8.4. Coloreando grafos

Vamos ahora a introducir un ingrediente nuevo en este recorrido por la Teoría de Grafos: vamos a "colorear" los vértices de un grafo, con unas ciertas reglas que veremos en un momento. El objetivo es abordar la cuestión de contar listas con restricciones (en particular, el problema de los horarios que planteábamos al principio del capítulo).

Tenemos un grafo G y un conjunto de colores $S = \{a, b, \dots\}$. Una **coloración** de G con los colores de S consistirá en asignar a los vértices de G elementos de S ("colores") de manera que los extremos de cada arista reciban colores distintos. Formalmente, una coloración de G con colores de S es una aplicación

$$\gamma : V(G) \longrightarrow S$$

de forma que $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ si $\{v, w\} \in A(G)$. El valor de $\gamma(v)$ es el color que recibe el vértice v en la coloración.

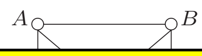
Definición 8.13 *El **número cromático** de un grafo G, $\chi(G)$, será el número mínimo de colores necesario para colorear G.*

Un problema clásico en este contexto es el llamado **problema de los cuatro colores**. Esta cuestión concreta es la que da lugar a la terminología de los colores. Aunque la estudiaremos en detalle en el capítulo 15, vamos a presentarla aquí de manera informal.

Tenemos un mapa con un cierto número de países y sus fronteras correspondientes, y queremos colorearlo de manera que países vecinos reciban, para poder distinguirlos, colores distintos. Para analizar esta cuestión, usamos grafos para representar la información relevante: los países que aparecen y una relación binaria, la de vecindad. El conjunto de países será el de vértices, y dibujaremos una arista entre dos vértices si los países que representan son vecinos. De esta manera obtenemos un grafo, y el problema de asignar colores a los países se traduce en el de colorear el grafo.

Hay que tener cierto cuidado con la construcción del grafo: dos países pueden tener más de un trozo de frontera común (España y Francia, por ejemplo, donde Andorra separa en dos la frontera pirenaica), así que a veces tendremos que usar aristas múltiples. O quizás a un país le pueden corresponder varias regiones separadas (por ejemplo, unas islas); cada una de estas regiones debería entonces ser considerada como un país distinto. En todo caso, y esto es lo importante, el grafo que se obtiene es muy especial: es lo que se llama un **grafo plano** (en el capítulo 15 lo definiremos con cuidado).

El problema clásico al que aludíamos es el de verificar que todo mapa puede ser coloreado con sólo cuatro colores; en otras palabras, que el número cromático del grafo (plano) obtenido a partir de un mapa de la forma descrita anteriormente es menor o igual que cuatro. Por ejemplo, en el mapa



Pero volvamos con nuestro problema general de coloraciones de grafos. Algunas observaciones inmediatas sobre el número cromático son las siguientes:

1. Para todo grafo G, $\chi(G) \leq |V|$, porque siempre podremos colorear con $|V|$ colores, asignando a cada vértice un color distinto. Ésta es, obviamente, la forma menos efectiva de colorear.
2. Si el grafo contiene al menos una arista, necesitaremos dos colores como mínimo; es decir, si $|A| \geq 1$, entonces $\chi(G) \geq 2$.
3. Si G contiene a G' como subgrafo, entonces

$$\chi(G) \geq \chi(G'),$$

porque al menos necesitaremos $\chi(G')$ colores para colorear el subgrafo (y quizás más para el resto). Los ejemplos más relevantes de subgrafos que habremos de buscar dentro de un grafo para obtener información sobre su número cromático son los completos y los ciclos de orden impar, cuyos números cromáticos obtendremos pronto (en el ejemplo 8.4.1).
4. Si G tiene k componentes conexas, $G_1, G_2, \ldots, G_k$ que tienen números cromáticos $\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)$ respectivamente, entonces

$$\chi(G) = \max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$$

Para verlo, comprobamos primero que $\chi(G) \geq \max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$. ¿Cuántos colores necesitaremos para colorear todo el grafo G? Al menos, tantos como necesitemos para colorear la componente conexa de mayor número cromático.

Pero también se cumple que $\chi(G) \leq \max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$. Supongamos que tenemos evaluado $\max_{1\leq i\leq k} \{\chi(G_i)\}$. Con este número de colores podremos colorear la componente conexa más "difícil". Pero también las otras, que necesitan menos colores.
5. Si G y G' son grafos isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$. El propio isomorfismo aplica coloraciones en G en coloraciones en G'.

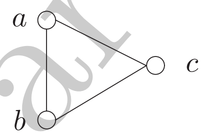
Ejemplo 8.4.1 *Calculemos el número cromático de algunos grafos.*

Para colorear el grafo completo con n vértices, K_n, necesitamos tantos colores como vértices (porque cuando asignamos un color a un vértice, ya no podemos utilizar este color de nuevo). Así que $\chi(K_n) \geq n$. Pero el número cromático de un grafo no puede ser mayor que el número de vértices, así que $\chi(K_n) = n$. Por tanto, si un grafo G contiene a un K_n como subgrafo, ya tenemos una cota inferior para $\chi(G)$.

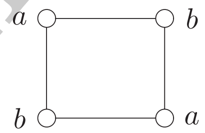
Para el grafo lineal con n vértices, L_n ($n \geq 2$), observemos primero que lo podemos colorear con sólo dos colores:

El grafo vacío N_n se puede colorear con un único color, así que $\chi(N_n) = 1$. Y recíprocamente: si un grafo se puede colorear con un sólo color, entonces es un grafo vacío.

Consideremos el grafo circular C_n, con $n \geq 3$. Veamos los primeros casos. Por ejemplo, para C_3, una posible coloración es la que aparece a la derecha, que utiliza sólo tres colores. Por tanto, $\chi(C_3) \leq 3$. Y es fácil convencerse de que dos colores no son suficientes. Es decir, que $\chi(C_3) = 3$.



Para C_4, es fácil dar una coloración con dos colores, y éste es el valor mínimo que puede tener el número cromático, pues hay aristas. Por tanto, $\chi(C_4) = 2$.

