Notas de Matemática Discreta

por

Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez
Universidad Autónoma de Madrid

Lo que sigue es una versión preliminar (en formato pdf) de uno de los capítulos del libro "Notas de Matemática Discreta", que se puede descargar en www.uam.es/pablo.fernandez. Agradeceríamos a los posibles lectores que nos enviaran cualquier sugerencia o corrección que consideren oportuna, a las direcciones de correo electrónico pablo.fernandez@uam.es ó joseluis.fernandez@uam.es.

Capítulo 3

Las estructuras básicas de la Combinatoria

Cuando contamos y enumeramos, cuando hacemos Combinatoria, aparecen con frecuencia unas estructuras básicas, que merecen nombres propios y un análisis específico. Así, cada vez que, tras meditar detenidamente sobre una cierta cuestión combinatoria, identifiquemos el objeto de interés (por ejemplo, particiones de un cierto conjunto en bloques no vacíos), sabremos que la respuesta estará en una correspondiente familia de números (para el caso, números de Stirling). Este capítulo será una suerte de bestiario de estas estructuras básicas: explicaremos los contextos en las que aparecen unas u otras y aprenderemos a contar cuántas de ellas hay, en cada caso.

Prepárese el lector, pues, para una excursión, casi taxonómica, en la que irá descubriendo paulatinamente las principales familias, algunos de los géneros, y hasta alguna que otra especie, que pueblan el hábitat combinatorio.

3.1. Subconjuntos. Coeficientes binómicos

Sea A un conjunto con $n \geq 1$ elementos. Para las cuestiones que nos interesan, los nombres de los elementos de A no desempeñan papel alguno, así que, por concreción y conveniencia, supondremos que es el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Queremos saber cuántos subconjuntos (sin repetición) distintos de tamaño k (donde $0 \leq k \leq n$) podemos extraer de él; llamemos $C(n,k)$ a esta cantidad.

Ya hemos visto (subsección 2.2.1) que si el orden de presentación de los elementos fuera relevante (es decir, si estuviéramos manejando listas) tendríamos, para cierto k entre 0 y n,

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

listas con esas características. Consideremos una cualquiera de ellas: podemos reordenarla de $k!$ maneras distintas. Y todas esas $k!$ diferentes listas, si nos olvidamos del orden de presentación de los símbolos, dan lugar a un **solo** conjunto de tamaño k.

Por tanto, podemos relacionar cada $k!$ listas (en las que sí es relevante el orden) con un solo conjunto (en el que no importa el orden de presentación de los elementos). Esta aplicación $k!$ a 1 entre el conjunto de las k-listas sin repetición formadas con símbolos $\{1,\dots,n\}$ y la colección de k-subconjuntos de $\{1,\dots,n\}$ nos permite obtener el valor de $C(n,k)$:

$$\begin{aligned} C(n,k) &= \#\left\{ \begin{array}{c} k\text{-subconjuntos extraídos de} \\ \text{un conjunto de } n \text{ elementos} \end{array} \right\} = \frac{1}{k!}\,\#\left\{ \begin{array}{c} k\text{-listas con los símbolos de} \\ \text{un conjunto de } n \text{ elementos} \end{array} \right\} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \end{aligned}$$

Recordemos ahora los llamados **coeficientes binómicos**[1], cuyo símbolo es $\binom{n}{k}$, definidos para un cierto entero positivo n y para cada $0 \le k \le n$, que son una manera conveniente de abreviar la cantidad que nos interesa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

En el rango de k de interés, ambas cantidades coinciden, $C(n,k) = \binom{n}{k}$, así que muchas veces utilizaremos el segundo símbolo, e incluso el nombre de coeficiente binómico, para describir el número de k-subconjuntos sin repetición que se pueden formar con n símbolos[2].

El factorial de un número $n \ge 1$ es, como bien sabemos,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Por convenio, el factorial de 0 vale $0! = 1$. Esta elección es consistente con la definición combinatoria de los $C(n,k)$. Por un lado, sólo hay un conjunto de tamaño cero que podemos extraer del conjunto $\{1,\dots,n\}$, el conjunto vacío $\emptyset$. La fórmula nos da

$$C(n,0) = \frac{n!}{0!\,n!} = 1,$$

como corresponde. Por otro lado, el único conjunto con n elementos que se puede extraer de un conjunto de n elementos es el propio conjunto. Y observemos que

$$C(n,n) = \frac{n!}{n!\,0!} = 1.$$

La expresión algebraica de los $C(n,k)$ no nos permite considerar índices $k > n$ (no sabemos definir el factorial de un número negativo). Pero, combinatoriamente, es claro que

$$C(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n,$$

porque no podemos extraer subconjuntos de tamaño mayor que el original.

En resumen, dado $n \ge 1$, el número $C(n,k)$, que cuenta *el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer del conjunto* $\{1,\dots,n\}$, esto es, el número de maneras en que podemos elegir k símbolos de entre una colección de n, vale 0 fuera del rango de interés, $0 \le k \le n$; y en el rango, su valor coincide con el coeficiente binómico $\binom{n}{k}$.

[1]El nombre de coeficientes binómicos proviene de que son los que se obtienen en el desarrollo del binomio de Newton, véase la subsección 3.1.6.

[2]Como curiosidad, señalemos que este análisis nos permite deducir que la fracción $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ es trivialmente un entero, algo que no es tan fácil de comprobar algebraicamente.

En las dos siguientes subsecciones estudiaremos algunas propiedades de estos números $C(n,k)$; todas ellas tendrán sentido en el rango habitual, así que utilizaremos para ellos el nombre de coeficientes binómicos y el símbolo $\binom{n}{k}$. Posponemos a la subsección 3.1.3 algunas aplicaciones combinatorias interesantes de estos números, pero para que el lector empiece a captar su utilidad, ahí va un primer ejemplo simpático.

Ejemplo 3.1.1 ***La ley de Murphy o el enigma de los calcetines****. Tenemos diez pares de calcetines (distintos) y desaparecen seis calcetines (escogidos al azar). ¿Qué es más probable, que nos queden cuatro pares útiles (el peor caso) o que nos queden siete pares útiles (el mejor)?*

Lo adivinó: la ley de Murphy es cierta, es más probable que nos queden sólo 4 pares. Para justificarlo, etiquetemos los diez pares de calcetines atendiendo a la pareja a la que pertenezcan y a que sean el calcetín izquierdo o derecho:

$$D_1, I_1,\ D_2, I_2,\ \ldots\ D_{10}, I_{10}\,.$$

Como en el ejemplo 2.2.4, nuestro concepto de probabilidad será, simplemente, el del cociente de los casos favorables entre los posibles. Los casos totales, las posibles desapariciones, son $\binom{20}{6}$, pues hay que elegir 6 de los 20 calcetines. Para que nos queden 7 pares útiles, la única posibilidad es que hayan desaparecido tres pares completos. Para contar los casos favorables, basta elegir esas tres parejas (de entre las 10 que hay), así que, si llamamos p_7 a la probabilidad de tener 7 pares útiles,

$$p_7 = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{6}} = \frac{1}{323}\,.$$

Para contar de cuántas maneras nos quedan 4 parejas útiles, primero elegimos estas cuatro, y luego decidimos qué calcetín de cada una de las restantes seis parejas desaparece. En total,

$$p_4 = \frac{\binom{10}{4}\,2^6}{\binom{20}{6}} = \frac{112}{323}\,.$$

Así que es 112 veces más probable que estemos en el caso malo. Pero no desesperemos: en realidad, lo más probable es que nos queden 5 pares útiles. Podemos contar de cuántas maneras nos quedamos en este caso de la siguiente manera: elegimos los 5 pares que quedan completos ($\binom{10}{5}$ maneras), y de los restantes 5 pares, uno ha de desaparecer completo (lo contamos, 5 posibilidades), y del resto hemos de elegir qué calcetín desaparece (2^4 maneras). En total,

$$p_5 = \frac{\binom{10}{5}\,5\times 2^4}{\binom{20}{6}} = \frac{168}{323}\,.$$

El último caso que hemos de considerar, aquél en el que quedan 6 pares útiles, requeriría elegir los 6 pares íntegros, y de los otros cuatro, elegir los dos que desaparecen completos y tomar un calcetín de las otras dos parejas. Es decir,

$$p_6 = \frac{\binom{10}{6}\binom{4}{2}\,2^2}{\binom{20}{6}} = \frac{42}{323}\,.$$

Obsérvese el permanente uso de la regla del producto que hemos hecho en estos cálculos. ♣

3.1.1. Propiedades de los coeficientes binómicos

1. Simetría

Fijado un cierto $n \geq 1$ y un valor de k en el rango habitual, $0 \leq k \leq n$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

La prueba algebraica de esta propiedad es muy sencilla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Pero es más interesante utilizar argumentos combinatorios. Llamemos

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de tamaño } k \\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos de tamaño } n-k \\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\}.$$

Para cada subconjunto B de tamaño k (es decir, incluido en Γ_1) podemos encontrar un subconjunto (y sólo uno) de tamaño $n-k$ (esto es, de Γ_2) definido por

$$B^c = \{1,\dots,n\} \setminus B.$$

La aplicación que asocia a cada k-subconjunto su complementario dentro del conjunto $\{1,\dots,n\}$ es una aplicación biyectiva entre los conjuntos Γ_1 y Γ_2. Y como sabemos que

$$|\Gamma_1| = \binom{n}{k} \qquad \text{y} \qquad |\Gamma_2| = \binom{n}{n-k},$$

ambas cantidades han de ser iguales.

2. Suma de los coeficientes binómicos

Para cada $n \geq 1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Pruébese algebraicamente, manipulando los factoriales que aparecen en la suma, es tarea muy engorrosa. Sin embargo, se sencillo construir una prueba por inducción, y animamos al lector a intentarlo (ejercicio 3.1.1). Veremos también una demostración alternativa, utilizando el teorema del binomio, en la subsección 3.1.6.

La prueba combinatoria es trasparente. Sabemos que $\binom{n}{k}$ cuenta, para cada $0 \leq k \leq n$, el número de subconjuntos de tamaño k que podemos extraer del conjunto $A = \{1,\dots,n\}$.

Llamemos Γ al conjunto de todos los posibles subconjuntos de A, que sabemos (recúerdese el ejemplo 2.2.2) que tiene tamaño 2^n. Definamos además

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño } 0\} \\
\Gamma_1 &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño } 1\} \\
&\vdots \\
\Gamma_n &= \{\text{subconjuntos de } A \text{ de tamaño n}\}.
\end{aligned}$$

Los conjuntos $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ constituyen una partición de Γ (¡compruébese!). Así que, con la regla de la suma, concluimos que

$$|\Gamma| = \sum_{j=0}^{n} |\Gamma_j| \quad \Longrightarrow \quad 2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

Conviene insistir en la identificación entre subconjuntos y listas de ceros y unos del ejemplo 2.2.2. Allí vimos que dar un subconjunto del conjunto $\{1, \dots, n\}$ es exactamente lo mismo que construir una lista de longitud n con ceros o unos. El diccionario entre ambas cuestiones es: si en la posición j-ésima de la lista aparece un 1, el elemento j está en el subconjunto; y si aparece un 0, no estará.

En su momento esto nos permitió determinar que hay 2^n subconjuntos posibles. Ahora podemos ser un poco más finos: si sólo nos interesamos por los subconjuntos de tamaño k, el mismo argumento nos permite reinterpretar, combinatoriamente, los coeficientes binómicos:

$$\binom{n}{k} = \# \left\{ \begin{array}{c} \text{listas de longitud } n \text{ formadas con ceros} \\ \text{o unos que tienen exactamente } k \text{ unos} \end{array} \right\}$$

3. Regla de recurrencia

Dado un $n \geq 2$ y para cada $1 \leq k \leq n-1$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

Ponemos, por ahora, cierto cuidado en la definición de los rangos en los que esta expresión es válida aunque más adelante comprobaremos que su validez es general. La prueba algebraica requiere unas ciertas manipulaciones:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n-k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k} \underbrace{\left[\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right]}_{=1} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Para la prueba combinatoria, construimos la siguiente partición:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de}\\ \text{tamaño } k \text{ extraídos}\\ \text{de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen al elemento } n\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que } \textit{no} \text{ contienen al elemento } n\end{array}\right\}$$

Por supuesto, la elección del elemento n, el último, para este proceso es totalmente arbitraria (podíamos haber elegido, por ejemplo, el primero). El de la izquierda, ya lo sabemos, es un conjunto con $\binom{n}{k}$ elementos, y la regla de la suma nos permite escribir que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen al elemento } n\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que } \textit{no} \text{ contienen al elemento } n\end{array}\right\}\\ &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k-1\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n-1\}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n-1\}\end{array}\right\}\\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es la clave del argumento, y está basada en un par de biyecciones. Por ejemplo, la que corresponde al primer término se basa en lo siguiente: para construir todos los subconjuntos de tamaño k con los elementos $\{1,\dots,n\}$ que contengan al elemento n, basta decidir quiénes son sus $k-1$ acompañantes, es decir, basta elegir $k-1$ elementos del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$. Para el segundo término, como los subconjuntos que estamos considerando en este caso no contienen a n, tendremos que escoger los k elementos de entre los del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$.

3.1.2. Recursión con coeficientes binómicos

Esta última propiedad, la regla de recurrencia, es especialmente útil e interesante, y nos va a llevar a un método de cálculo alternativo (a la fórmula) para los coeficientes binómicos. La regla nos dice que un coeficiente binómico $\binom{n}{k}$ puede ser escrito en términos de la suma de dos coeficientes binómicos de índice superior $n-1$. Si repetimos el procedimiento, pero para los dos nuevos coeficientes binómicos, llegamos a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \left[\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \left[\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}\right]\\ &= \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{2}{0}\binom{n-2}{k} + \binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}\end{aligned}$$

Ya tenemos escrito $\binom{n}{k}$ en términos de la suma (con unos ciertos pesos que ya hemos escrito como coeficientes binómicos) de unos ciertos coeficientes binómicos de índice superior $n-2$. El proceso se puede repetir, pero empieza a resultar engorroso, así que recurrimos a un argumento de tipo combinatorio.

El objetivo es escribir $\binom{n}{k}$ en términos, por ejemplo, de coeficientes binómicos cuyo índice superior sea, por ejemplo, $n-l$. Dividiremos los n elementos de nuestro conjunto en dos tipos distintos, l del primer tipo y $n-l$ del segundo (es un argumento similar al que utilizamos para la regla de recursión: allí, del "primer tipo" había sólo 1, justamente el elemento n).

