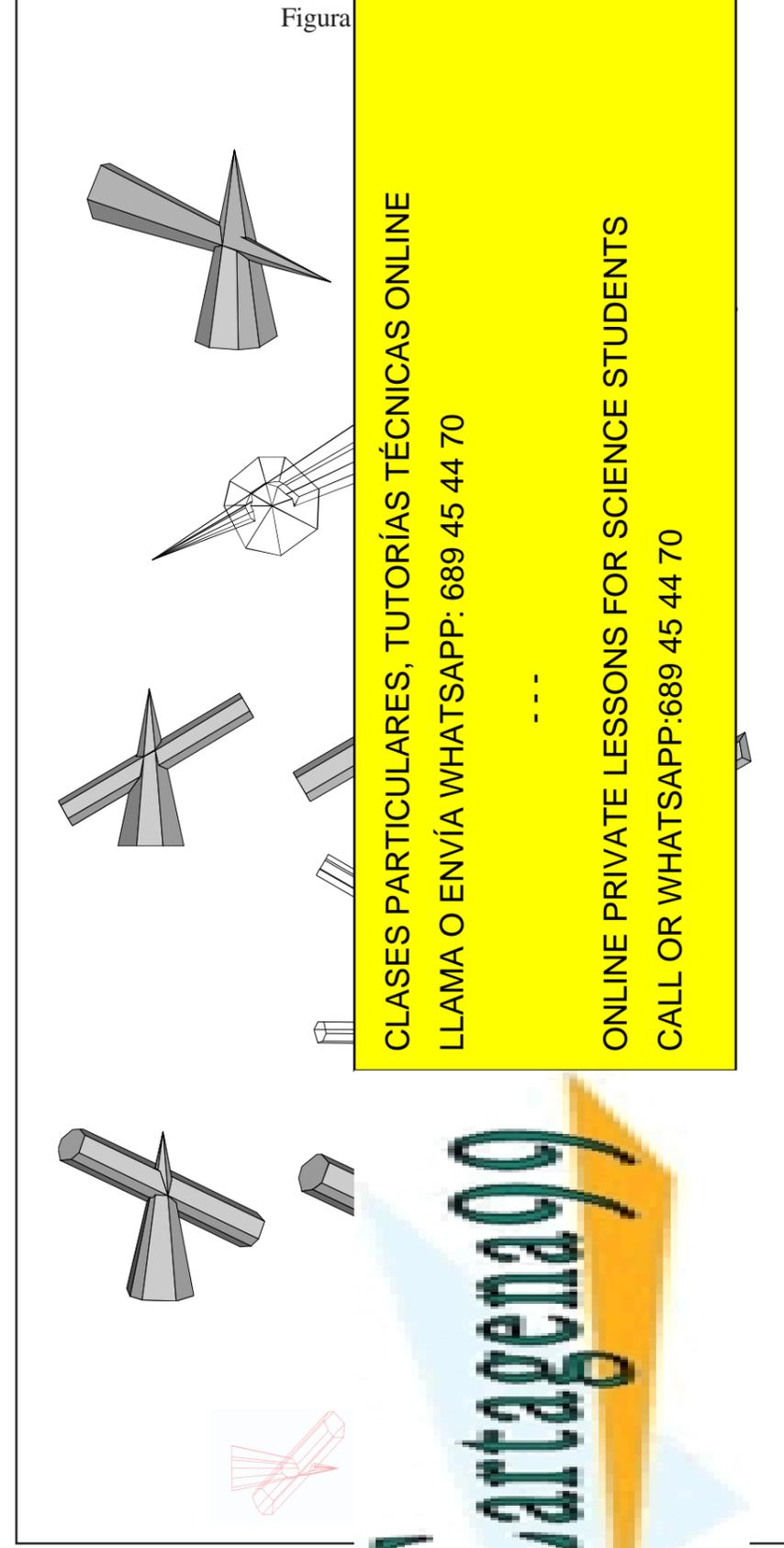


Figura 37. PENETRACIÓN TOTAL



Figura



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Sombras

El estudio de sombras clásico en la geometría ingenieril consiste únicamente en distinguir zonas iluminadas de zonas de sombras para una determinada iluminación bien con foco puntual, bien con foco en el infinito. Se prescinde de estudiar la reflexión y difusión de la luz al incidir en la superficie así como de la diferente iluminancia que reciben zonas con orientaciones diferentes. En sistemas CAD, no obstante, la tendencia es a producir cada vez superficies más realistas teniendo en cuenta la reflexión y dispersión de la luz incidente sobre una superficie e incluso los tratamientos de generación de superficies fractales realistas. En este punto estudiaremos sólo el fundamento clásico de sombras.

La luz se propaga en forma rectilínea de forma que si tenemos un foco de luz, la frontera entre la zona iluminada de una superficie y su zona no iluminada (*sombra propia*) vendrá determinada por la curva de tangencia con un cono con vértice en el foco de luz. La intersección de este cono con un plano cualquiera con tal que la superficie y el foco queden en el mismo semiespacio será la *sombra arrojada* sobre este plano. En la figura 39 se muestra la sombra producida por un foco de luz situado sobre una esfera, tanto la propia como la proyectada sobre el plano horizontal.