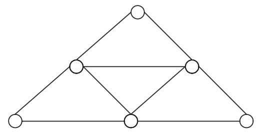


No es difícil repetir estos argumentos para concluir que:

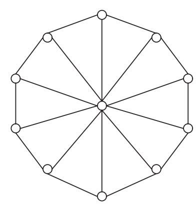
$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, \text{ si } n \text{ es par} \\ 3, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

De lo anterior deducimos que si un grafo contiene ciclos de orden impar, entonces al menos necesitaremos tres colores para colorearlo.

El grafo que aparece a la derecha era protagonista en algunas de las discusiones matemáticas de la película[8] *El indomable Will Hunting*. Su número cromático es 3: al menos requiere tres colores, pues hay ciclos de orden impar. Y es fácil dar una coloración que utilice sólo esos tres colores.



Consideremos el grafo R_n, que llamaremos **grafo rueda**, que tiene $n + 1$ vértices. Vemos inmediatamente que el vértice central es especial. Cualquier coloración del grafo le asignará un color que ya no podremos volver a usar en el resto del grafo. Pero una vez hayamos coloreado el vértice central con un color y nos aseguremos de que no lo volvemos a usar, lo que nos queda es uno circular con n vértices, así que



$$\chi(R_n) = \begin{cases} 3, \text{ si } n \text{ es par;} \\ 4, \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el grafo bipartito completo $K_{r,s}$, con $r, s \geq 1$, por haber aristas, $\chi(K_{r,s}) \geq 2$. Pero asignar un color a los vértices de la izquierda y otro distinto a los de la derecha es una buena coloración, así que $\chi(K_{r,s}) \leq 2$. Por tanto, $\chi(K_{r,s}) = 2$. En realidad, cualquier grafo bipartito, aunque no sea completo, se puede colorear con sólo dos colores (de hecho, esta propiedad caracteriza a los grafos bipartitos; véanse los ejercicios 8.4.2 y 8.4.3).

Para el grafo del cubo Q_n, para $n \geq 2$, como hay aristas, de nuevo $\chi(Q_n) \geq 2$. Pero el cubo es un grafo bipartito (no completo, recordemos la discusión del final de la subsección 8.1.3), así que $\chi(Q_n) = 2$. ♣

En general, y a diferencia de lo que parecen sugerir estos ejemplos sencillos, calcular el número cromático de un grafo arbitrario es una tarea extraordinariamente complicada (en términos técnicos, un problema NP-completo). Las cotas que hemos obtenido hasta aquí no son muy precisas, en general (aún obtendremos alguna más, véanse las proposiciones 8.11 y 8.12). Tendremos que esperar a conocer el concepto de polinomio cromático (en la sección 8.5) para obtener un algoritmo (quizás laborioso) para calcular números cromáticos.

8.4.1. Coloraciones de grafos: relación con listas y particiones en bloques

Colorear un grafo nos servirá para describir de otra manera el problema de construir listas con restricciones. Al fin y al cabo,

> colorear un grafo G de n vértices con k colores es lo mismo que formar listas con repetición permitida de longitud n con los símbolos (colores) $\{a_1, \ldots, a_k\}$, de manera que si $\{i, j\} \in A(G)$, los símbolos que aparecen en las posiciones i y j de la lista son distintos.

Una observación interesante, que nos será útil en ciertos argumentos sobre coloreado es que

> colorear un grafo G con vértices $\{1, \ldots, n\}$ con **exactamente** k colores dados —es decir, usándolos todos— es lo mismo que partir el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en k bloques no vacíos (cada bloque lleva los vértices que van con el mismo color), de manera que cada dos elementos (vértices) de un bloque no son vecinos en G. Y a cada bloque le asignamos un número de 1 a k distinto.

Es conveniente reflexionar sobre estas equivalencias, que nos permitirán abordar algunos problemas sobre listas con prohibiciones con este nuevo lenguaje de grafos. Algunos ejemplos de estas equivalencias serían:

- Colorear L_n con, digamos, los colores $\{a, b, c\}$ es lo mismo que formar listas con repetición permitida de longitud n con los símbolos $\{a, b, c\}$ de manera que en posiciones consecutivas haya símbolos distintos (nótese que **no** son listas sin repetición: la lista (a, b, a) es válida aquí).

- Colorear el grafo vacío N_n con k colores, usándolos todos, es lo mismo que partir el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en k bloques no vacíos y luego etiquetar cada bloque con un número de 1 a k.

- Ahora bien, si lo que queremos es colorear el grafo vacío N_n utilizando a lo sumo los

8.4.2. Algoritmo austero para colorear

Buscamos un procedimiento que nos permita colorear un grafo $G = (V, A)$ con $|V| = n$, dado un conjunto de colores $S = \{a, b, \dots\}$ (en principio no limitamos el número de colores que utilizaremos), de manera que el número de colores utilizado sea el menor posible. Lo llamaremos[9] **algoritmo austero**, y consta de los siguientes pasos:

- **Paso inicial**. Ordenamos los vértices del grafo (¡importante!, el resultado del algoritmo dependerá de la ordenación elegida; veremos criterios para conseguir ordenaciones eficientes). Esto es, disponemos los vértices del grafo en una lista

  $$(v_1, v_2, \dots, v_n)\,.$$

  Ahora asignaremos colores a los vértices siguiendo la ordenación elegida.

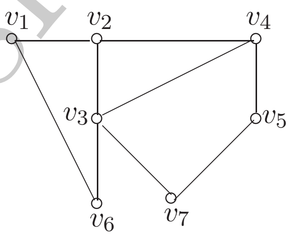
- **Primer paso**. A v_1 le asignamos el primer color disponible, a.

- **Segundo paso**. ¿Cómo coloreamos v_2? Si es vecino de v_1 le asignamos el color b; si no lo es, le asignamos a.

- **Tercer paso** Para colorear v_3, comprobamos si es vecino de v_1 ó v_2; y no podremos utilizar el color o colores que hayamos utilizado en los que sean vecinos suyos.

- ***k*-ésimo paso**. ¿Cómo coloreamos el vértice v_k, teniendo en cuenta que ya hemos coloreado los $k-1$ anteriores? En la lista de colores obviamos los colores usados en los **vecinos** de v_k **que ya hayan sido coloreados**; de los colores que quedan, elegimos para v_k el primero disponible.