Ahora clasificamos los subconjuntos dependiendo del número de elementos del primer tipo que contengan. A este número lo llamaremos j, y tomará todos los posibles valores entre 0 y k. Obtenemos así la siguiente partición

$$\left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos de}\\ \text{tamaño } k \text{ extraídos}\\ \text{de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen 0 elementos}\\ \text{del primer tipo}\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen 1 elemento}\\ \text{del primer tipo}\end{array}\right\}$$

$$\cup \cdots \cup \left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen } k-1 \text{ elementos}\\ \text{del primer tipo}\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{subconjuntos de tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\dots,n\}\\ \text{que contienen } k \text{ elementos}\\ \text{del primer tipo}\end{array}\right\}.$$

En realidad, deberíamos ser algo más cuidadosos, porque sólo tenemos l elementos del primer tipo. Así que si $l < k$, en la partición de arriba estamos incluyendo subconjuntos que son necesariamente vacíos. Pero tampoco debemos preocuparnos, pues el tamaño de estos últimos conjuntos será 0.

Ya estamos en disposición de obtener la fórmula que buscamos. Sólo tenemos que calcular el tamaño de los conjuntos de arriba, cada uno de los cuales está etiquetado con un cierto valor de j. Fijado este j, "construimos" los subconjuntos de interés con el siguiente procedimiento:

1. primero seleccionamos qué j elementos del primer tipo están en nuestro subconjunto. Lo podemos hacer de $\binom{l}{j}$ formas distintas;
2. y en segundo lugar, seleccionamos los $k-j$ elementos del segundo tipo que contiene el subconjunto. Esto se podrá hacer de $\binom{n-l}{k-j}$ formas distintas.

Reuniendo toda la información y aplicando las reglas de la suma y del producto obtenemos la relación

$$\boxed{\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{l}{j}\binom{n-l}{k-j}}$$

la **fórmula de Vandermonde**, que es la regla general de recursión para obtener un coeficiente binómico de índice superior n si conocemos los de índice superior $n-l$ (y, claro, los de índice superior l). Por si alguien sigue preocupado, hacemos notar que la suma anterior se extiende, en realidad, hasta el mínimo de l y k. Esto no supone problema alguno si seguimos aplicando el convenio (que será de uso general en estas páginas) de que los coeficientes binómicos son nulos si, por ejemplo, el índice de abajo es mayor que el de arriba, o si nos aparecen índices negativos. Esto resulta ser muy cómodo y hace que, en muchas ocasiones, al escribir una suma que involucre coeficientes binómicos no tengamos que ser muy cuidadosos con los límites de sumación; por ejemplo, en la fórmula de Vandermonde podríamos haber escrito que la suma se extiende hasta ∞.

Volvamos a la regla de recurrencia básica,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

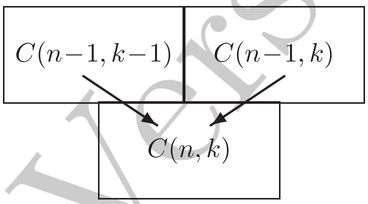
junto a la que mostramos lo que llamaremos, por razones que se entenderán en un momento, los *valores frontera*:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{n}{n} = 1\,,$$

válidos para cualquier $n \geq 1$.

FIGURA 3.1: Tartaglia

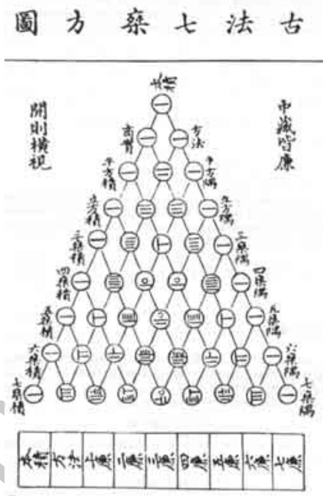
Vamos a ver a continuación cómo aplicar todo esto al cálculo de coeficientes binómicos arbitrarios. Resulta que, en realidad, toda la información sobre ellos está codificada en la regla de recurrencia y los valores frontera. Es costumbre representar de manera gráfica los coeficientes binómicos $C(n,k)$, o indistintamente $\binom{n}{k}$, mediante el **triángulo de Pascal-Tartaglia**[3]: el parámetro n etiqueta los "pisos" del triángulo, empezando en $n=0$. Para que todo cuadre, definimos $C(0,0)=1$; este número, desde luego, no tiene significado combinatorio, pero la definición es de nuevo consistente con la fórmula de los factoriales. El parámetro k, por su parte, marcará la coordenada de las sucesivas diagonales. Los valores en los bordes (las fronteras) del triángulo son siempre 1. Y las casillas interiores se rellenan siguiendo la ecuación de recurrencia, cuya interpretación gráfica aparece en el dibujo de la izquierda: cada coeficiente binómico se puede obtener sumando los valores de los dos inmediatamente superiores. Con esta regla, y los valores en los bordes, podemos completar el triángulo, como aparece a la derecha (hasta $n=7$):



$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$: 1 7 21 35 35 21 7 1

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$, $k=6$, $k=7$

[3] A veces sólo triángulo de Tartaglia, a veces sólo triángulo de Pascal. Niccolo Fontana (1499-1557) es más conocido como Tartaglia (tartamudo): de pequeño fue gravemente herido en la cara por las tropas francesas que ocupaban Brescia, su localidad natal; de aquel episodio conservó una gran cicatriz en el rostro y ciertas dificultades para hablar. Tradujo y publicó numerosas obras matemáticas clásicas, como los *Elementos* de Euclides y algunos tratados de Arquímedes. Consiguió, entre otros logros, resolver y obtener la fórmula para la resolución de la ecuación cúbica (véase la nota al pie de la página 36).



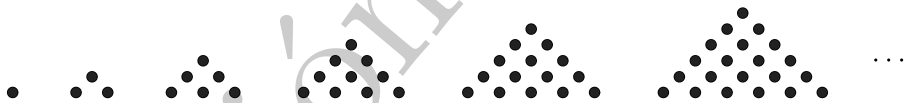
Conviene señalar que los coeficientes binómicos eran ya conocidos anteriormente, en mayor o menor grado; por ejemplo por Ibn Ezra[4] y por Levi ben Gerson[5], entre los siglos XII y XIV. Los matemáticos árabes y chinos[6] de aquella época también manejaban estos números, como se aprecia en la figura de la derecha, del siglo XIII.

Es interesante reflexionar sobre la utilidad de este método para el cálculo de los coeficientes binómicos. Al fin y al cabo, en este caso tenemos una fórmula cerrada:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\,.$$

Fijémonos en que los números que debemos manejar pueden ser enormes en cuanto n sea grande (ya reflexionamos sobre el tamaño de 200! en la subsección 2.4.3, y en la sección 2.4.4 comprobamos cuán grande es $n!$ en general). En todo caso, la fórmula exige efectuar multiplicaciones, mientras que la recurrencia sólo requiere el cálculo de sumas. Muchos de los paquetes informáticos de tipo matemático emplean la regla de recurrencia para evaluar los coeficientes binómicos. Pero, aún así, la fórmula sigue dándonos mucha información. Veremos, por ejemplo, cómo nos lleva, con ayuda de la fórmula de Stirling, a estimar el orden de magnitud de un $\binom{n}{k}$ general.

El triángulo de Tartaglia tiene algunas propiedades sorprendentes. Por ejemplo, el lector descubrirá, en una de las diagonales, los **números triangulares**[7], llamados así por razones obvias:



También podemos encontrar en él la llamada sucesión de números de Fibonacci (F_n), que aparecerá muchas veces más adelante, y cuyos primeros valores son $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, etc. Estos valores se consiguen, para cada $n \geq 1$, sumando coeficientes binómicos (la fórmula general correspondiente la veremos en la subsección 6.3.6): partimos de $\binom{n}{0}$ y

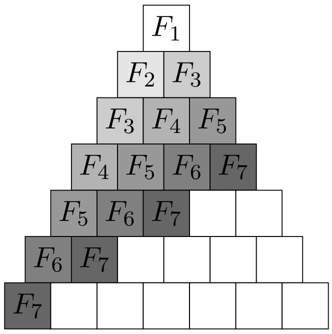
[4]Abraham Ben Meir Ibn Ezra (1089-1164), matemático, exégeta y astrólogo... ¡español!, nacido en Tudela y muerto en Calahorra, estaba interesado y sabía calcular los coeficientes binómicos con $n = 7$. Porque siete *eran* los planetas: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Como buen astrólogo, a Ibn Ezra le preocupaba saber de cuántas formas se puede estar simultáneamente bajo varios de esos signos. El lector podrá encontrar más información sobre este personaje en el artículo *La astrología combinatoria del rabino Ibn Ezra*, de Doron Zeilberger (La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **1** (1998), número 3).

[5]Parece que fue el rabino Levi Ben Gerson (1288-1344) el primero en dar una expresión explícita de los coeficientes binómicos.

[6]Aprovechamos aquí para sugerir al lector una excelente referencia en Historia de las Matemáticas: *Mathematics and its history* (Springer-Verlag, 1991), de J. Stillwell.

[7]Si llamamos T_n, para $n \geq 1$, a los sucesivos números triangulares, la construcción nos dice que $T_1 = 1$, y $T_n = T_{n-1} + n$, para cada $n \geq 2$. Esta ecuación de recurrencia es fácil de resolver (véase el ejemplo 6.1.2 para una semejante), y la fórmula resulta ser $T_n = \binom{n+1}{2}$. Así que los números triangulares nos dicen, por ejemplo, cuántos saludos se producen en una reunión con $n+1$ personas. O, en términos, más técnicos, cuántas aristas tiene un grafo completo con $n+1$ vértices (véase el capítulo 8).

vamos incluyendo los coeficientes en los que aumentamos el índice inferior y disminuimos el superior, hasta salirnos del triángulo (en el dibujo, los distinguimos con distintas tonalidades de gris y con las etiquetas del número de Fibonacci correspondiente):



$$\begin{aligned}
\tbinom{0}{0} &= 1 = F_1\\
\tbinom{1}{0} &= 1 = F_2\\
\tbinom{2}{0}+\tbinom{1}{1} &= 2 = F_3\\
\tbinom{3}{0}+\tbinom{2}{1} &= 3 = F_4\\
\tbinom{4}{0}+\tbinom{3}{1}+\tbinom{2}{2} &= 5 = F_5\\
\tbinom{5}{0}+\tbinom{4}{1}+\tbinom{3}{2} &= 8 = F_6\\
\tbinom{6}{0}+\tbinom{5}{1}+\tbinom{4}{2}+\tbinom{3}{3} &= 13 = F_7
\end{aligned}$$

Tamaño de los coeficientes binómicos

Fijemos un valor de n y miremos, en el triángulo de Tartaglia, los coeficientes binómicos de índice superior n. Por ejemplo, los correspondientes a $n = 7$:

$$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1\,.$$

Por supuesto, la lista es simétrica con respecto al elemento central (o centrales, si, como en el ejemplo, n es impar). El primer valor es 1 y los valores van creciendo, de izquierda a derecha, hasta llegar al centro (o centros), a partir del cual empieza a decrecer. Esto es algo general:

$$\max_{k=0,\dots,n}\left\{\binom{n}{k}\right\} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil}$$

(véase el ejercicio 3.1.2 para una posible demostración). Nótese que los dos coeficientes binómicos escritos a la derecha son el mismo si n es par.

Nos interesa conocer el orden de magnitud de los números $\binom{n}{k}$. El mayor de ellos es el valor central (o centrales). Una primera observación es que, como entre todos ellos suman 2^n, cada uno de ellos ha de ser menor que 2^n. Por comodidad, tomemos un índice par, digamos $2n$. El razonamiento anterior nos lleva a deducir que

$$\binom{2n}{n} < 2^{2n} = 4^n\,.$$

Pero ya que tenemos la tan precisa estimación asintótica de Stirling (véase la sección 2.4.4), afinemos aún más: cuando $n \to \infty$,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{(2n)^{2n}\,e^{-2n}\,\sqrt{4\,\pi\,n}}{[n^n\,e^{-n}\,\sqrt{2\,\pi\,n}]^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}\,4^n\,.$$

Así que es un crecimiento exponencial, con una pequeña corrección (el denominador $\sqrt{\pi n}$). Visto en una escala logarítmica, que es la adecuada en este caso, estas correcciones son irrelevantes, y el lector podrá comprobar sin esfuerzo que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\binom{2n}{n}}{n\,\log(4)} = 1\,.$$

3.1.3. Algunas aplicaciones combinatorias de los coeficientes binómicos

Ya tenemos mucha información sobre los coeficientes binómicos, es hora de que los veamos en acción. Consideremos las siguientes tres cuestiones combinatorias, aparentemente muy distintas entre sí, pero que veremos que se pueden relacionar unas con otras, vía las adecuadas biyecciones:

- *Cuestión 1.* Calcular el número de composiciones distintas de longitud k del entero n.
- *Cuestión 2.* Calcular el número de soluciones enteras de
$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right\}$$
donde por solución entendemos una lista de enteros $(x_1, \dots, x_k)$, todos ellos mayores o iguales que 1, cuya suma vale n.
- *Cuestión 3.* Calcular el número de formas distintas de distribuir n bolas idénticas en k cajas numeradas.

Ésta es la primera aparición en este texto de las distribuciones de bolas en cajas que, como iremos viendo, suponen un útil lenguaje para representar múltiples cuestiones. En la sección 3.4 resumiremos los distintos casos que nos iremos encontrando a lo largo de estas páginas. La cuestión 2 trata sobre ecuaciones con soluciones en los enteros. A este tipo de ecuaciones se les suele llamar diofánticas. Las estudiaremos con detalle en el capítulo 4, en especial en la subsección 4.1.4. Por ahora no nos interesará cómo resolverlas, sólo saber cuántas soluciones distintas tienen.