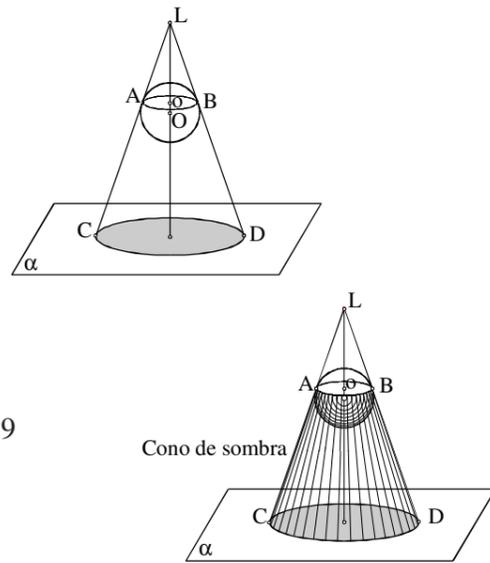


Figura 39

La sombra proyectada sobre un plano no guarda relación biunívoca con el objeto iluminado. De hecho, como se mostraba en la figura 15, dada una esfera y un vértice del cono de sombra, existen otras esferas también tangentes al mismo cono y por tanto con la misma sombra proyectada. Además, según el citado teorema de Landelin, dado un plano secante del cono y tangente a una esfera, la elipse intersección del plano con el cono resulta tener un foco en el punto F_1 de tangencia de la esfera y el plano, siendo el otro foco el punto de tangencia de otra de estas esferas tangente al mismo cono. Como es evidente pues, la propia elipse tiene en este caso la misma sombra arrojada que las esferas.

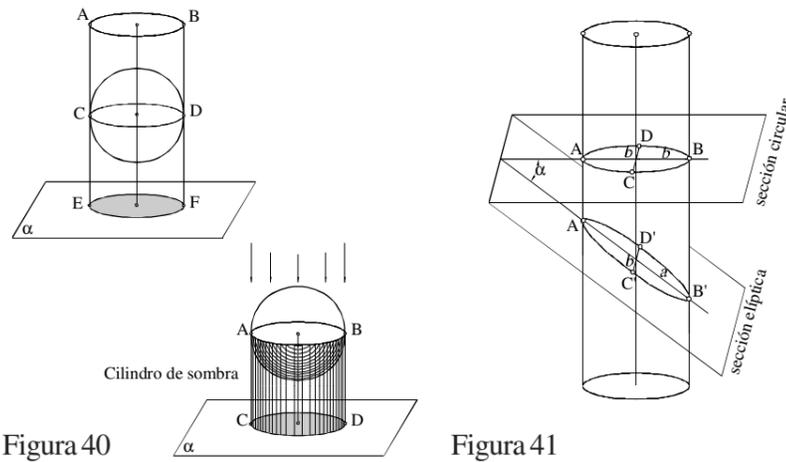


Figura 40

Figura 41

En el caso de luz proveniente de un foco infinitamente alejado, en lugar de cono de sombra deberemos hablar de cilindro de sombra como se indica en la figura 40. En este caso todas las esferas que proyectan la misma sombra tienen el mismo diámetro como puede deducirse de la figura 15. La sombra cilíndrica proyectada de una esfera sobre un plano cualquiera será en general una elipse tal como se muestra en la figura 41, correspondiendo a la sección plana de un cilindro circular.

La construcción de la sombra propia y la sombra proyectada sobre los planos del diedro se realiza en el sistema diédrico fácilmente mediante cambio de plano de proyección. En la figura 42, dada una dirección L de luz incidente, cambiando de plano horizontal de proyección se consigue que la luz incida en una dirección horizontal de forma que la frontera de la sombra propia se proyecta en un diámetro del contorno aparente sobre el nuevo plano horizontal. Basta además trazar rectas paralelas a la nueva proyección horizontal de la dirección de la luz y levantarlas desde la línea de tierra para construir la sombra proyectada sobre el plano vertical de proyección. En la figura 43 se realiza el mismo proceso para hallar la sombra sobre el plano horizontal.

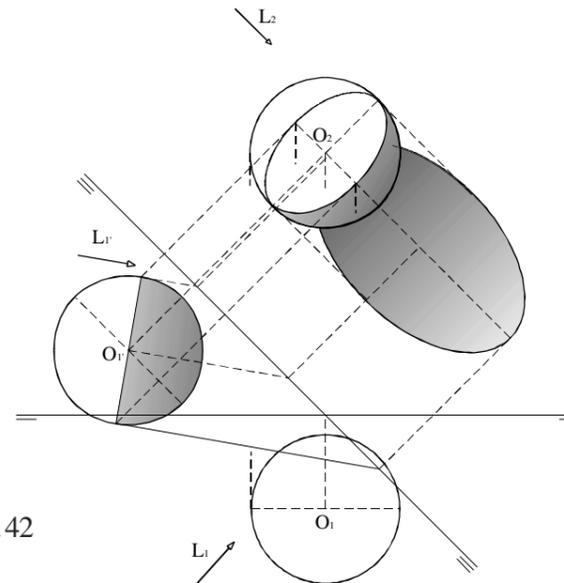
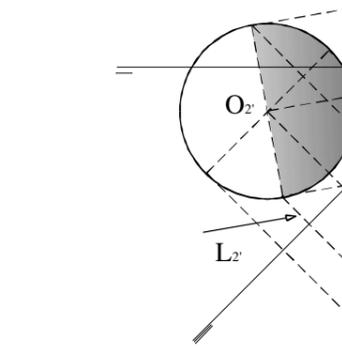
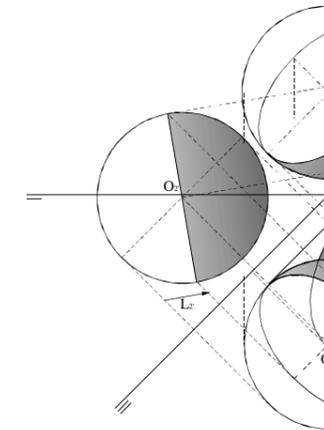


Figura 42

Figura 43



En la figura 44 se muestra la construcción de la sombra sobre el diedro cubre parte de la esfera, debiéndose hallar por separado las sombras. Se muestra por separado la sombra propia para mayor claridad.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