Ejemplo 8.4.2 *Consideremos el siguiente grafo, en el que ya hemos asignado un orden a los vértices:*



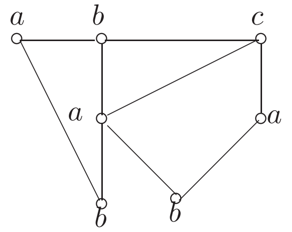
A v_1 le asignamos el color a. Como v_2 es vecino de v_1 (que ya ha sido previamente coloreado con a), para colorear v_2 no podemos utilizar el color a:

$$\{\cancel{a}, b, c, d, \dots\} \quad \longrightarrow \quad \text{escogemos } b.$$

El vértice v_3 sólo tiene un vecino que ya haya sido coloreado, el v_2 con b, así que

Para v_4 hay disponibles $\{\cancel{a}, \cancel{b}, c, d, \dots\}$ $\longrightarrow$ escogemos c.
Para v_5 hay disponibles $\{a, b, \cancel{c}, d, \dots\}$ $\longrightarrow$ escogemos a.
Para v_6 hay disponibles $\{\cancel{a}, b, c, d, \dots\}$ $\longrightarrow$ escogemos b.
Para v_7 hay disponibles $\{\cancel{a}, b, c, d, \dots\}$ $\longrightarrow$ escogemos b.

Y obtenemos finalmente la coloración

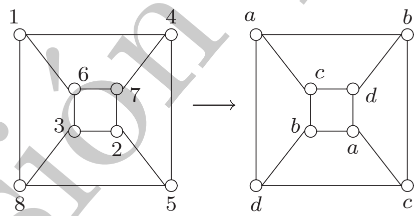


Así que el algoritmo austero nos permite colorear el grafo con tres colores (el mínimo necesario, obsérvese que hay ciclos de longitud impar). ♣

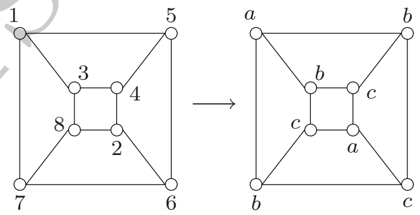
Y deberíamos preguntarnos si este algoritmo siempre funciona de manera óptima, es decir, si produce siempre una coloración que emplea justo tantos colores como nos diga el número cromático. El siguiente ejemplo nos muestra que no siempre es así.

Ejemplo 8.4.3 *Consideremos el grafo del cubo Q_3.*

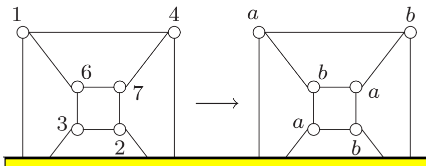
Encontramos ordenaciones que utilizan:



4 colores



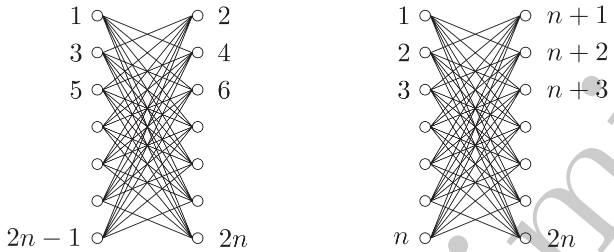
3 colores



2 colores

vértices posibles, veríamos que nunca se utilizan más de cuatro colores (por cierto, todos los vértices son de grado tres). ¿Es esto algo que ocurre siempre? Lo vemos en un momento. ♣

EJEMPLO 8.4.4 *Consideremos el grafo bipartito con $2n$ vértices y tal que cada vértice de la izquierda está unido a todos los de la derecha excepto al que se sitúa enfrente suyo. Y establezcamos dos ordenaciones distintas de los vértices:*



La ordenación de los vértices de la izquierda hace que el algoritmo austero utilice n colores. La de la derecha, sin embargo, hace que el algoritmo austero utilice sólo 2 colores, que es lo mejor posible (recordemos que el número cromático es 2). Si tomamos n muy grande, nos da una idea de lo "sensible" que es el resultado del algoritmo austero a la ordenación inicial. ♣

Así que conviene definir algunos criterios para ordenar "bien" los vértices de un grafo, de manera que el algoritmo sea eficaz. Para ello, necesitamos entender en mayor profundidad el funcionamiento del algoritmo. Empecemos dando una cota sobre el "peor" resultado que puede dar.

EJEMPLO 8.4.5 *Mostremos que, para cualquier ordenación de los vértices del cubo, el algoritmo austero utiliza, a lo sumo, 4 colores.*

En el paso k-ésimo del algoritmo, para colorear v_k estarán prohibidos los colores usados en los vértices que sean vecinos de v_k y que, **además**, sean anteriores a v_k (que sean del tipo v_j, con $j < k$). Por tanto, en cada paso (como mucho) habrá tantos colores prohibidos como el grado del vértice correspondiente. En el cubo, todos los vértices tienen grado 3, así que a lo sumo tendremos 3 colores prohibidos en cada paso. Por tanto, con 4 bastará para colorear mediante el algoritmo. ♣

El argumento se puede generalizar para obtener una cota superior para el número cromático de un grafo:

Proposición 8.11 *Sea G un grafo y sea $\Delta(G)$ su máximo grado (todos los vértices de G son de grado $\leq \Delta(G)$). En estas condiciones, el algoritmo austero utiliza a lo sumo $\Delta(G)+1$ colores. Por tanto,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1\,.$$

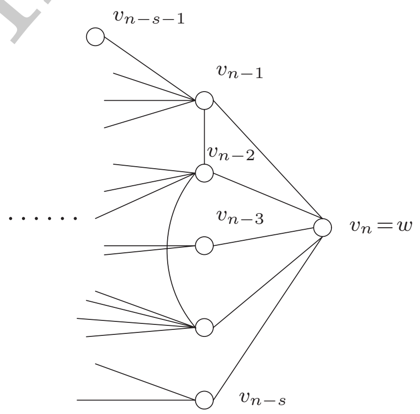
La razón es la misma que la que se detallaba en el ejemplo del cubo. Obsérvese que esta cota

Una buena ordenación será aquélla en la que, en cada paso, ese mínimo sea pequeño. Así que interesará colocar los vértices de mayor grado al principio (cuando el número de vértices anteriores es pequeño; así se “neutralizan” los valores grandes de los grados) y al final los de menor grado (para compensar que el número de vértices anteriores es aquí elevado). En todo caso, es bueno saber que siempre existe una ordenación de los vértices de un grafo para la que el algoritmo austero es óptimo, emplea exactamente $\chi(G)$ colores (consúltese el ejercicio 8.4.4). El problema es que no hay un criterio, más allá de las observaciones que hemos dado, que nos permita obtener esta ordenación.