La primera cuestión, sobre las composiciones del número n, ya la tratamos en la subsección 2.2.3. Entonces veíamos la biyección que nos permitía contar el número total de ellas:

$$\#\,\{\text{composiciones de } n\} = \#\big\{(n-1)\text{-listas con los símbolos } \{\Box, \star\}\big\} = 2^{n-1}.$$

Pero ahora queremos un mayor nivel de detalle: nos preguntamos cuántas composiciones hay, de esas 2^{n-1}, que tengan exactamente longitud (número de sumandos) k. El argumento es análogo al que utilizamos en su momento: dar una composición de n de longitud k es lo mismo que colocar $k-1$ separadores en los $n-1$ huecos a nuestra disposición. Es decir:

$$\begin{aligned}\#\left\{ \begin{array}{c} \text{Composiciones} \\ \text{de longitud } k \\ \text{del número } n \end{array} \right\} &= \#\left\{ \begin{array}{c} \text{Formas distintas de elegir } k-1 \text{ posiciones} \\ \text{(para los separadores) de entre } n-1 \\ \text{(los huecos a nuestra disposición)} \end{array} \right\} \\ &= \#\left\{ \begin{array}{c} \text{Subconjuntos distintos de tamaño } k-1 \\ \text{extraídos del conjunto } \{1,\dots,n-1\} \end{array} \right\} = \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

Por otra parte, y ya entramos con la segunda cuestión, dar una composición de longitud k de n es lo mismo (compruébese la biyección) que dar una solución de

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k\,, \quad \text{con } x_i \geq 1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq k\,,$$

donde por solución entendemos una *lista* de números enteros $x_1, \dots, x_k$, mayores o iguales que 1, que suman n. Por tanto,

$$\boxed{\#\left\{\text{soluciones de } \left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 1 \end{array}\right\}\right\} = \binom{n-1}{k-1}}$$

Vamos con la tercera cuestión: si queremos distribuir n bolas *idénticas* en k cajas numeradas, la única información relevante que debemos aportar es el número de bolas que va a cada caja. Así que si llamamos

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \text{número de bolas que van a la caja } 1, \\ x_2 = \text{número de bolas que van a la caja } 2, \\ \vdots \\ x_k = \text{número de bolas que van a la caja } k, \end{array}\right.$$

vemos que estos números $x_1, \dots x_k$ suman n, pero la única restricción es que deben ser mayores o iguales que cero (porque pueden quedar cajas vacías en nuestra distribución). Así que podemos contar:

$$\#\left\{\begin{array}{c} \text{distribuciones de } n \text{ bolas} \\ \text{idénticas en } k \text{ cajas numeradas} \end{array}\right\} = \#\left\{\text{sols. de } \left\{\begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_k = n \\ x_i \geq 0 \end{array}\right\}\right\}$$

Semejante al que ya sabemos resolver, pero no exactamente igual, porque las restricciones sobre los posibles valores de los x_i son un poco diferentes. Pero no nos va a costar mucho transformarlo ligeramente: démonos una solución del problema anterior, una lista de enteros no negativos $(x_1, \dots, x_k)$ que suman n. Y sumémosle 1 a cada uno de ellos; obtenemos así una lista $(y_1, \dots, y_k)$, donde cada y_i se obtiene como $x_i + 1$, que son todos ≥ 1. ¿Y cuánto suman?, lo que sumaran los x_j, más el número de unos que hemos añadido, k de ellos. Esto es,

$$y_1 + \cdots + y_k = n + k\,.$$

Pero también podemos ir al revés: dada una lista $(y_1, \dots, y_k)$, con $y_j \geq 1$ para cada j, que sumen $n + k$, si le restamos 1 a cada uno de ellos, obtenemos una lista $(x_1, \dots, x_k)$ que es solución del problema que teníamos. Con esta biyección podemos concluir que

$$\boxed{\#\left\{\begin{array}{c} \text{distribuciones de} \\ n \text{ bolas idénticas en} \\ k \text{ cajas numeradas} \end{array}\right\} = \#\left\{\text{sols. de } \left\{\begin{array}{c} y_1 + \cdots + y_k = n + k \\ y_i \geq 1 \end{array}\right\}\right\} = \binom{n+k-1}{k-1}}$$

Y ya tenemos la respuesta para las tres cuestiones que nos interesaban.

Podemos formular versiones más generales de estas tres cuestiones, que ya estamos en disposición de analizar. Por ejemplo, podríamos generalizar la segunda cuestión de la siguiente manera: dados n y k, y unos enteros no negativos $p_1, \dots, p_k$, buscar el

$$\#\text{ soluciones de } \left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq p_1, \dots, x_k \geq p_k \end{array}\right\}$$

Obsérvese la interpretación en términos de bolas en cajas: es el número de formas de distribuir n bolas idénticas en k cajas numeradas con la restricción de que haya, al menos, p_j bolas en la caja j, para cada $j = 1, \ldots, k$. Y en el lenguaje de las composiciones, se trataría de buscar el número de composiciones de n (con k sumandos) en las que el primer sumando fuera mayor o igual que p_1, el segundo mayor o igual que p_2, etc.

Para resolver esta cuestión, la reduciremos a un caso conocido (aquél en el que las restricciones sobre las variables eran todo unos). Para ello, empleamos el cambio siguiente (una biyección): para cada $j = 1, \ldots, k$

$$y_j = \underbrace{x_j - p_j}_{\geq 0} + 1\,.$$

Los y_j son k enteros mayores o iguales que 1, que suman

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = \sum_{j=1}^{k} (x_j - p_j + 1) = k + \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} p_j = n + k - \sum_{j=1}^{k} p_j\,.$$

Recordando cuántas soluciones de este problema había, podemos concluir que:

$$\boxed{\#\text{ soluciones de } \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ x_1 \geq p_1, \ldots, x_k \geq p_k \end{array} \right\} = \binom{n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} p_j}{k-1}}$$

Para recordar este resultado, y no confundirnos con el nombre de los parámetros, pensemos que la respuesta es el coeficiente binómico que tiene

- como índice superior, el valor total de la suma, n, más el número de sumandos, k, menos 1 y menos lo que sumen las restricciones (los p_j);
- y como índice inferior, el número de sumandos menos 1.

El lector podrá reinterpretar sin dificultad la biyección que hemos utilizado en términos de distribuciones de bolas en cajas (todo lo que hemos hecho es distribuir primero $\sum p_i$ bolas en las cajas correspondientes, para luego repartir las restantes $n - \sum p_i$ en las k cajas, ya sin restricciones).

Animados por este éxito, elevamos nuestra ambición e imponemos, además, cotas por arriba a los x_i; esto es, intentamos saber cuántas soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ p_1 \leq x_1 \leq q_1, \ldots p_k \leq x_k \leq q_k \end{array} \right\}$$

existen. O bien de cuántas maneras se pueden distribuir n bolas idénticas en k cajas numeradas de manera que en cada caja vayan entre tantas y tantas bolas; o para composiciones...

Pero, en este caso, ya no podemos esperar una fórmula sencilla en términos de los parámetros involucrados. Como quizás el lector ya está sospechando, deberemos hacer uso del principio de inclusión/exclusión; y en cada caso obtendremos un resultado distinto. Lo vemos en un ejemplo.

EJEMPLO 3.1.2 *El número de soluciones de*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ 0 \le x_1 \le 10\,,\ 5 \le x_2 \le 35\,,\ 0 \le x_3 \le 10 \end{array} \right\}$$

Para facilitar los cálculos, pongamos las cotas inferiores a cero, con el cambio

$$y_1 = x_1 \ge 0\,, \quad y_2 = x_2 - 5 \ge 0\,, \quad y_3 = x_3 \ge 0\,.$$

Con él, el problema se transforma en el de contar el número de soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 50 - 0 - 5 - 0 = 45 \\ 0 \le y_1 \le 10\,,\ 0 \le y_2 \le 30\,,\ 0 \le y_3 \le 10 \end{array} \right\}.$$

Para resolverlo, pasaremos al complementario. Definamos el conjunto "grande":

$$\mathcal{X} = \left\{ \text{sols. de} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_i \ge 0 \end{array} \right\} \right\} \Longrightarrow |\mathcal{X}| = \binom{45+3-1}{3-1} = \binom{47}{2}.$$

Hay tres prohibiciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sols.} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \ge 11\,, y_2 \ge 0\,, y_3 \ge 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A}| = \binom{45+3-11-1}{3-1} = \binom{36}{2},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sols.} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \ge 0\,, y_2 \ge 31\,, y_3 \ge 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{B}| = \binom{45+3-31-1}{3-1} = \binom{16}{2},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sols.} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \ge 0\,, y_2 \ge 0\,, y_3 \ge 11 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{C}| = \binom{45+3-11-1}{3-1} = \binom{36}{2}.$$

El número de soluciones válidas será $|\mathcal{X}| - |\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}|$, así que tendremos que calcular el tamaño de las intersecciones de dos y tres conjuntos. Por ejemplo,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sols} \\ \text{de} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 = 45 \\ y_1 \ge 11\,, y_2 \ge 31\,, y_3 \ge 0 \end{array} \right\} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| = \binom{45+3-42-1}{3-1} = \binom{5}{2}.$$

De la misma manera se obtendría que $|\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| = \binom{25}{2}$ y que $|\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| = \binom{5}{2}$, mientras que la intersección de los tres conjuntos es vacía. Reuniéndolo todo,

$$\#\,\text{soluciones} = \binom{47}{2} - \left[2 \times \binom{36}{2} + \binom{16}{2} \right] + \left[2 \times \binom{5}{2} + \binom{25}{2} \right] = 21.$$

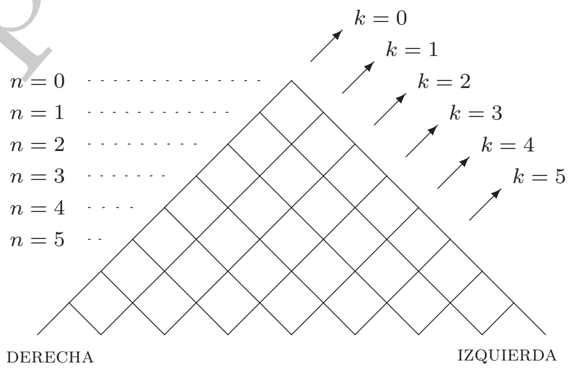
♣

3.1.4. Una interpretación gráfica de los coeficientes binómicos

Figura 3.2: Pólya

Vamos a considerar la red que aparece dibujada más abajo, en la que cada nodo se identifica con unas coordenadas (n, k), tal como se indica en la figura. Nuestro objetivo es estudiar los posibles caminos desde $(0, 0)$ hasta un cierto (n, k) tales que, en cada paso, desde cada vértice sólo se puede pasar a los vértices que están inmediatamente debajo. La longitud del camino será el número de pasos dados. Llamaremos $Cam(n, k)$ al número de caminos distintos que podemos trazar desde el nodo $(0, 0)$ a un nodo cualquiera de coordenadas (n, k). Para fijar ideas, en la descripción de los caminos utilizaremos la nomenclatura de "paso a la derecha" y "paso a la izquierda" adoptando el punto de vista de un caminante que circulara por la red (así que es la orientación *contraria* a la del lector que lee estas páginas).

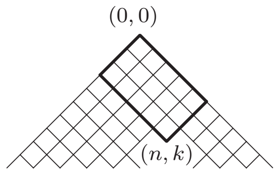
Esta interpretación, que es, como veremos, muy rica y elegante, se debe a Pólya[8], quien es también responsable de las teorías que hay detrás del estudio de la combinatoria con simetrías (véase el capítulo 16) y del paseo aleatorio (véase la sección 18.2, donde nos volveremos a encontrar con estas figuras).

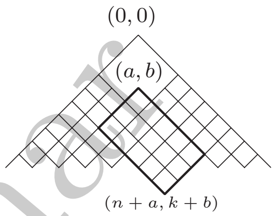


Para algunos de los valores posibles de los parámetros n y k es sencillo calcular el correspondiente número $Cam(n, k)$. Por ejemplo, para cualquier $n \geq 0$, $Cam(n, 0) = 1$, porque sólo hay un camino que lleve del $(0, 0)$ al $(n, 0)$ (el que consiste en dar siempre pasos a la derecha). De la misma manera, $Cam(n, n) = 1$ (dar sólo pasos a la izquierda). El objetivo es encontrar, si es que la hay, una fórmula cerrada para $Cam(n, k)$ en términos de n y k. Veamos primero unas propiedades de estos números, que nos resultarán familiares.

[8]George Pólya (1887-1985) es uno de los miembros más destacados de la magnífica escuela matemática húngara del siglo XX. Su actividad se desarrolló en diversos lugares, primero en su Budapest natal (hasta 1912), luego en Göttingen (1913) y Zurich, desde 1914 hasta 1940 (en 1924 estuvo en Inglaterra, trabajando con Hardy y Littlewood; el libro *Inequalities* es uno de los frutos de esta colaboración). La siguiente etapa de esta suerte de paseo aleatorio vital (una estupenda biografía suya se titula *The random walks of George Pólya*, Gerard Alexanderson, MAA, 2000) fue la Universidad de Stanford en Estados Unidos, adonde emigró en 1940, y en la que permanecería hasta el final de sus días. Pólya trabajó en diversos campos de las Matemáticas: Teoría de Números, Combinatoria, Análisis real y complejo, Probabilidad, etc.; algunas de estas aportaciones las iremos recogiendo en estas páginas. Pero, además de por esta actividad investigadora, Pólya es famoso por sus reflexiones sobre la actividad matemática y la didáctica de las matemáticas: libros como *How to solve it* (1945), *Mathematics and plausible reasoning* (1954) o *Mathematical Discovery* (1962) han sido auténticos éxitos editoriales.

1. Traslación

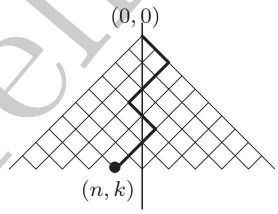


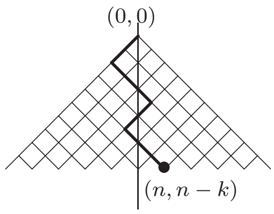


Empezamos con una propiedad que será útil en análisis posteriores. Consideremos los esquemas que aparecen a la derecha. Si observamos que ni los caminos de $(0,0)$ a (n,k) ni los que van de (a,b) a $(n+a,k+b)$ pueden salirse del área señalada, y que ambas zonas son iguales, podremos deducir que:

$$Cam(n,k) = \#\big\{\text{caminos } (0,0) \to (n,k)\big\} = \#\big\{\text{caminos } (a,b) \to (a+n, b+k)\big\}.$$

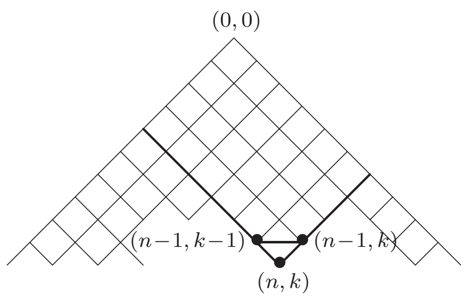
2. Reflexión





Consideremos un camino de $(0,0)$ a (n,k). Vamos a reflejarlo con respecto al eje vertical que pasa por el punto $(0,0)$. Lo que obtenemos es un camino de $(0,0)$ a $(n, n-k)$. Esta reflexión es una una biyección entre el conjunto de caminos que unen $(0,0)$ con (n,k) y el conjunto de caminos que conectan $(0,0)$ con $(n, n-k)$, de manera que $Cam(n,k) = Cam(n, n-k)$.

3. Recursión



La propiedad anterior nos recuerda, desde luego, a las propiedades de simetría de los coeficientes binómicos. ¿Cumplirán también la misma regla de recurrencia? Clasifiquemos los caminos hasta (n,k) dependiendo del vértice inmediatamente superior por el que pasen. Esto es una partición de nuestro conjunto total de caminos:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n,k)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{caminos } (0,0)\to(n-1,k-1)\\ \text{y luego izquierda}\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{caminos } (0,0)\to(n-1,k)\\ \text{y luego derecha}\end{array}\right\}$$

y obtenemos los tamaños de los conjuntos calculando, simplemente, de cuántas maneras se puede llegar a los puntos $(n-1,k-1)$ y $(n-1,k)$, respectivamente:

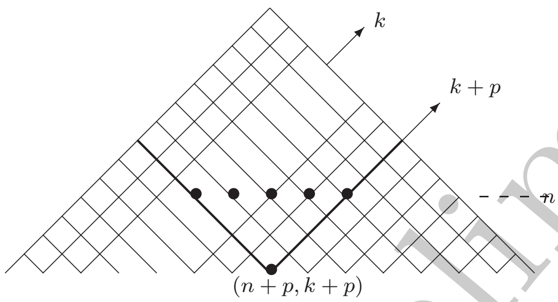
$$Cam(n,k) = Cam(n-1,k-1) + Cam(n-1,k)\,.$$

Tenemos entonces dos familias de números, $Cam(n,k)$ y los coeficientes binómicos $\binom{n}{k}$, que satisfacen la misma ecuación de recurrencia y que tienen los mismos valores frontera. Esto supone que $Cam(n,k)$ coincide, para cada par de valores de los parámetros n y k con el coeficiente binómico $\binom{n}{k}$. Así que estamos ante otra interpretación combinatoria de los coeficientes binómicos.

Vamos a aprovechar esta nueva interpretación de los coeficientes binómicos para obtener algunas expresiones interesantes.

Barrera horizontal

Vamos a clasificar los caminos hasta (n,k) según el último nodo de la barrera horizontal (véase el dibujo) por el que pasan:



$$\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(n,k)\text{ y luego ir}\\ (n,k)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(n,k+1)\text{ y luego ir}\\ (n,k+1)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\}$$
$$\cup\cdots\cup \left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(n,k+p)\text{ y luego ir}\\ (n,k+p)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\}$$

Para esta partición, aplicamos la regla de la suma y la del producto, además de la propiedad que exhibíamos antes sobre traslaciones en la red, para obtener que

$$\begin{aligned}
\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\} &= \#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n,k)\end{array}\right\}\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (n,k)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\}\\
&+\cdots+\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n,k+p)\end{array}\right\}\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (n,k+p)\to(n+p,k+p)\end{array}\right\}\\
&=\binom{n}{k}\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(p,p)\end{array}\right\}+\cdots+\binom{n}{k+p}\#\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(p,0)\end{array}\right\}\\
&=\binom{n}{k}\binom{p}{p}+\binom{n}{k+1}\binom{p}{p-1}+\cdots+\binom{n}{k+p}\binom{p}{0}
\end{aligned}$$

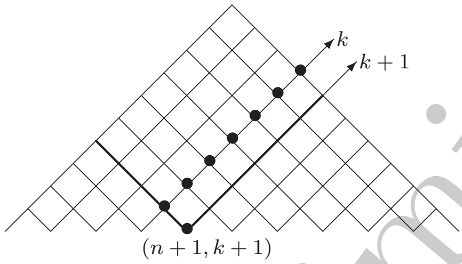
Así que concluimos que

$$\binom{n+p}{k+p}=\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{k+j}\binom{p}{p-j},$$

que no es más que la fórmula de Vandermonde que ya veíamos en la página 127, cambiando los nombres de los parámetros adecuadamente.

Barrera diagonal

Tras el éxito con la barrera horizontal, lo intentamos con una barrera diagonal: para un cierto nodo de la red, que por comodidad supondremos que es el $(n+1,k+1)$, consideramos la barrera que incluye a los nodos de segundo índice k.



Es cierto que el conjunto de caminos de $(0,0)$ a $(n+1,k+1)$ se puede escribir como

$$\left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(k,k)\text{ y luego ir}\\ (k,k)\to(n+1,k+1)\end{array}\right\}\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(k+1,k)\text{ y luego ir}\\ (k+1,k)\to(n+1,k+1)\end{array}\right\}\cup\cdots\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes en ir}\\ (0,0)\to(n,k)\text{ y luego ir}\\ (n,k)\to(n+1,k+1)\end{array}\right\},$$

pero es fácil comprobar que no es una partición (hay caminos que están en más de uno de esos conjuntos). No es, pues, una buena forma de contar. Para solucionarlo clasificaremos los caminos según el *último* nodo de la barrera que atraviesan. Así nos aseguramos de contar una sola vez cada camino. La partición del conjunto de caminos de interés sería

$$\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n+1,k+1)\\ \text{tales que }(k,k)\text{ es el}\\ \text{último nodo de la}\\ \text{barrera que se pasa}\end{array}\right\}\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n+1,k+1)\\ \text{tales que }(k+1,k)\text{ es}\\ \text{el último nodo de la}\\ \text{barrera que se pasa}\end{array}\right\}\cup\cdots\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ (0,0)\to(n+1,k+1)\\ \text{tales que }(n,k)\text{ es el}\\ \text{último nodo de la}\\ \text{barrera que se pasa}\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes}\\ \text{en ir }(0,0)\to(k,k)\\ \text{dar luego un paso a la}\\ \text{izquierda y luego bajar}\\ \text{hasta }(n+1,k+1)\end{array}\right\}\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos consistentes}\\ \text{en ir }(0,0)\to(k+1,k)\\ \text{dar luego un paso a la}\\ \text{izquierda y luego bajar}\\ \text{hasta }(n+1,k+1)\end{array}\right\}\cup\cdots\cup\left\{\begin{array}{c}\text{caminos}\\ \text{consistentes en ir}\\ (0,0)\to(n,k)\text{ y}\\ \text{luego bajar hasta}\\ (n+1,k+1)\end{array}\right\}$$

Como en cada uno de esos procesos los dos últimos pasos sólo se pueden realizar de una forma (y el primero de $\binom{j}{k}$ formas, donde $k\le j\le n$), las reglas del producto y de la suma nos permiten concluir que

$$\binom{n+1}{k+1}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}.$$

Por comodidad de escritura, hemos extendido el rango de sumación hasta $j=0$. Debe notar el lector la diferencia entre las fórmulas obtenidas con la barrera horizontal y la diagonal: en la primera, sumamos coeficientes binómicos en los que varía el índice inferior, mientras que con esta última los cambios se dan para el índice superior. Por supuesto, podríamos "alejar" la barrera diagonal del punto objetivo, situándola, por ejemplo, dos unidades (en k) más arriba. Obtendríamos así nuevas identidades para los coeficientes binómicos (véase el ejercicio 3.1.27).

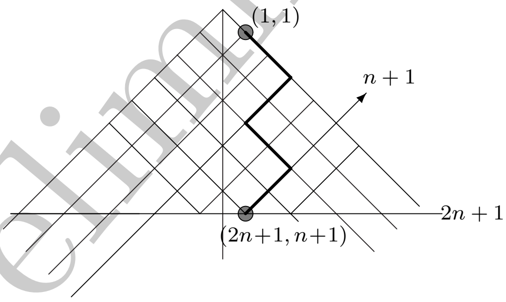
EJEMPLO 3.1.3 *Completemos el ejemplo 2.3.3, en el que se pedía el número C_n de maneras distintas de multiplicar una lista de $n+1$ números.*

Habíamos visto que podíamos considerar un problema equivalente, como es el de contar el número de listas

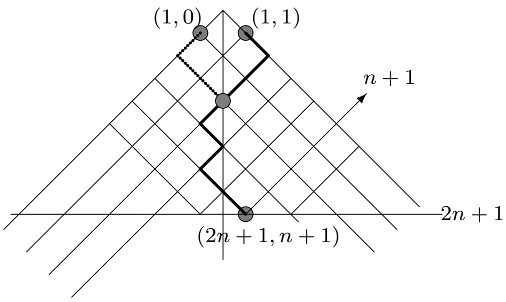
$$(x_1, \dots, x_{2n}),$$

donde $x_j = \pm 1$ (hay n de cada), y de manera que las sumas parciales, esto es, x_1, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + x_3$, etc, fueran siempre no negativas.

Traduzcámoslo a nuestro contexto: un $+1$ querrá decir un paso a la izquierda (recordemos, para el habitante de la red), y un -1, un paso a la derecha. Así que una lista $(x_1, \dots, x_{2n})$ formada con $+1$ y -1 (la mitad de cada) es un camino en el que se dan n pasos a la izquierda y otros tantos a la derecha. Vamos a empezar en el punto $(1, 1)$: tenemos que dar $2n$ pasos, n de los cuales son hacia la izquierda; así que necesariamente acabamos en el punto de coordenadas $(2n+1, n+1)$. Pero además, en cada momento, al menos se han dado tantos pasos a la izquierda como a la derecha, así que nunca podremos tocar la línea vertical. Las listas que nos interesan se corresponden, pues, con caminos como el que exhibimos en el dibujo arriba a la derecha.



Por supuesto, el número total de caminos posibles desde $(1, 1)$ hasta $(2n+1, n+1)$ es $\binom{2n}{n}$; pero sólo queremos contar aquéllos que no tocan la línea vertical. Aquí llega la idea brillante: un argumento de reflexión. Vamos a evaluar el tamaño del complementario, los caminos que *sí* tocan la vertical: supongamos que tenemos uno de ellos, como el que aparece en el dibujo de la derecha, y consideremos la primera vez que la alcanza. Podemos reflejar este primer tramo del camino. Así, cada camino que toca la línea se corresponde con uno desde $(1, 0)$ a $(2n+1, n+1)$; pero al revés también, pues esos caminos están obligados a cruzar la línea vertical (el considerar la "primera vez" que tocan es lo que hace que sea una biyección). Y sabemos que hay $\binom{2n}{n+1}$ de ellos. Así que, finalmente, deducimos que los números de Catalan viene dados, para cada $n \geq 0$, por



$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Tras unas ligeras manipulaciones algebraicas, que dejamos como entretenimiento para el lector, llegamos por fin a una fórmula para estos números:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

♣

3.1.5. Coeficientes multinómicos

Las distribuciones de bolas en cajas son, como ya adelantábamos, un lenguaje que permite describir multitud de situaciones. Ya sabemos, por ejemplo, contar el número de distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas. En la subsección 3.1.3 aprendimos a tratar todos los casos posibles, con las diversas restricciones que podemos imponer al número de bolas en cada caja. Ahora bien, si las bolas *también* están numeradas, esto es, son distinguibles, no basta con dar la información de cuántas bolas van en cada caja, hay que señalar también cuáles son: la ecuación diofántica $x_1+\cdots+x_k = n$ ya no describe nuestro problema.

Para distribuciones generales, el análisis es muy sencillo, pues se trata únicamente de decidir a qué caja va cada bola. Basta construir una lista de n posiciones (una por bola), en cada una de las cuales pueden ir k símbolos (los posibles destinos de cada bola): en total, k^n posibles distribuciones. Si el lector revisa ahora el ejemplo 2.2.5, podrá establecer el diccionario entre este tipo de distribuciones y las aplicaciones de un conjunto de tamaño n en un conjunto de tamaño k.

Si exigimos que no haya cajas vacías, el análisis se complica. Como quizás el lector estará ya sospechando, estamos con el caso de las aplicaciones sobreyectivas. En el ejemplo 3.1.8 veremos cómo utilizar el principio de inclusión/exclusión para determinar cuántas de estas aplicaciones (o cuántas distribuciones sin cajas vacías) hay. En la subsección 3.3.1 volveremos sobre esta cuestión con una nueva familia de números, los de Stirling de segunda especie.

Lo que vamos a tratar aquí es un tipo de distribuciones muy especial: queremos repartir n bolas numeradas en k cajas numeradas, pero disponemos de la información adicional sobre el número de bolas que ha de ir en cada caja. Esto es, nos dan unos números no negativos $a_1,\dots,a_k$, de manera que a_j significa el número de bolas que van a la caja C_j. Por supuesto, estos números han de sumar n, $a_1+\cdots+a_k = n$, porque queremos repartir todas las bolas. Veamos cómo podemos contar cuántas de estas distribuciones hay en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.1.4 *Queremos repartir n bolas numeradas en 3 cajas numeradas, de manera que haya a_1 en la primera, a_2 en la segunda y a_3 en la tercera.*

Construyamos todas las posibles distribuciones de este tipo mediante el siguiente proceso:

1. Elegimos *cuáles* (y no cuántas) son las a_1 bolas que van a la caja 1 (recordemos que las bolas son distinguibles). Esto se puede hacer de $\binom{n}{a_1}$ formas distintas.
2. Elegimos las de la segunda caja de entre las $n-a_1$ que quedan; tenemos $\binom{n-a_1}{a_2}$ maneras de hacerlo.
3. Las de la tercera caja quedan ya determinadas (son todas las que quedan), así que no habrá que decidir nada en este paso. Esto también se puede ver observando que se pueden elegir de $\binom{n-a_1-a_2}{a_3} = \binom{a_3}{a_3} = 1$ forma.