En ciertas circunstancias, podemos mejorar la estimación sobre el número cromático de un grafo:

Proposición 8.12 *Si G es un grafo conexo con máximo grado $\Delta(G)$, pero en el que existe al menos un vértice w con $gr(w) < \Delta(G)$, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) .$$



Demostración. Supongamos que tenemos n vértices y digamos que w tiene grado $s < \Delta(G)$. Vamos a ordenarlos de la siguiente manera: w será el último vértice de la lista ($w = v_n$). Los s vecinos de w precederán a éste en el orden establecido ($v_{n-1}, \ldots, v_{n-s}$). Después, consideramos los vecinos de v_{n-1} que no hayan sido ya ordenados, luego los de v_{n-2} y así sucesivamente. Como G es conexo, al final tendremos una ordenación de todos los vértices (lo que estamos haciendo es, casi, construir un árbol abarcador para el grafo, como veremos más adelante). Apliquemos ahora el algoritmo austero: en cada paso estarán prohibidos los colores usados en los vecinos anteriores. Pero todos los vértices (excepto w) tienen algún vecino posterior, así que $\#\{\text{vecinos anteriores}\} \leq \Delta(G) - 1$, para todo $v \neq w$. Para w, es el grado el que es estrictamente menor que $\Delta(G)$. En total, en cada paso hay, a lo sumo, $\Delta(G) - 1$ colores prohibidos. Por tanto, con $\Delta(G)$ colores bastará para colorear. ■

Proposición 8.13 *Si G es un grafo y para cada subgrafo H de G se cumple que*

$$\min_{v \in V(H)} gr_H(v) \leq K ,$$

($gr_H(v)$ quiere decir el grado de v como vértice de H), entonces

$$\chi(G) \leq K + 1 .$$

Demostración. Buscamos una buena ordenación de los vértices de G. Supongamos que

Sea ahora $v_{n-1} \in V(H_n)$ un vértice con grado $gr_{H_n}(v_{n-1}) \le K$. Llamamos entonces

$$H_{n-1} = H_n \setminus \{v_{n-1}\} = G \setminus \{v_n, v_{n-1}\}\,.$$

Luego tomaríamos $v_{n-2} \in V(H_{n-1})$ con $gr_{H_{n-1}}(v_{n-2}) \le K$, y así sucesivamente. De esta manera, ordenaríamos los n vértices de G de manera que, para cada j,

$$\#\{\text{vecinos de } v_j \text{ anteriores a } v_j\} \le K\,,$$

pues los vecinos de v_j anteriores a v_j están en H_{j+1}. Así que el algoritmo austero, con esta ordenación de vértices, utilizaría a lo sumo $K+1$ colores. ■

Más adelante utilizaremos esta observación (véase la sección 15.4).

EJERCICIOS.

8.4.1 *¿Qué grafos G tienen $\chi(G) \le 2$?*

Solución. Si $\chi(G) = 1$, es un grafo vacío. Si $\chi(G) = 2$, es un grafo bipartito.

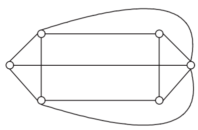
8.4.2 *Comprobar que $\chi(G) = 2$ si y sólo si G es un grafo (no vacío) bipartito.*

8.4.3 *Utilizar el algoritmo austero para comprobar que $\chi(G) = 2$ si y sólo si G no contiene ciclos de orden impar. Deducir entonces que un grafo G es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de orden impar.*

8.4.4 *Probar que en cualquier grafo G hay una ordenación de los vértices para la que el algoritmo austero de coloración solo requiere $\chi(G)$ colores.*

Sugerencia. Colorear G con exactamente $\chi(G)$ colores es lo mismo que partir $V(G)$ en $\chi(G)$ bloques no vacíos de manera que no haya aristas entre vértices de un mismo bloque.

8.4.5 *Comprobar que el grafo del dibujo tiene número cromático 4.*



8.4.6 *Probar que si G es un grafo con n vértices y tal que todos sus vértices tienen grado k entonces*

$$\chi(G) \ge \frac{n}{n-k}\,.$$

Sugerencia. Colorear el grafo con $\chi(G)$ colores y estimar cuántos vértices puede haber, como mucho, en cada bloque de vértices que llevan el mismo color.

8.4.8 *El grafo M_r se obtiene del ciclo C_{2r} añadiendo aristas que unen pares de vértices opuestos. Es decir, si los vértices son $\{1, 2, \dots, 2r\}$ entonces las aristas son $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}, \dots$, $\{2r - 1, 2r\}$, $\{2r, 1\}$ y $\{1, r + 1\}$, $\{2, r + 2\}, \dots$, $\{r, 2r\}$. Probar que*

(i) *M_r es bipartido cuando r es impar.*

(ii) *$\chi(M_r) = 3$ cuando r es par y $r \neq 2$.*

(iii) *$\chi(M_2) = 4$.*

Sugerencia. Para el primer apartado, dar una coloración del grafo con dos colores. Observar que para poder darla es necesario que r sea par. Para el segundo, observar que se tienen ciclos de orden impar. Y comprobar que se puede dar una coloración con tres colores.

8.4.9 *Sea $G = (V, A)$ un grafo. El grafo complemetario $\widehat{G}$ de G es el grafo cuyos vértices son los de V y cuyas aristas unen pares de vértices que no están unidas en G.*

(i) *Si G tiene n vértices, de grados $g_1, g_2, \dots, g_n$, ¿qué grados tienen los vértices de $\widehat{G}$?*

(ii) *Probar que $\chi(G)\chi(\widehat{G}) \geq n$.*

Sugerencia. Para el segundo apartado, comprobar que podemos colorear el grafo completo usando como colores pares (a_i, b_i), donde a_i es el color que lleva el vértice cuando lo consideramos en G y b_i, cuando lo consideramos en $\widehat{G}$.

Solución. (a) Los grados son $n - g_1 - 1, n - g_2 - 1, \dots, n - g_n - 1$.