La regla del producto nos dice entonces que el número de posibles distribuciones es

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{a_3}{a_3} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!}\frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!}\frac{(n-a_1-a_2)!}{a_3!0!} = \frac{n!}{a_1!\,a_2!\,a_3!}\,.$$

♣

El mismo argumento se puede aplicar al caso de k cajas. Lo que obtendríamos sería

$$\frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots a_k!}\,.$$

Démosle nombre y símbolo especial a esta cantidad: dados $k \geq 2$ números $a_1, \ldots, a_k$, cuya suma valga n, definiremos[9] el **coeficiente multinómico**

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots a_k!}$$

como el número de posibles distribuciones de n bolas numeradas en k cajas numeradas de manera que haya a_1 en la primera caja, a_2 en la segunda, etc. El caso $k = 2$ es especial: uno de los números es a_1 y el otro, a_2, ha de valer $n - a_1$. En este caso, el coeficiente multinómico correspondiente coincide con el coeficiente binómico:

$$\binom{n}{a_1, n - a_1} = \binom{n}{a_1}.$$

Ejemplo 3.1.5 *En una empresa hay 25 personas y se quieren repartir en 4 grupos de trabajo: el primero, dedicado a la relación con los clientes, debe constar de 4 personas. El segundo, para el desarrollo de los proyectos, de 6 personas. El tercero estaría dedicado a las tareas de contabilidad y estaría compuesto por 7 personas. Las otras 8 personas trabajarían en tareas de organización interna. ¿De cuántas maneras se pueden estructurar estos grupos?*

Los grupos de trabajo serían las cajas (hay 4). Así que tendríamos que repartir 25 bolas numeradas (las personas) en 4 cajas numeradas de manera que hubiera 4 en la primera, 6 en la segunda, 7 en la tercera y 8 en la cuarta. Esto se puede hacer de la inmensa cantidad

$$\binom{25}{6,\,4,\,7,\,8} = \frac{25!}{4!\,6!\,7!\,8!} = 4417238826000 \qquad \text{de formas distintas.}$$

♣

Observemos que el nombre de cada caja no es relevante en todo este análisis. En nuestro ejemplo, debería dar igual (a la hora de contar las posibles distribuciones) que la caja 1 correspondiera al grupo dedicado a la organización o al que se ocupa del desarrollo de los proyectos. Lo importante es que hay 4 cajas (distinguibles), una con 4 bolas, otra con 6, otra con 7 y una última con 8. Pero esto es consistente con la definición del coeficiente multinómico: allí, el orden de presentación de los términos $a_1, \ldots, a_k$ no es relevante; sólo importa su valor (¡y que sumen n, claro!).

Existe otra manera de entender combinatoriamente los coeficientes multinómicos: pensemos otra vez en el problema de las 25 personas, que han de ser distribuidas en 4 equipos, de 4, 6, 7 y 8 personas. Hemos visto que el problema es el mismo que el de repartir 25 bolas numeradas (las personas) en 4 cajas numeradas (los equipos) de manera que haya 4 en la primera, 6 en la segunda, etc.

[9]El nombre de coeficientes multinómicos se debe a que aparecen en lo que podríamos llamar el teorema del multinomio, una generalización del teorema del binomio (véase la subsección 3.1.6).

Abordémoslo de otra manera: construimos una lista de 25 posiciones con los 25 símbolos que representan a las distintas 25 personas,

$$\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{Equipo 1}}\;\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{Equipo 2}}\;\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{Equipo 3}}\;\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\text{Equipo 4}}$$

e interpretamos que los primeros cuatro símbolos van al primer equipo, los seis siguientes al segundo, etc. En principio, listas de éstas hay 25!, pero ésta no es la respuesta a nuestro problema. Por ejemplo, todas las listas que tengan a las personas p_1, p_3, p_3, p_4 (en el orden que sea) en las 4 primeras posiciones corresponden al mismo equipo. Para contar adecuadamente, tendremos que dividir el resultado por 4! (para contrarrestar este orden ficticio que hemos incluido en el equipo 1). Pero lo mismo pasará para los equipos 2, 3 y 4. El resultado correcto es, por supuesto, $25!/(4!\,6!\,7!\,8!)$, como antes. Esta forma de pensar (introducir primero un orden y luego arreglarlo al final) nos permite abordar otro tipo de problemas.

Ejemplo 3.1.6 *¿Cuántas palabras de longitud 8 formadas por 2 aes, 3 bes y 3 ces hay?*

Las palabras están formadas por los símbolos a, a, b, b, b, c, c, c, pero está claro que no todas las 8! permutaciones posibles dan lugar a palabras distintas. Para solucionarlo, supongamos que hacemos distinguibles los símbolos: es decir, consideramos listas de 8 posiciones formadas con los símbolos $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. De éstas hay 8!. Pero, por ejemplo, las listas

a_1	a_2	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1

y

a_2	a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1

dan lugar, al borrar los subíndices de las aes, a la misma palabra, la (a, a, b, b, b, c, c, c). Para las bes, cada $3! = 6$ listas darán lugar a la misma palabra, y lo mismo para las ces. Así que el resultado que buscamos es

$$\frac{8!}{2!\,3!\,3!} = \binom{8}{3,\,2,\,3} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{2\times 2\times 3} = 560\,.$$

Obsérvese que podemos reinterpretar este problema en términos de bolas en cajas: al fin y al cabo, dar una 8-lista con 2 aes, 3 bes y 3 ces no es otra cosa que decidir qué dos posiciones llevan a, qué 3 llevan b y qué 3 llevan ces. En otras palabras, es lo mismo que distribuir 8 bolas (las posiciones de la lista) en tres cajas (la de a, la de b y la de c) de manera que la primera caja lleve 2 bolas, la segunda 3, y la última 3. ♣

Planteemos la versión general de este ejemplo: queremos formar listas de n posiciones con símbolos $\{1, \dots, k\}$ de manera que aparezcan a_1 unos, a_2 doses, etc., con $a_1 + \cdots + a_k = n$. Primero haríamos que los símbolos fueran distinguibles,

$$1_1, 1_2, \dots, 1_{a_1}, 2_1, \dots, 2_{a_2}, \dots, k_1, \dots, k_{a_k}\,.$$

Con estos n símbolos construimos todas las $n!$ listas posibles. Y luego tenemos en cuenta que hemos introducido un orden ficticio. El resultado es, pues,

$$\binom{n}{a_1,\, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1!\, a_2! \cdots a_k!}\,.$$

En algunos textos se utiliza el nombre de **permutaciones con repetición** (por razones obvias) para describir esta cantidad.

3.1.6. Sobre el teorema del binomio

Ya que hemos hablado de coeficientes binómicos y multinómicos, parece oportuno revisar el resultado que justifica los nombres utilizados. El bien conocido **teorema del binomio** nos dice que

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

para cualquier x. Es un ejercicio interesante, que recomendamos al lector, probar la validez del teorema por inducción (véase el ejercicio 3.1.37).

El teorema del binomio nos proporciona el primer ejemplo de **función generatriz**: la función $(1+x)^n$ "genera", al desarrollar el producto en potencias de x, la sucesión de números

$$\left\{\binom{n}{k}\right\}_{k=0}^{\infty} = \left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\right\}.$$

Pero sobre estas cuestiones insistiremos, y mucho, en el capítulo 10.

Una primera generalización de la fórmula del binomio se obtiene reemplazando x por x/y:

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{y^k} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{y+x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{-k}\,,$$

de donde deducimos que

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Si en esta expresión tomamos $x = y = 1$, obtenemos el valor, que ya conocíamos, de la suma completa de los coeficientes binómicos de índice superior n:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Pero si tomamos $x = 1$ e $y = -1$, llegamos a la (inesperada[10]) expresión

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Así que si sumamos todos todos los coeficientes binómicos de índice superior n, pero alternándolos de signo, el resultado es 0 (algo que usaremos, por ejemplo, en la demostración del principio de inclusión/exclusión, subsección 3.1.7).

Nuestro objetivo es ahora el de evaluar la suma

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

[10] Si n es impar, esto una simple consecuencia de la simetría los coeficientes binómicos. Por ejemplo, para $n = 7$ estamos sumando (alternados en signo), los números $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$, que se cancelan por parejas. Pero ya no es la misma situación para n par (hágase el caso $n = 8$).

El truco, que utilizaremos profusamente en el capítulo 10, es derivar con respecto a x la fórmula del binomio, para obtener que

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1};$$

y si evaluamos en $x=1$, llegamos a la respuesta: la citada suma vale $n2^{n-1}$.

Esta última manipulación se utiliza en contextos más generales y, por ejemplo, será la que seguiremos a la hora de calcular medias de variables aleatorias que toman valores en los enteros no negativos (véase la sección 11.1). Pero como todavía no contamos con este lenguaje probabilístico, hagamos una interpretación de este caso particular.

Ejemplo 3.1.7 *Queremos evaluar el tamaño medio de los subconjuntos que se pueden extraer del conjunto $\{1,\dots,n\}$. La intuición nos dice que ese tamaño medio, que llamaremos p_n, ha de ser $n/2$, pero queremos comprobarlo.*

Si queremos evaluar, por ejemplo, la altura media de un conjunto de n personas, lo natural sería sumar todas las alturas y dividir el número resultante por n. Esta suma constaría de n sumandos, claro. Pero un procedimiento más inteligente para evaluarla consistiría en agrupar primero a las personas cuya altura fuera común. Contaríamos entonces el número de elementos de cada categoría (misma altura), cada uno de los cuales multiplicaríamos por la altura correspondiente (la ventaja de multiplicar frente a sumar).

Sigamos esta misma idea en nuestro caso. Dado el conjunto $\{1,\dots,n\}$, llamamos Γ al conjunto de todos los subconjuntos que se extraer de él. Sabemos que $|\Gamma| = 2^n$. Cada elemento γ de Γ (es decir, cada subconjunto de $\{1,\dots,n\}$) tendrá un cierto tamaño (el número de elementos de que conste), y lo que nos interesa es calcular la suma

$$p_n = \frac{1}{2^n}\sum_{\gamma\in\Gamma} [\text{tamaño de } \gamma].$$

Agrupemos entonces estos subconjuntos en función de su tamaño (que estará entre 0 y n):

$$p_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\Bigg(\sum_{\gamma\,\in\,\Gamma\ \text{de tamaño}\ k} [\text{tamaño de } \gamma]\Bigg)$$

Ya sólo resta darnos cuenta de que, para un k fijo, los subconjuntos γ de la suma interior tienen todos tamaño k, así que esa suma vale, simplemente, k por el número de sumandos:

$$p_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\ \#\left\{\begin{array}{c} k\text{-subconjuntos} \\ \text{de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\}\Bigg) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\left(n\,2^{n-1}\right) = \frac{n}{2},$$

como nos sugería la intuición. ♣

En realidad, la forma que hemos expuesto aquí del teorema del binomio, válida para un $n\in\mathbb{N}$, no es sino un caso particular de una expresión más general. Reescribamos el teorema del binomio como

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k.$$

Figura 3.3: Newton

Pues bien, esta expresión es válida también si sustituimos n por un α real cualquiera; es el teorema del binomio de Newton[11] que veremos en un momento. En el caso en que $\alpha = n$, donde n es un entero positivo, teníamos una suma finita, porque los coeficientes binómicos $\binom{n}{k}$ son cero para valores de k mayores que n. Pero en general, para un número real α cualquiera, no ocurrirá lo mismo: tendremos una serie de potencias infinita, así que habrá que ser cuidadoso con los valores de x para los que hay convergencia. El enunciado del teorema es el siguiente:

Teorema 3.1 (binomio de Newton) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, si $|x| < 1$,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k,$$

El lector podrá encontrar la demostración de este resultado, junto con diversas aplicaciones, en la subsección 10.3.4.

Veamos una última generalización del teorema del binomio. Podemos reescribir la versión original del teorema del binomio de la siguiente manera:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{\substack{a,\, b \geq 0 \\ a+b=n}} \frac{n!}{a!\, b!}\, x^a y^b\,,$$

observando, simplemente, que los exponentes de x e y, para cada k, suman siempre n. Con un argumento análogo, podemos obtener la llamada **fórmula del trinomio**:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{a,b,c \geq 0 \\ a+b+c=n}} \frac{n!}{a!\, b!\, c!}\, x^a y^b z^c = \sum_{a,b,c \geq 0} \binom{n}{a,\, b,\, c} x^a y^b z^c\,,$$

que ya escribimos, a la derecha, utilizando la notación de los coeficientes multinómicos (que, recordamos, sólo tienen sentido para las combinaciones de a, b y c que sumen n). Y de ahí a la **fórmula del multinomio** para k términos sólo hay un paso:

$$\boxed{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{a_1,\dots,a_k \geq 0} \binom{n}{a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_k} {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} \cdots {x_k}^{a_k}}\,.$$

[11]Tampoco requiere presentación Isaac Newton (1642-1727), universalmente conocido por su ley de la gravitación o por la creación del Cálculo diferencial e integral (al tiempo que Leibniz), lo que llamaba el "método de las fluxiones". Sus *Philophiae naturalis principia mathematica*, o simplemente *Principia*, de 1687, son considerados como el más importante libro científico jamás escrito. Se cuenta que fue Sir Edmund Halley, el descubridor del cometa que hoy lleva su nombre, el que animó a Newton a escribirlos: tras 18 meses de encierro y trabajo incesante, los *Principia* vieron la luz; en ellos Newton establecía los principios básicos de la Mecánica, la Dinámica de Fluidos, el movimiento ondulatorio, deducía las leyes de Kepler del movimiento de planetas y cometas. . . No menos importantes fueron sus trabajos en otras disciplinas; en Óptica, por ejemplo, descubrió que la luz se descomponía en un espectro de colores al hacerla pasar a través de un prisma.

3.1.7. Los coeficientes binómicos y el principio de inclusión y exclusión

El principio de inclusión/exclusión, que presentamos en la sección 2.3, permite calcular el tamaño de la unión de una colección finita de conjuntos $\{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_j,$$

donde los α_j son las sumas de los tamaños de todas las posibles intersecciones de j conjuntos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\ \alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\vdots \\ \alpha_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ahora sabemos cuántos sumandos aparecen en el cálculo de cada α_j. Por ejemplo, α_1 consta de n sumandos (las posibles formas de escoger 1 elemento de un conjunto de n, esto es, $\binom{n}{1}$), α_2 consta de $\binom{n}{2}$ sumandos (las posibles formas de escoger 2 elementos de entre n), etc. En general, α_j tendrá $\binom{n}{j}$ términos. Conocer este dato será muy útil porque, como veremos más adelante (véanse el ejemplo 3.1.8 y los cálculos de la subsección 3.2.4), muchas veces *todas* las intersecciones de j conjuntos, para cada valor de j, son del mismo tamaño; y entonces podremos obtener fórmulas especialmente sencillas.

Demostración del principio de inclusión/exclusión

Vamos a utilizar un argumento de doble conteo, una generalización del argumento que ya perfilábamos en la sección 2.3. Llamemos A al conjunto cuyo tamaño queremos calcular, la unión de todos los A_j; y sean $\omega_1, \omega_2, \ldots$ sus elementos.

Construimos la siguiente tabla: etiquetando las filas, vamos a situar a los elementos de A. Etiquetando las columnas, situaremos los conjuntos de interés: primero, los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, luego las intersecciones dos a dos, $A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3, \ldots A_{n-1} \cap A_n$; después, las intersecciones tres a tres, cuatro a cuatro... así, hasta llegar a la intersección de todos los A_j.

Los registros de la matriz van a ser 0, 1 y -1. Consideremos la fila etiquetada por un cierto elemento ω_j: si ω_j no pertenece al conjunto que etiquete la columna, pondremos un 0. En el caso de pertenencia al conjunto, distinguiremos si se trata de una intersección de un número impar de conjuntos (en cuyo caso pondremos un $+1$) o de una intersección de un número par (escribiremos un -1). Por ejemplo, pondríamos un 1 en las casillas correspondientes si ω_j estuviera en A_3, en $A_2 \cap A_5 \cap A_6$, o en $A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9$. La tabla tendría un aspecto parecido al que se muestra a continuación:

	$A_1\, A_2 \cdots A_n$	$A_1 \cap A_2 \cdots A_{n-1} \cap A_n$	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	$\cdots$	$A_1 \cap \cdots \cap A_n$
ω_1	$1\ 1\ \cdots\ 1$	$-1\ \cdots\ -1$	$1\ \cdots\ 1$	$\cdots$	$(-1)^n$
ω_2	$0\ 1\ \cdots\ 0$	$0\ \cdots\ 0$	$0\ \cdots\ 0$	$\cdots$	0
ω_3	$1\ 1\ \cdots\ 0$	$-1\ \cdots\ 0$	$0\ \cdots\ 0$	$\cdots$	0
ω_4	$0\ 0\ \cdots\ 1$	$0\ \cdots\ -1$	$0\ \cdots\ 1$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ahora sumaremos las entradas de la matriz, primero por columnas y luego por filas.

La columna etiquetada con A_1 contiene $|A_1|$ unos, la de A_2, $|A_2|$ unos, etc. Para las intersecciones dos a dos, cada columna etiquetada con $A_i \cap A_j$ contiene $|A_i \cap A_j|$ signos "-1". Y así sucesivamente. De manera que, en total, los registros de la matriz suman (por columnas)

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots ,$$

como no podía ser de otra manera, pues hemos construido la matriz para obtener esto precisamente.

La suma por filas requiere un análisis más cuidadoso. Fijémonos en un cierto elemento $\omega \in A$, que estará en, digamos, k de los A_j, para cierto $1 \leq k \leq n$. En su fila tendremos exactamente k unos en las columnas etiquetadas por los conjuntos $A_1, \dots, A_n$. Pero si está en k de los A_j, estará en exactamente $\binom{k}{2}$ de las intersecciones dos a dos: ahí encontraremos $\binom{k}{2}$ signos "-1". También estará en $\binom{k}{3}$ de las tres a tres, etc. El último signo no nulo lo encontraremos en las columnas de las intersecciones k a k: será un $(-1)^{k+1}$, justo en la columna etiquetada por la intersección de todos los A_j en los que esté ω; más allá, todo ceros.

En total, la suma de los símbolos que aparecen en la fila etiquetada por ω será

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = 1 - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} .$$

Hemos manipulado un poco la expresión para que resulte transparente que, sea cual sea k (y, por tanto, el argumento funciona para cualquier ω que consideremos), la suma de los símbolos de cada fila vale exactamente 1: basta recordar (véase la página 143) que, como consecuencia del teorema del binomio, el valor de la suma (completa, y alternada en signo) de los coeficientes binómicos es 0 .

Como hay exactamente $|A| = |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ filas, queda demostrado el resultado. ■

Las desigualdades de Bonferroni

El cálculo de los α_j es muy engorroso, y convendría tener una estimación del error que se comete al truncar la suma del principio de inclusión/exclusión y despreciar unos cuantos sumandos. Por ejemplo, se comprueba, por inducción, que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \sum_{j=1}^{n} |A_j| = \alpha_1 \quad \text{y que} \quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| = \alpha_1 - \alpha_2 ;$$

la primera es casi inmediata, mientras que la segunda ya requiere algo más de análisis (véase el ejercicio 3.1.38). Hay un patrón general tras todo esto, que recogen las llamadas desigualdades de **desigualdades de Bonferroni**: para cada t entre 1 y $n-1$,

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{t} (-1)^{j+1} \alpha_j \Big| \leq \alpha_{t+1} .$$

Así que el error cometido está controlado por el tamaño del primer término despreciado. Quizás al lector familiarizado con las cuestiones de convergencia de series numéricas este tipo de estimaciones le resulten familiares. Pero, pese a su semejanza, no es simplemente un resultado sobre series alternadas de términos decrecientes (como el teorema 10.1), porque los términos *no tienen por qué* ser decrecientes (véase el ejercicio 3.1.39). La demostración del resultado, que pedimos hacer en el ejercicio 3.1.41, requiere estimar el valor de sumas alternadas de coeficientes binómicos incompletas. La combinación de estas desigualdades de Bonferroni con la estimación inicial $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \alpha_1$ nos conduce a la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| &\leq \sum_{j=1}^{n} |A_j| = \alpha_1 \\
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| &\geq \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = \alpha_1 - \alpha_2 \\
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| &\leq \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap a_k| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Recordemos, además, que sabemos el error que se comete en cada una de ellas. Al final, al sumar todos los α_j con sus signos correspondientes, recuperamos el principio de inclusión/exclusión.

Vayamos entonces con las aplicaciones del principio de inclusión/exclusión que prometíamos al principio de esta subsección.

EJEMPLO 3.1.8 *Intentemos contar cuántas aplicaciones* ***sobreyectivas*** *podemos dar entre los conjuntos* $\mathcal{X} = \{1, \dots, n\}$ *e* $\mathcal{Y} = \{1, \dots, k\}$.

En el ejemplo 2.2.5 presentamos la identificación entre aplicaciones de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ y listas de longitud n formadas con los símbolos $\{1, \dots, k\}$ que nos permitía, por ejemplo, determinar que el número de aplicaciones distintas es k^n.

Utilizaremos esa misma identificación en el recuento de las aplicaciones sobreyectivas que, recordemos, son las que no se "saltan" ningún elemento de $\mathcal{Y}$ (o, más formalmente, aquéllas para las que, para todo $y \in \mathcal{Y}$, existe al menos un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$).

Vamos a pasar al complementario: las aplicaciones que no sean sobreyectivas, o bien se saltarán el elemento 1, o bien el 2, etc., así hasta el k. Así que, si definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ que se saltan el elemento } 1\}, \\
A_2 &= \{\text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ que se saltan el elemento } 2\}, \\
&\vdots \\
A_k &= \{\text{aplicaciones } \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \text{ que se saltan el elemento } k\},
\end{aligned}$$

el número de aplicaciones sobreyectivas es $k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$.

Calculemos, en primer lugar, el tamaño de cada uno de los A_j. Una aplicación que esté en A_j no toma el valor j como imagen. Y en términos de listas, eso supone construir n-listas en las que utilicemos cualquiera de los símbolos de $\mathcal{Y}$ menos el símbolo j. Así que

$$|A_j| = (k-1)^n\,, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

A las intersecciones dos a dos les sucede algo parecido. Si una aplicación está en $A_i \cap A_j$, entonces no tomará como imagen ni al símbolo i ni al j. Es decir, la lista correspondiente se formará con cualesquiera de los otros $k-2$ símbolos. Por tanto,

$$|A_i \cap A_j| = (k-2)^n\,, \quad \text{para cada } i \neq j.$$

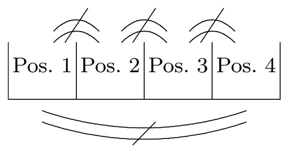
El mismo argumento nos serviría para las intersecciones tres a tres, cuatro a cuatro, etc. Utilizando ahora que sabemos contar el número de sumandos que hay en cada suma de la expresión del principio de inclusión/exclusión, obtenemos que, si $\mathcal{X}$ tiene n elementos e $\mathcal{Y}$ tiene tamaño k,

$$\boxed{\#\Big\{\text{aplicaciones sobreyectivas } \mathcal{X} \to \mathcal{Y}\Big\}} = k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

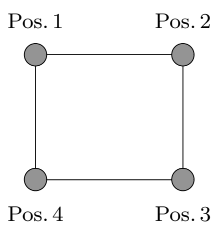
$$= k^n - \left[\binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots \pm \binom{k}{k}(k-k)^n\right] = \boxed{\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n}$$

Ya tenemos una fórmula, aunque bastante complicada (como las que se suelen obtener mediante la aplicación del principio de inclusión/exclusión). En la subsección 3.3.1 retomaremos esta cuestión, desde otro punto de vista, con objeto de obtener un método de cálculo más sencillo. ♣

Ejemplo 3.1.9 *Recordemos el problema de contar el número de elementos del conjunto A formado por las 4-listas con los símbolos $\{1, 2 \dots, n\}$ tales que no aparece el mismo símbolo en las posiciones 1.ª y 2.ª, 2.ª y 3.ª, 3.ª y 4.ª, 4.ª y 1.ª.*



En los dibujos de la derecha exhibimos un par de representaciones gráficas del problema: arriba, la lista con sus prohibiciones; abajo, una traducción que utilizaremos más adelante: cada posición de la lista etiqueta un vértice y cada prohibición se corresponde con un arco o arista. Ya vimos en el ejemplo 2.2.7 que una aplicación directa de la regla del producto no era posible; pero la regla de la suma sí que nos permitía separar en dos casos y obtener así que la respuesta es



$$n(n-1)(n^2 - 3n + 3)\,.$$

Pero podemos intentar calcular el tamaño del complementario (dentro del conjunto X de todas las 4-listas formadas con símbolos $\{1, \dots, n\}$),

$$A^c = \{\text{4-listas con } \{1, \dots, n\} \text{ tales que } 1.^{\text{a}} = 2.^{\text{a}}, \text{ ó } 2.^{\text{a}} = 3.^{\text{a}}, \text{ ó } 3.^{\text{a}} = 4.^{\text{a}}, \text{ ó } 4.^{\text{a}} = 1.^{\text{a}}\}$$

Podemos reescribir A^c como

$$A^c = \bigcup_{i=1}^{4} A_i\,, \quad \text{donde} \begin{cases} A_1 = \{\text{4-listas con 1.}^{\text{a}} = \text{2.}^{\text{a}}\} \\ A_2 = \{\text{4-listas con 2.}^{\text{a}} = \text{3.}^{\text{a}}\} \\ A_3 = \{\text{4-listas con 3.}^{\text{a}} = \text{4.}^{\text{a}}\} \\ A_4 = \{\text{4-listas con 4.}^{\text{a}} = \text{1.}^{\text{a}}\} \end{cases}$$

Nuestro objetivo es calcular $|A| = |X| - |A^c| = |X| - |\cup_{i=1}^4 A_i|$. Aplicando el principio de inclusión/exclusión, obtenemos que

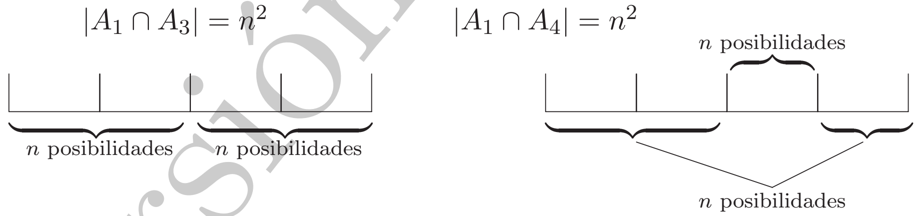
$$|A| = |X| - \sum_{j=1}^{4} |A_j| + \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\,.$$

Es fácil establecer el tamaño de los conjuntos individuales:

$$\begin{aligned} |X| &= \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\}\} = n^4 \\ |A_1| &= \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\} \text{ tales que 1.}^{\text{a}} = \text{2.}^{\text{a}}\} = n^3 \\ |A_2| &= \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\} \text{ tales que 2.}^{\text{a}} = \text{3.}^{\text{a}}\} = n^3 \\ |A_3| &= \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\} \text{ tales que 3.}^{\text{a}} = \text{4.}^{\text{a}}\} = n^3 \\ |A_4| &= \#\{\text{4-listas con símbolos } \{1,\dots,n\} \text{ tales que 4.}^{\text{a}} = \text{1.}^{\text{a}}\} = n^3 \end{aligned}$$

¿Cuál es el tamaño de las intersecciones dos a dos? Consideremos dos de ellas, por ejemplo,

$|A_1 \cap A_3| = n^2$ $\qquad$ $|A_1 \cap A_4| = n^2$

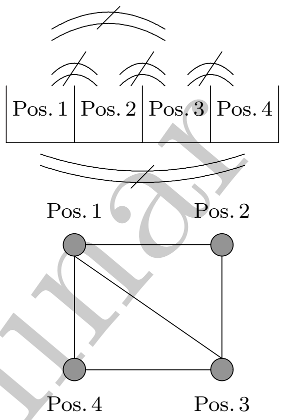


Se puede comprobar de la misma manera que todas las intersecciones dos a dos son de igual tamaño. ¿Y las intersecciones tres a tres? Una sencilla inspección muestra que son también todas de igual tamaño; por ejemplo, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = n$, porque que en la primera y segunda posiciones aparezca el mismo símbolo, en la segunda y tercera también, y lo mismo en la tercera y cuarta, hace que el mismo símbolo deba aparecer en las cuatro posiciones (y hay n posibilidades para elegir este símbolo). Por supuesto, la intersección de los cuatro conjuntos tiene también tamaño n, así que podemos concluir que

$$\begin{aligned} |A| &= |X| - |\cup_{i=1}^4 A_i| = \binom{4}{0} n^4 - \binom{4}{1} n^3 + \binom{4}{2}\cdot n^2 - \binom{4}{3}\cdot n + \binom{4}{4}\cdot n \\ &= n^4 - 4\,n^3 + 6\,n^2 - 4\,n + n = n(n-1)(n^2-3n+3)\,, \end{aligned}$$

como ya sabíamos.