8.4.10 *Dado un grafo G, ordenemos los vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de forma que si $g_i = \text{grado}(v_i)$ entonces $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_n$. Sea*

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, 1 + g_i\}\}.$$

Probar que $\chi(G) \leq q$. Deducir que si k es tal que $k - 1 \leq g_k$ y $k > g_{k+1}$, entonces $\chi(G) \leq k$.

Sugerencia. Para la primera parte, usar el algoritmo austero de coloración. Para la segunda, estimar el número de vecinos anteriores en los tramos que indica la condición del enunciado. Comprobar que esto constituye una mejora respecto a la cota vista en la teoría $\chi(G) \leq \max_j\{g_j\}+1$ (buscar ejemplos).

8.4.11 *Probar que (i)* $\chi(G) + \chi(\widehat{G}) \leq n + 1$; *(ii)* $\chi(G) + \chi(\widehat{G}) \geq 2\sqrt{n}$.

8.4.12 *¿Cuál es el número máximo de aristas que puede tener un grafo de n vértices y número cromático 2?*

Sugerencia. Es un grafo bipartito, tendremos el máximo número de aristas cuando sea completo.

Solución. $n^2/4$ si n es par, y $(n - 1)(n + 1)/4$ si n impar.

8.5. Polinomio cromático

El siguiente paso consiste en contar el número de maneras diferentes en que se puede colorear un grafo dado un cierto número de colores. Y es que, recordemos, nos interesaba describir el problema de contar listas con restricciones en este nuevo lenguaje de los grafos.

Dado un grafo G y para cada entero $k \geq 1$, llamamos

$$P_G(k) = \# \left\{ \begin{array}{c} \text{formas distintas de colorear el grafo } G \text{ usando} \\ \text{los colores de la colección } \{1, \dots, k\} \end{array} \right\},$$

teniendo en cuenta que no es necesario usarlos todos. Desde luego, p_G es una función de k, y veremos enseguida que resulta ser un polinomio, el **polinomio cromático** de G.

En términos de listas, si G tiene n vértices, $p_G(k)$ nos informa del número de listas

- de longitud n,
- con los símbolos $\{1, \dots, k\}$,
- con repetición permitida,
- y tales que si $\{i, j\} \in A(G)$, entonces en las posiciones i y j de la lista usamos símbolos distintos.

Algunas observaciones inmediatas son las siguientes:

1. Sabemos que con menos de $\chi(G)$ colores no podemos colorear el grafo, así que

$$\text{si } k < \chi(G) \quad \Longrightarrow \quad P_G(k) = 0.$$

2. Pero con exactamente $\chi(G)$ colores se puede colorear el grafo de, al menos, una forma; por tanto,

$$P_G(\chi(G)) \geq 1.$$

3. Dado un cierto grafo G, supongamos calculado el número de coloraciones distintas con k colores. Supongamos que ahora en nuestra paleta de colores disponemos de algunos más, digamos $k' > k$. ¿Cuántas coloraciones podremos formar con esos k' colores? Lo que es seguro es que las que ya teníamos con k colores seguimos teniéndolas ahora; y seguramente algunas más. Por tanto,

$$\text{si } k < k', \text{ entonces } P_G(k) \leq P_G(k').$$

4. Reuniendo las tres propiedades anteriores, deducimos que

5. Si G y G' son dos grafos isomorfos, entonces $P_G(k) = P_{G'}(k)$, porque el propio isomorfismo transforma coloraciones de G en coloraciones de G'.
6. Consideremos un grafo G que tenga dos componentes conexas, G_1 y G_2. ¿Cuál será el número de coloraciones de G? Como las componentes G_1 y G_2 no tienen aristas que las unan, para construir las coloraciones de G basta construir las de G_1 primero y luego las de G_2. Y aplicando la regla del producto, tendremos que:

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) .$$

La extensión a más de dos componentes conexas es obvia: si G tiene k componentes conexas, digamos $G_1, \ldots, G_k$, entonces

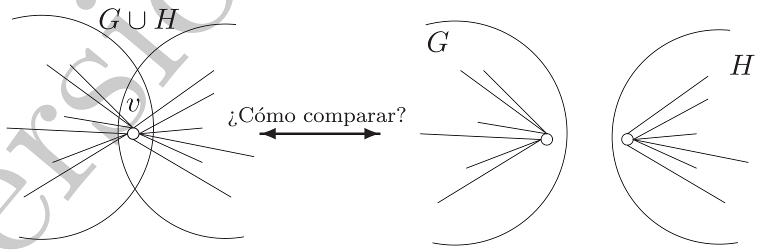
$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdots P_{G_k}(k) .$$

7. ¿Y qué ocurre si dos grafos comparten exclusivamente un vértice? Llamemos $G \cup H$ al grafo formado por dos grafos G y H que comparten sólo un vértice v. Nos gustaría escribir el valor del polinomio cromático del grafo $G \cup H$ en función de los polinomios de G y de H. La observación clave es la siguiente: consideremos un grafo F, un conjunto de colores $\{1, \ldots, k\}$ y un cierto vértice v del grafo. Entonces,

$$\#\left\{ \begin{array}{c} \text{coloraciones de } F \text{ con } \{1, \ldots, k\} \\ \text{en las que } v \text{ recibe el color 1} \end{array} \right\} = \frac{P_F(k)}{k} .$$

Obtendríamos el mismo resultado, por supuesto, si contáramos las coloraciones en las que v recibe el color 2, o el 3, etc.