Pero, ¿y si el conjunto de restricciones fuera 1.ª y 2.ª, 2.ª y 3.ª, 3.ª y 4.ª, 1.ª y 3.ª, 1.ª y 4.ª? (véase el dibujo a la derecha). El conjunto de listas prohibidas será la unión de los conjuntos



$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{listas con } 1.^{\text{a}} = 2.^{\text{a}}\} \\ A_2 &= \{\text{listas con } 2.^{\text{a}} = 3.^{\text{a}}\} \\ A_3 &= \{\text{listas con } 3.^{\text{a}} = 4.^{\text{a}}\} \\ A_4 &= \{\text{listas con } 1.^{\text{a}} = 3.^{\text{a}}\} \\ A_5 &= \{\text{listas con } 1.^{\text{a}} = 4.^{\text{a}}\}. \end{aligned}$$

El número de listas que nos interesa es $n^4 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$. Tenemos que calcular el tamaño de la unión de los cinco conjuntos.

Como antes, $|A_j| = n^3$ para cada j, mientras que $|A_i \cap A_j| = n^2$ para cada $i \neq j$:

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{5} |A_j| = \binom{5}{1} n^3 \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_4 \cap A_5| = \binom{5}{2} n^2.$$

La simetría se rompe al llegar a las intersecciones tres a tres. Por ejemplo, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = n$, porque estar en A_1 exige tener el mismo símbolo en las dos primeras posiciones; estar además en A_2 hace que la tercera lleve ese símbolo común; y estar en A_3 exige que ese símbolo común aparezca también en la cuarta posición. Solo hay que decidir, pues, qué símbolo es común a toda la lista.

Pero calculemos $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$. Por estar en A_1 y en A_2, las tres primeras posiciones han de llevar el mismo símbolo; pero estar en A_4 no añade información, pues exige que la primera y tercera posiciones lleven el mismo símbolo. Así que hay que elegir un símbolo para las tres primeras posiciones, y otro para la cuarta. Por tanto, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$ (y también $|A_3 \cap A_4 \cap A_5|$, como podrá comprobar el lector) vale n^2. Por tanto,

$$\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \cdots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \left[\binom{5}{3} - 2\right] n + 2n^2.$$

Por último, $\alpha_4 = \binom{5}{4} n$ y $\alpha_5 = \binom{5}{5} n$, así que el resultado total es que

$$\begin{aligned} \#\ \text{listas} &= |\mathcal{X}| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \binom{5}{0} n^4 - [\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5] \\ &= \binom{5}{0} n^4 - \binom{5}{1} n^3 + \binom{5}{2} n^2 - \left[\binom{5}{3} - 2\right] n - 2n^2 + \binom{5}{4} n - \binom{5}{5} n. \end{aligned}$$

Que, en realidad, es una forma muy complicada de escribir $n(n-1)(n-2)^2$, el resultado que habríamos obtenido si nos hubiéramos lanzado, de manera algo osada, a contar las listas directamente: n posibilidades para la primera posición, $n-1$ para la segunda, $n-2$ para la tercera (recuérdese la arista diagonal) y otra vez $n-2$ (porque en las posiciones 1 y 3 van símbolos distintos) para la cuarta posición. No siempre vamos a poder contar de esta manera tan directa, y necesitaríamos un procedimiento algorítmico para contar listas con restricciones (sobre las posiciones) cualesquiera. Lo obtendremos cuando presentemos el lenguaje de los grafos (véase, en particular, la sección 8.5). ♣

3.1.8. Multiconjuntos

Al igual que con las listas, en los conjuntos podemos permitir repetición. Definiremos un k-*multiconjunto* como una k-lista con repetición permitida en la que el orden es irrelevante. O también como un conjunto de tamaño k en el que permitimos que se repitan símbolos. Si partimos de un conjunto con n símbolos, que, como de costumbre, será el $\{1, \dots, n\}$, queremos obtener una fórmula para los números

$$R(n, k) = \#\{\text{multiconjuntos con } k \text{ elementos extraídos de } \{1, \dots, n\}\}$$

para cada $n \geq 1$ y $k \geq 0$. Nótese que aquí no hay por qué restringirse a $k \leq n$.

Una traducción adecuada nos a permitir transformar esta cuestión en una que ya conocemos. Un multiconjunto de tamaño k extraído del conjunto $\{1, \dots, n\}$ se escribirá

$$\{1_{x_1}, 2_{x_2}, \dots, n_{x_n}\},$$

donde x_j, un número no negativo, indica el número de veces que aparece el símbolo j en el multiconjunto. Además, como el tamaño del multiconjunto es k, se tendrá que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

Así que conocer el valor de $R(n, k)$ es equivalente a contar el

$$\#\text{ soluciones de} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right\}$$

Perfecto, porque es un problema que ya sabemos tratar. El resultado es que

$$\boxed{R(n, k) = \#\{\text{multiconjuntos con } k \text{ elementos extraídos de } \{1, \dots, n\}\} = \binom{k + n - 1}{n - 1}}$$

Otra forma de obtener este resultado es la siguiente: sea un multiconjunto de tamaño k extraído de $\{1, \dots, n\}$. Si ordenamos sus elementos de forma creciente, lo que obtenemos es una lista $(a_1, \dots, a_k)$, con repetición permitida, que cumple que

$$(1 \leq) \qquad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \qquad (\leq n)$$

Si cambiamos a unas nuevas variables b_j definidas, para cada $j = 1, \dots, k$, mediante

$$b_j = a_j + (j - 1)$$

(fijémonos en que $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + 1$, $b_3 = a_3 + 2$, etc.), obtenemos una lista de números $(b_1, \dots, b_k)$ que cumplen que

$$1 \leq \quad b_1 < b_2 < \cdots < b_k \quad \leq n + k - 1.$$

Esto es una biyección entre los a_j y los b_j (¡compruébese!); y ahora los b_j están "separados" (no se repiten). Así que lo que tenemos es un conjunto[12] sin repetición de tamaño k (los b_j) extraído de $\{1, 2, \ldots, n+k-1\}$. Como sabemos contar cuántos de estos últimos hay, podemos evaluar cuántos hay de los primeros:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1},$$

el mismo resultado, por supuesto.

Recursión con los $R(n,k)$

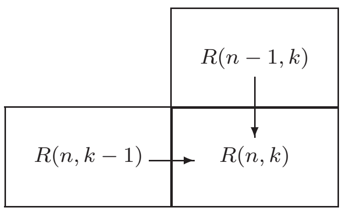
Dado que $R(n,k)$ se escribe en términos de ciertos coeficientes binómicos, podríamos establecer su regla de recursión utilizando la regla de los binómicos (y tenemos cierto cuidado identificando los índices que aparecen). Pero es más instructivo obtenerla directamente, con un argumento análogo al utilizado para los coeficientes binómicos (véase la página 126):

$$\begin{aligned}
\boxed{R(n,k)} &\overset{\text{partición}}{=} \#\left\{\begin{array}{c}\text{multiconjuntos de tamaño}\\ k \text{ extraídos de } \{1,\ldots,n\}\\ \text{con el elemento } n\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{multiconjuntos de tamaño}\\ k \text{ extraídos de } \{1,\ldots,n\}\\ \text{sin el elemento } n\end{array}\right\}\\
&\overset{\text{biyecciones}}{=} \#\left\{\begin{array}{c}\text{multiconjuntos de}\\ \text{tamaño } k-1\\ \text{extraídos de } \{1,\ldots,n\}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{multiconjuntos de}\\ \text{tamaño } k\\ \text{extraídos de } \{1,\ldots,n-1\}\end{array}\right\}\\
&= \boxed{R(n,k-1) + R(n-1,k)}
\end{aligned}$$

¿Y cuáles son los valores frontera? Para $n = 1$, se tiene que $R(1,k) = 1$ para cada $k \geq 0$, pues con un sólo elemento a sólo podemos formar el multiconjunto de tamaño k siguiente: $\{a, a, \overset{k \text{ veces}}{\ldots}, a\}$ (o, en el caso en que $k = 0$, el $\emptyset$). Por otro lado, si $k = 0$, $R(n, 0) = 1$, para cada $n \geq 1$, pues sólo el $\emptyset$ tiene tamaño 0.

Con esta información podremos construir una tabla de los valores de los $R(n,k)$. Ahora, para cada valor de n, el índice k (el tamaño de multiconjunto) puede tomar cualquier valor. A la derecha exhibimos la interpretación gráfica de la regla de recursión:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\cdots$
$n=1$	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
$n=2$	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$n=3$	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
$n=4$	1	4	10	20	35	56	$\cdots$
$n=5$	1	5	15	35	70	126	$\cdots$
$n=6$	1	6	21	56	126	252	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$



Obsérvese que es idéntico al triángulo de Tartaglia de los coeficientes binómicos (sólo que girado 45° hacia la izquierda).

[12] Si alguien se preocupa con que hablemos del conjunto de los b_j en lugar de la lista $(b_1, \ldots, b_k)$, que observe que, como los b_j los exhibimos ordenados por tamaños, a cada conjunto le corresponde una y sólo una lista.

EJERCICIOS.

3.1.1 *Pruébese, por inducción, que* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$.

3.1.2 *Queremos demostrar que*

$$\max_{k=0,\dots,n}\left\{\binom{n}{k}\right\} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil}$$

(a) Utilícese la propiedad de simetría de los coeficientes binómicos para deducir que basta calcular ese máximo en el rango $0 \le k \le \lfloor n/2\rfloor$*.*

(b) Supóngase, por ejemplo, que n *es par. Compruébese que, siempre que* $k \le n/2$, $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$.

(c) Complétense los detalles del caso en que n *sea impar.*

3.1.3 *Utilícese la fórmula de Stirling para comprobar que, si* k *es un cierto número fijo, entonces*

$$\text{tanto}\quad \binom{n-1}{k-1} \quad\text{como}\quad \binom{n+k-1}{k-1} \quad\text{como}\quad \binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}$$

son, asintóticamente (esto es, con el símbolo $\sim$*), como* $n^{k-1}/(k-1)!$ *cuando* $n \to \infty$*. Utilizaremos estas estimaciones más adelante.*

3.1.4 *Tenemos* $2n$ *bolas rojas numeradas y otras* $2n$ *bolas blancas numeradas. ¿De cuántas formas distintas se puede escoger, de entre esas* $4n$ *bolas, un conjunto con* n *bolas rojas y* n *blancas?*

Solución. $\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$

3.1.5 *Tenemos* 10 *bolas rojas numeradas y* 6 *bolas blancas numeradas; ¿de cuántas maneras puede escogerse un conjunto de* 9 *bolas de entre las anteriores de forma que a lo sumo haya* 4 *bolas rojas?*

Solución. $\binom{10}{3} + \binom{6}{5}\binom{10}{4}$

3.1.6 *¿De cuántas maneras distintas se puede distribuir un grupo de 40 personas en 8 grupos de 5 personas?*

Solución. $\binom{40}{5\dots5}\frac{1}{8!} = \frac{40!}{8!\,(5!)^8}$

3.1.7 *¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir* 40 *bolas idénticas en* 6 *cajas numeradas, de manera que entre las tres primeras cajas se distribuyan* 25 *bolas y que en cada una de las dos últimas cajas se sitúen a lo sumo* 6 *bolas?*

Sugerencia. Distribúyanse primero las bolas de las tres primeras cajas. Para el resto, pásese al complementario.

Solución. $\binom{27}{2}\left[\binom{17}{2} - 2\binom{10}{2} + \binom{3}{2}\right]$

3.1.8 *Consideremos las 24 consonantes $\{b, c, \ldots, z\}$ y una única vocal $\{a\}$. Queremos formar con ellas palabras de 12 letras, de las cuales exactamente cinco sean consonantes (distintas), y en las que no aparezcan consonantes seguidas. ¿Cuántas distintas habrá? ¿Cuántas habría si exigiéramos que apareciera una nueva vocal, la i, detrás (aunque no necesariamente inmediatamente detrás) de la última consonante?*

Sugerencia. Colóquense primero las consonantes. E insértense las vocales en los huecos entre ellas, teniendo en cuenta que las consonantes han de estar separadas. Para el segundo apartado, trátese la i como si fuera una consonante.

Solución. (a) $5!\binom{24}{5}\binom{8}{5}$ (b) $5!\binom{24}{5}\binom{8}{6}$

3.1.9 *¿Cuántos números entre* 0 *y* 10000 *tienen la suma de sus cifras igual a 7? ¿Y menor o igual que 7?*

Solución. (a) $\binom{10}{3}$ (b) $\sum_{k=0}^{7}\binom{k+3}{3}$

3.1.10 *De "Nuestro hombre en La Habana", de Graham Greene:*

— No entiendo por qué escogiste ese número.

— ¿No te ocurre a ti que hay números que se te quedan grabados para siempre en la memoria?

— Sí, pero éste precisamente lo has olvidado.

— Lo recordaré enseguida. Era algo así como 77539.

— ¡Nada menos que cinco cifras!.

— Podemos intentar todas las combinaciones de 77539.

— ¿Sabes cuántas hay? Como unas seiscientas, más o menos. Espero que no tengas prisa.

— Estoy seguro de todo menos del 7.

— Sí, pero ¿qué 7?. Esto significa que hay que probar con seis mil configuraciones. No soy matemático, sabes.

¿Podría el lector ayudar al personaje de esta novela y precisar sus cálculos?

3.1.11 *Para su uso en éste y los siguientes ejercicios, describimos brevemente la baraja española: consta de 40 cartas, que están agrupadas en cuatro palos (oros, copas, espadas y bastos). Cada palo cuenta con diez cartas, las figuras: as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo y rey.*

¿Cuál es la probabilidad de que en un mazo "bien barajado" de cartas de una baraja española las dos primeros cartas no formen pareja (esto es, no sean la misma figura, digamos dos ases, o dos sotas)?

Sugerencia. Pásese al complementario.

Solución. 12/13

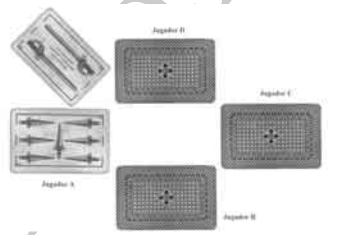
3.1.12 *¿En cuántas "manos" distintas de 5 cartas de baraja española aparecen los 4 palos?*

Solución. $4 \times \binom{10}{2}10^3$

3.1.13 *¿Cuántas manos de cinco cartas de la baraja española son exactamente un trío (esto es 3 con el mismo número o figura y las dos cartas restantes con distinto número (o figura) entre sí y respecto de las otras tres)? ¿Y dobles parejas?*

Solución. (a) $10\binom{4}{3}\frac{36\times 32}{2}$ (b) $\binom{10}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}32$

3.1.14 *Estamos jugando a la pocha y tenemos la siguiente partida sobre el mazo de cartas está el 2 de espadas (espadas es, por tanto la pinta). El jugador A, que es mano (esto es, el primero en jugar) tiene un 7 de espadas. Lo único que nos interesa saber es que, co las reglas del juego, sólo hay en la baraja 5 cartas que superen e valor de su carta (sota, caballo, rey, tres y as de espadas). ¿Cuá es la probabilidad de que A pierda la jugada?*



Sugerencia. Pasar al complementario.

Solución. $1-\frac{\binom{33}{3}}{\binom{38}{3}}$

3.1.15 *Si n bolas numeradas se distribuyen al azar en n cajas numeradas, ¿cuál es la probabilidad*
(a) de que ninguna caja quede vacía?;
(b) ¿y de que exactamente una caja quede vacía?

Sugerencia. Hay que decidir a qué caja va cada bola, con las restricciones correspondientes en cada caso. Obsérvese que el número de bolas coincide con el de cajas.

Solución. *(a)* $\frac{n!}{n^n}$ *(b)* $\frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

3.1.16 *La longitud de una composición de un número natural n es el número de sumandos. Pruébese que si un número n tiene M composiciones de longitud k, entonces también tiene M composiciones de longitud $n-k+1$. Dedúzcase que la longitud media de las composiciones del número n es $\frac{n+1}{2}$.*

Sugerencia. Utilizar las propiedades de los coeficientes binómicos. Para el segundo apartado, obsérvese que por cada composición de tamaño k hay otra de tamaño $n-k+1$; y que la media de esos tamaños es precisamente $(n+1)/2$.

3.1.17 *Se tienen dos listas de símbolos, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, todos distintos. Se quiere formar una única lista con todos los $n+m$ símbolos respetando el orden dado de las a's y el orden dado de las b's. Por ejemplo, si $n=2$ y $m=3$ la lista $(b_1, a_1, b_2, a_2, b_3)$ es válida, pero no así la lista $(a_1, b_3, b_2, a_2, b_1)$). ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?*

Sugerencia. Fijar las posiciones de, por ejemplo, las a_i. Luego insertar las b_i entre ellas y aprovechar que se debe respetar el orden previo para verlos como separadores, indistinguibles.

Solución. $\binom{n+m}{n}$

3.1.18 *Se distribuyen n bolas idénticas en m cajas numeradas, ¿de cuántas formas distintas se puede hacer esto de manera que cada caja reciba al menos una bola y a lo sumo dos? ¿Y si la única restricción es que haya a lo sumo dos en cada caja?*

Solución. *(a)* $\binom{m}{n-m}$ *(b)* $\sum_{2q+p=n}\binom{m}{p}\binom{m-p}{q}$

3.1.19 *Consideremos el conjunto de símbolos* $\mathcal{X}=\{1,2,3,\dots,50\}$*. Diremos que un subconjunto* A *de* $\mathcal{X}$ *está separado si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo,* $\{10,15,17,40\}$ *no está separado, mientras que* $\{10,15,18,40\}$ *sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de* $\mathcal{X}$*?*

Solución. $\binom{42}{5}$

3.1.20 *Tenemos* n *cerillas, que usamos para representar las letras* I *y* V*: la* I *requiere una cerilla, la* V *dos. ¿Cuántas "palabras" distintas se pueden formar?*

3.1.21 *Pruébese, algebraica y combinatoriamente, que* $\displaystyle\binom{n-1}{k-1}n=k\binom{n}{k}$.

Sugerencia. Tenemos n jugadores, y queremos hacer un equipo con k de ellos, uno de los cuales sea el capitán (hágase este proceso de dos formas diferentes).

3.1.22 *Pruébese mediante un argumento combinatorio que*

$$\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2 \ .$$

Obténgase (y pruébese) una fórmula similar para $\binom{kn}{2}$.

Sugerencia. Pártase el conjunto $\{1,\dots,2n\}$ en dos (o en k tipos, para el segundo apartado), por ejemplo, los n primeros y los n últimos; y considérese una partición dependiendo de qué conjuntos extraemos los dos elementos.

Solución. $k\binom{n}{2}+\binom{k}{2}n^2$

3.1.23 *Pruébese con argumentos combinatorios que* $\displaystyle\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$.

3.1.24 *Verifíquense las siguientes identidades:*

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n-k)!^2k!^2}=\binom{2n}{n}^2\qquad (c)\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\binom{2n}{n+1}$$

Sugerencia. Considerar dos tipos de elementos en el conjunto $\{1,\dots,2n\}$, por ejemplo los n primeros y los n últimos.

3.1.25 *Utilizando la interpretación de* $\binom{n}{k}$ *como número de caminos, pruébese que si* $m,n,r\geq 0$*, entonces*

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}.$$

Sugerencia. Obsérvese que el índice de sumación aparece abajo en los coeficientes binómicos de la suma. Es decir, habrá que considerar una barrera horizontal, a altura m.

3.1.26 *Pruébese que si $m, n, r \geq 0$, entonces* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} \binom{m}{k}\binom{n}{r+k} = \binom{m+n}{m+r}$.

Sugerencia. Úsese el ejercicio anterior o establézcase una barrera a la altura adecuada.

3.1.27 *Pruébese que si $n, r, s \geq 0$, entonces*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r}\binom{n-k}{s} = \binom{n+1}{r+s+1}.$$

Dedúzcase que

$$\sum_{k=r}^{n-r-s} \binom{k}{k-r}\binom{n-k}{n-s-k} = \binom{n+1}{n-r-s}.$$

Sugerencia. Ahora los índices están arriba, la primera coordenada es la que se mueve; es decir, necesitaremos una barrera diagonal. Para el segundo apartado, refléjese la barrera del primero (o bien utilícense las propiedades de los coeficientes binómicos).

3.1.28 *Pruébese que el número de formas de distribuir n bolas indistinguibles en k cajas numeradas de forma que en cada caja haya a lo sumo r bolas es el coeficiente de x^n en el desarrollo de*

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^k$$

Sugerencia. Recuérdense las biyecciones que establecíamos en la teoría.

3.1.29 *Pruébese que si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c \geq 0$ y si $n = a + b + c$ entonces*

$$\binom{n}{a, b, c} = \binom{n-1}{a-1, b, c} + \binom{n-1}{a, b-1, c} + \binom{n-1}{a, b, c-1}$$

Explíquese el significado combinatorio de esta identidad. (Nota: generalícese a $n-2$, $n-k\ldots$)

Sugerencia. La prueba se puede hacer algebraicamente. Para dar una prueba combinatoria, fíjese un elemento cualquiera, por ejemplo el último, y cuéntense las distribuciones dependiendo de en qué caja esté.

3.1.30 *Demuéstrese que* $\displaystyle\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=n \\ a_1,\ldots,a_k \geq 0}} \binom{n}{a_1 \ldots a_k} = k^n$.

3.1.31 *Evalúese la suma* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Sugerencia. Para calcular $\sum_{k=0}^{n} k^2$, podemos reescribir k^2 como $k(k-1)+k$ y aplicar la identidad

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

que se obtiene, por ejemplo, colocando en el triángulo de Tartaglia una barrera diagonal de segunda coordenada k (también se puede probar por inducción). Para k^3, reescríbase como $k(k-1)(k-2)+3k^2-2k$.
Otra alternativa es probar, por inducción, que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \big(\sum_{k=0}^{n} k\big)^2$.

Solución. $6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$.

3.1.32 *¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1,2,\dots,n\}$ un conjunto de r números, de forma que no haya dos consecutivos?*

Solución. $\binom{n-r+1}{r}$

3.1.33 *Calcular el número de configuraciones circulares de r unos y $n-r$ ceros de forma que no haya dos ceros consecutivos. Si dos configuraciones son tales que una se obtiene por rotación de la otra las consideramos como distintas.*

Sugerencia. Utilícese el ejercicio anterior y téngase en cuenta la restricción que hay entre las posiciones última y primera.

Solución. $\binom{r+1}{n-r} - \binom{r-1}{n-r-2}$.

3.1.34 *¿Cuántas 8-listas sin repetición se pueden formar con el conjunto $\{1,2,\dots,8\}$ de forma que no aparezcan 12, 34, 56, o 78? (Esto es, que no aparezca un 2 detrás de un 1, etc.)*

Sugerencia. Pásese al complementario y aplíquese inclusión/exclusión.

Solución. $\binom{4}{0}8! - \binom{4}{1}7! + \binom{4}{2}6! - \binom{4}{3}5! + \binom{4}{4}4!$

3.1.35 *Se llama **involución** del conjunto $\mathcal{X}$ a toda aplicación biyectiva f de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ de forma que $f(f(x)) = x$ para cada elemento x de $\mathcal{X}$. Calcúlese el número de involuciones del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$.*

Sugerencia. Obsérvese que cualquier involución deja fijos l elementos y el resto los agrupa por parejas. Si ese resto es $2k$, entonces $l+2k=n$.

Solución. $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} 2^{-k} k! \binom{2k}{k} \binom{n}{n-2k}$

3.1.36 *Sea $\mathcal{S} = \{s_1, s_1, s_2, s_2, \dots, s_m, s_m\}$ un multiconjunto que contiene dos copias de los distintos símbolos $s_1, s_2, \dots, s_m$. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar una lista ordenada de los elementos de $\mathcal{S}$ con la condición de que los símbolos contiguos sean distintos?*

Sugerencia. Pásese al complementario y aplíquese inclusión/exclusión, teniendo en cuenta que hay m parejas de símbolos iguales.

Solución. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(2m-k)!}{2^{m-k}}$

3.1.37 *Pruébese que, dados $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene que* $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

Sugerencia. Aplíquense inducción y las propiedades de recurrencia de los coeficientes binómicos.

3.1.38 *Compruébese, por inducción, que (con la nomenclatura habitual del principio de inclusión/exclusión)*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \alpha_1 \qquad \textit{y que} \qquad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \alpha_1 - \alpha_2\,.$$

Sugerencia. Para el paso de inducción, utilícese la versión básica del principio de inclusión/exclusión, $|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|$. Al probar la segunda desigualdad quizás necesitemos utilizar la primera.

3.1.39 *Consideremos los conjuntos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,4\}$, $D = \{1,5\}$, $E = \{1,6\}$ y $F = \{1,7\}$. Compruébese que $\alpha_4 > \alpha_3$.*

3.1.40 *Compruébese, utilizando la recurrencia de los coeficientes binómicos, que*

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{t}(-1)^{j+1}\binom{k}{j} = 1-(-1)^{t+1}\binom{k-1}{t} \qquad (b) \quad \binom{k-1}{t} \leq \binom{k}{t+1}.$$

3.1.41 ***Desigualdades de Bonferroni***. *Consideremos unos conjuntos $A_1,\dots,A_n$ y llamemos A a su unión. Llamemos también*

$$S_t = \sum_{j=1}^{t}(-1)^{j+1}\,\alpha_j\,, \quad \textit{para cada } t = 1,\dots,n.$$

Obsérvese que $S_n = |A|$, por el principio de inclusión/exclusión. Compruébese, siguiendo las ideas de la demostración del principio de inclusión/exclusión (véase la subsección 3.1.7) y las estimaciones del ejercicio anterior, que

$$|S_n - S_t| \leq \sum_{k=1}^{n}\#\left\{\begin{array}{c}\textit{elementos de } A \textit{ en}\\ \textit{exactamente } k \textit{ de los } A_j\end{array}\right\}\binom{k}{t+1}.$$

Deducir, finalmente, la familia de desigualdades de Bonferroni, comprobando que el miembro de la derecha coincide con α_{t+1}.

3.1.42 *En la misma situación del ejercicio anterior, compruébese que, para cada $k \leq n$,*

$$\#\left\{\begin{array}{c}\textit{elementos de } A \textit{ en}\\ \textit{exactamente } k \textit{ de los } A_j\end{array}\right\} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\binom{k+j}{j}\alpha_{k+j}\,.$$

3.1.43 *Pruébese usando el principio de inclusión/exclusión que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 0.$

Sugerencia. Sea $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, n\}$ y sea A_j la colección de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que tiene m elementos uno de los cuales es j.

3.1.44 *Supongamos que tenemos una colección de subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de un conjunto $\mathcal{X}$, y una función p que a cada elemento de $x \in \mathcal{X}$ le asocia un cierto número positivo $p(x)$, su peso. Llamemos*

$$P_i = \sum_{x \in A_i} p(x)\,, \qquad \text{para cada } i = 1, \ldots, n,$$

al peso total (la suma) de los elementos de A_i. Análogamente, llamemos

$$P_{i,j} = \sum_{x \in A_i \cap A_j} p(x) \quad (i \neq j)\,, \qquad P_{i,j,k} = \sum_{x \in A_i \cap A_j \cap A_k} p(x) \quad (i \neq j \neq k)\,, \qquad \text{etc.}$$

Finalmente, sean

$$P = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \qquad y \qquad Q = \sum_{x \in \mathcal{X} \setminus \cup_i A_i} p(x)$$

el peso total de los elementos de $\mathcal{X}$ y el peso total de los que no están en ninguno de los A_i, respectivamente. Pruébese que

$$Q = P - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i \neq j} P_{i,j} + \cdots + (-1)^n P_{1,\ldots,n}\,.$$

Nota: Si $p(x) = 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$, esto es el principio de inclusión/exclusión habitual.

Sugerencia. Pruébese con doble conteo.