Volvamos entonces a nuestro problema:



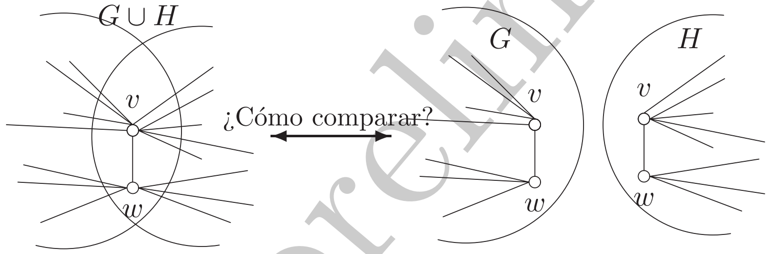
Supongamos que tenemos fijos los k colores, digamos $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Podemos hacer una partición de las coloraciones de uno de los grafos, por ejemplo H, en función del color que la coloración asigne al vértice v y escribir

$$\#\left\{ \begin{array}{c} \text{Coloraciones de } H \\ \text{con } k \text{ colores} \end{array} \right\} = \#\left\{ \begin{array}{c} \text{Coloraciones de } H \text{ con } k \text{ colores} \\ \text{que asignan } a_1 \text{ a } v \end{array} \right\} + \cdots$$

asignará un cierto color a_j al vértice v. Querríamos contar las coloraciones de H que sean válidas para colorear el grafo total; es decir, aquéllas que también asignen a_j a v. Pero de ésas hay $P_H(k)/k$. Y esto ocurre sea cual sea a_j, es decir, sea cual sea la coloración de G de la que hayamos partido. Así que:

$$P_{G\cup H}(k) = \frac{P_G(k)\,P_H(k)}{k}\,.$$

8. Un caso un poco más complicado: ¿y si sólo comparten una arista (y, por supuesto, los vértices que son extremos de esa arista)? Es decir, consideremos un grafo $G \cup H$ formado por los grafos G y H que comparten exactamente una arista, por ejemplo, la arista (v, w):



La observación pertinente es ahora que si tenemos un grafo F, unos colores $\{1,\dots,k\}$ y consideramos una arista (v,w) del grafo, entonces

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{coloraciones de } F \text{ con } \{1,\dots,k\} \text{ en las que } v\\ \text{recibe el color 1 y } w \text{ recibe el color 2}\end{array}\right\} = \frac{P_F(k)}{k\,(k-1)}\,.$$

De nuevo, en lugar de los colores 1 y 2, podríamos haber elegido cualquier otro par de colores.

Consideremos entonces una coloración cualquiera de H, que asignará ciertos colores (¡distintos!) a_i a v y a_j a w. Queremos utilizar esta coloración para construir la del grafo grande. Podemos hacer una partición de las $P_G(k)$ posibles coloraciones de G según la pareja de colores que asignen a v y w; y de ellas, fijada la coloración de H descrita anteriormente, sólo valdrán para colorear el grafo total aquéllas que asignen los colores a_i y a_j a los vértices v y w; es decir, una proporción $1/k(k-1)$. Así que

$$P_{G\cup H}(k) = \frac{P_G(k)\,P_H(k)}{k\,(k-1)}\,.$$

Este argumento se puede generalizar, véase el ejercicio 8.5.6.

vértices v_1; una vez coloreado, tendremos sólo $k-1$ disponibles para v_2, porque está prohibido utilizar el color que hayamos asignado al vértice v_1. Finalmente, para v_3 también hay un color prohibido, el utilizado para v_2, así que, utilizando la regla del producto,

$$P_G(k) = k(k-1)(k-1) = k(k-1)^2 \,.$$

Si ahora nos vamos al caso general, el grafo lineal con n vértices, L_n, el mismo argumento nos permite concluir que

$$P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1},$$

y que, por tanto, $\chi(L_n) = 2$, como ya sabíamos. ♣

Ejemplo 8.5.2 *El polinomio cromático del grafo completo K_n.*

Empecemos con el de tres vértices, K_3. No podemos colorearlo con 1 o 2 colores, así que: $P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0$. Pero de nuevo podemos contar directamente: no hay ningún color prohibido para v_1, uno para v_2 y dos para v_3, así que

$$P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k \,.$$

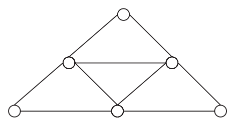
Y en general, si tenemos un K_n, el resultado es que

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\,,$$

que coincide, como debe ser, con el número de $n-$listas sin repetición que se pueden formar con k símbolos. Obsérvese que n es el primer entero en el que este polinomio no se anula, así que $\chi(K_n) = n$, como ya sabíamos. En el caso del K_3, además, al desarrollar el producto nos queda que $p_{K_3}(k) = k^3 - 3\,k^2 + 2\,k$. Interesante: el grado del polinomio coincide con el número de vértices y el coeficiente del segundo término es (cambiado de signo), el número de aristas. Veremos que éste es un hecho general en grafos (véase la subsección 8.5.2). ♣

Ejemplo 8.5.3 *El polinomio cromático del grafo de la película "El indomable Will Hunting".*

En una escena de la película se calculaba el polinomio cromático del grafo que aparece a la derecha. Y ya podemos resolverlo nosotros también: observemos que son cuatro triángulos que comparten tres aristas. Así que



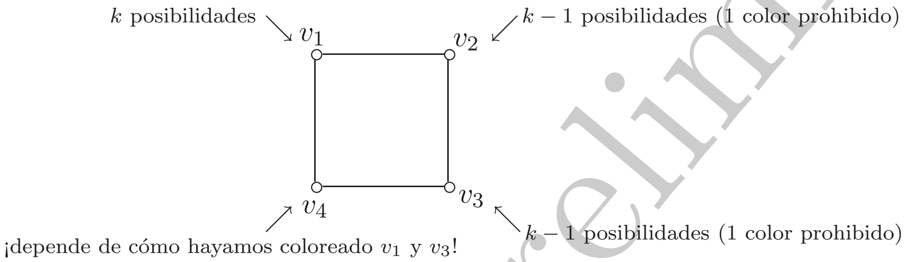
$$P_G(k) = \frac{[k(k-1)(k-2)]^4}{[k(k-1)]^3} = k(k-1)(k-2)^4 \,.$$

No tan difícil, en realidad. ♣

Resultado éste que ya hemos visto varias veces: son las $n-$listas con repetición permitida formadas con k símbolos, o el número total de aplicaciones de un conjunto con n elementos en otro con k elementos. Y de hecho, podemos recuperar una identidad que ya hemos visto varias veces sin más que ir separando las coloraciones según el número de colores que empleen realmente (véase el ejercicio 8.5.2). Por cierto, de la expresión del polinomio cromático deducimos de nuevo que $\chi(N_n) = 1$. ♣

Ejemplo 8.5.5 *Empiezan los problemas: el polinomio cromático del grafo circular C_n.*

Con C_3 no hay ninguna dificultad, pues coincide con K_3. Pero para C_4 ya no es tan fácil: intentamos contar directamente el número de coloraciones como hicimos en los otros ejemplos.



¡Es la misma dificultad que encontrábamos cuando contábamos listas con prohibiciones del tipo $1^{\underline{a}} \neq 2^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}} \neq 3^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}} \neq 4^{\underline{a}}$ y $4^{\underline{a}} \neq 1^{\underline{a}}$! (recuérdese el ejemplo 2.2.7). Entonces resolvíamos el problema pasando al complementario y utilizando el principio de inclusión/exclusión en su forma general; o bien utilizando la regla de la suma (véase el comienzo de la sección 2.3). Esta idea, convenientemente desarrollada, nos dará la clave para diseñar un algoritmo para el polinomio cromático. ♣

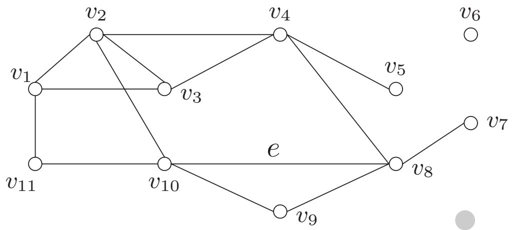
8.5.1. Algoritmo para calcular P_G ("Quitar aristas")

Revisemos, pues, el cálculo que hacíamos en la sección 2.3 sobre el número de listas de longitud cuatro que no tenían símbolos consecutivos iguales y tales que el primer y último símbolo también eran distintos. Entonces lo resolvíamos utilizando la regla de la suma: teníamos dos casos, dependiendo de si en las posiciones primera y tercera aparecía el mismo símbolo o símbolos distintos. En el primer caso, era como si tuviéramos una única posición que englobaba a la primera y a la tercera. El segundo caso se traducía en incluir una nueva restricción.

Descrito en términos de grafos, construir las listas originales es lo mismo que dar las coloraciones de un grafo C_4. Las listas del primer caso se obtendrían coloreando un grafo lineal con tres vértices, y las del segundo, coloreando un C_4 al que añadimos una de las diagonales. Si entendemos las igualdades que exhibimos a continuación como igualdades entre los polinomios cromáticos de los grafos dibujados, tenemos

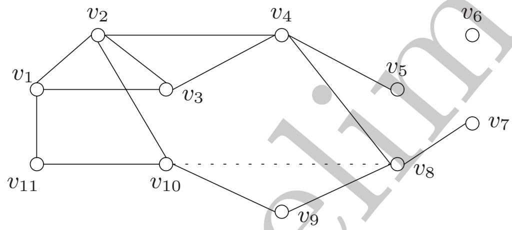
Utilicemos la misma idea para la situación general. Sea un grafo G; nos fijamos en una arista suya, $e \in A$:

G



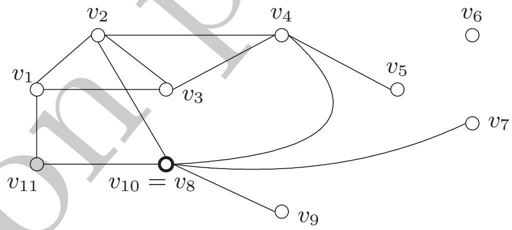
Formamos el grafo $G \setminus \{e\}$ quitando esa arista:

$G \setminus \{e\}$



Por último, consideramos el grafo G_e en el que *identificamos* los vértices unidos por la arista e. Si en el proceso aparecieran aristas múltiples, nos quedamos con una arista simple. En el ejemplo, aparece una arista doble entre v_9 y el nuevo vértice $v_8 = v_{10}$:

G_e



Fijemos k colores y supongamos que tenemos calculados $P_G(k)$, $P_{G\setminus\{e\}}(k)$ y $P_{G_e}(k)$. Consideremos las posibles coloraciones de $G \setminus \{e\}$ con esos k colores. Podemos hacer la partición:

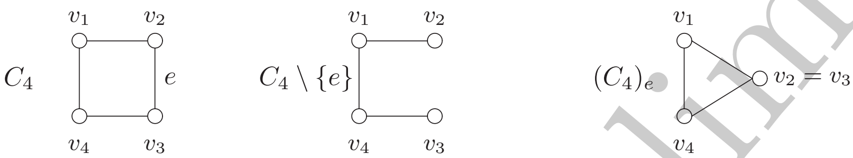
$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones}\\ \text{de } G\setminus\{e\}\\ \text{con } k \text{ colores}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{e\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan colores}\\ \text{distintos en los extremos de } e\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{Coloraciones de } G\setminus\{e\} \text{ con } k\\ \text{colores que llevan el mismo}\\ \text{color en los extremos de } e\end{array}\right\}.$$

Pero ahora observemos que una coloración de $G\setminus\{e\}$ que lleve colores distintos en los extremos de e es una coloración válida para G (la diferencia entre G y $G \setminus \{e\}$ es que en G tenemos una prohibición más, la que impone la arista e; pero una coloración de éstas respeta esta prohibición). Y una coloración de $G \setminus \{e\}$ que lleve el mismo color en los extremo de e es también una coloración válida para G_e, pues en este último grafo los dos vértices son en realidad el mismo. Así que

Lo que hace que esta identidad sea realmente útil es que tanto G_e como $G \setminus \{e\}$ tienen una (o más) aristas menos que G. Repitiendo este proceso (para G_e y $G \setminus \{e\}$), a lo sumo tantas veces como aristas tiene G, llegaríamos a escribir el polinomio cromático de G como suma (o resta) de polinomios cromáticos de grafos vacíos con diversos números de vértices (recordemos que en cada paso vamos eliminando aristas y también vértices), que sabemos calcular. En la práctica muchas veces no tendremos que llegar a eliminar todas las aristas, porque en el camino obtendremos grafos cuyos polinomios cromáticos nos sean conocidos.

Ejemplo 8.5.6 *Ahora podremos calcular el polinomio cromático del grafo C_4.*

Los grafos que debemos considerar son

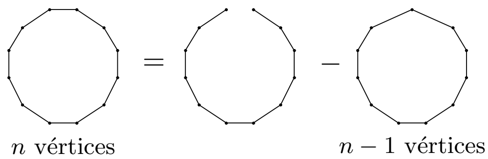


así que, siguiendo los pasos del algoritmo,

$$P_{C_4}(k) = P_{L_4}(k) - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)\,,$$

que es un polinomio que se anula en $k = 0$ y en $k = 1$, pero no en $k = 2$, por lo que podremos deducir que $\chi(C_4) = 2$. ♣

Ejemplo 8.5.7 *¿Y para un C_n general?*



Para describir los pasos del algoritmo, a partir de ahora escribiremos "igualdades" entre grafos, cuando queramos expresar que los polinomios cromáticos correspondientes cumplen esas igualdades. En el primer paso, escribimos el polinomio cromático de C_n como el de L_n (que conocemos) menos el de C_{n-1}. Pero a este último se le puede aplicar de nuevo el algoritmo, y se podrá escribir como el de un L_{n-1} menos el de un C_{n-2}.

Repitiendo este proceso, obtenemos

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = P_{L_n}(k) - \big[P_{L_{n-1}}(k) - P_{C_{n-2}}(k)\big] \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} k(k-1)^{n-j} + (-1)^k P_{C_{n-k}}(k) \\ &\;\vdots \\ &= \sum^{n-3} (-1)^{j+1} k(k-1)^{n-j} + (-1)^{n-3} P_{C_3}(k) \end{aligned}$$

Pero hay un truco (casual) que nos permite obtener una expresión más manejable para el polinomio cromático de C_n. Reescribamos el resultado de aplicar el algoritmo la primera vez de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = (k-1+1)(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\ &= (k-1)^n + (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow P_{C_n}(k) - (k-1)^n &= (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \end{aligned}$$

Pero observamos que esta relación entre el polinomio cromático de C_n y el de C_{n-1} se cumplirá también para cada n más pequeño. Así que, iterando la relación de recurrencia,

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) - (k-1)^n &= (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = -\left[P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}\right] \\ &= (-1)^2\left[P_{C_{n-2}}(k) - (k-1)^{n-2}\right] \\ &\;\;\vdots \\ &= (-1)^{n-3}\left[P_{C_3}(k) - (k-1)^3\right]. \end{aligned}$$

Ya hemos llegado a un grafo cuyo polinomio cromático es conocido, $P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ y, por tanto,

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^{n-3}\left[k(k-1)(k-2) - (k-1)^3\right] = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)\,,$$

una expresión mucho más manejable y que nos permite obtener el valor del número cromático, que ya conocíamos, de C_n. Si n es par, el polinomio cromático no se anula en $k=2$, y si n es impar, sí se anula en $k=2$, pero no en $k=3$. Así que, para $n \geq 1$, $\chi(C_{2n})$, mientras que $\chi(C_{2n+1}) = 3$. ♣

Otro procedimiento para calcular P_G ("Añadir aristas")

En realidad éste no es un algoritmo nuevo, sino simplemente otra forma de enfocar el conocido de "quitar aristas". Recordamos que en éste último obteníamos

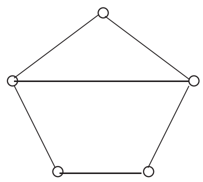
$$P_G(k) = P_{G\setminus\{e\}}(k) - P_{G_e}(k).$$

Por lo tanto,

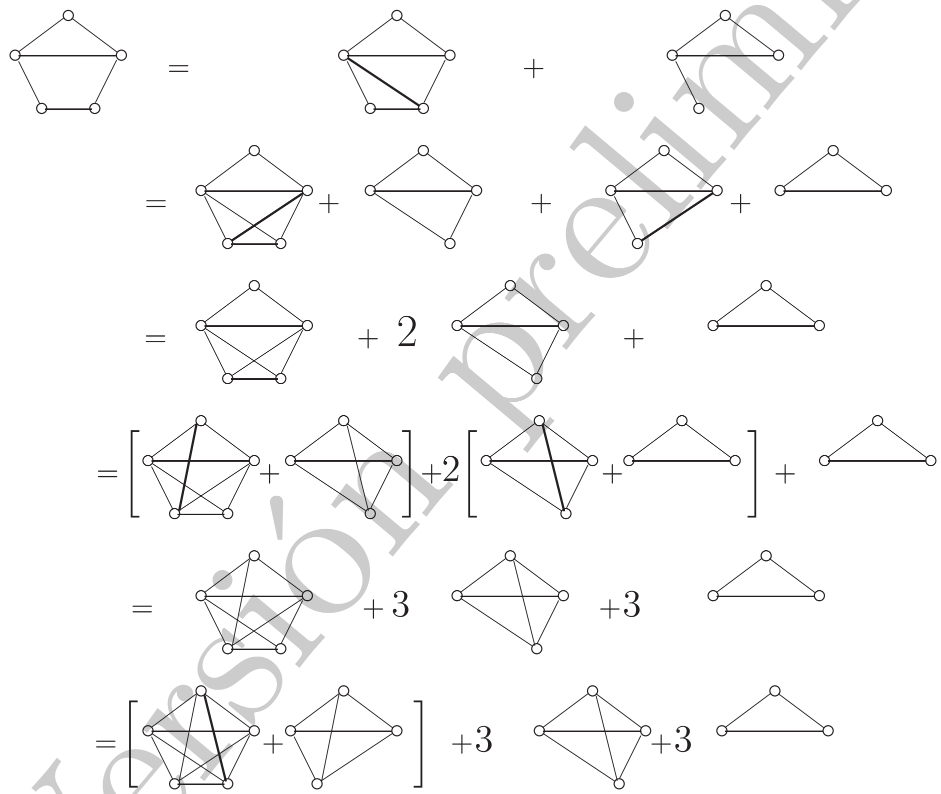
$$P_{G\setminus\{e\}}(k) = P_G(k) + P_{G_e}(k).$$

Pero esto nos dice que si tenemos un cierto grafo (en la notación de arriba, $G \setminus \{e\}$), su polinomio cromático se puede escribir como la suma del polinomio cromático del grafo que obtenemos añadiéndole a $G\setminus\{e\}$ una cierta arista e (que, por supuesto, es una que no está en el grafo) más el del grafo que resulta de identificar los vértices de e.

EJEMPLO 8.5.8 *Calculemos el polinomio cromático del grafo G siguiente:*



Para llegar al grafo vacío necesitaría quitar 6 aristas, mientras que añadiendo sólo cuatro tengo grafos completos; así que parece razonable utilizar el algoritmo de "añadir aristas".

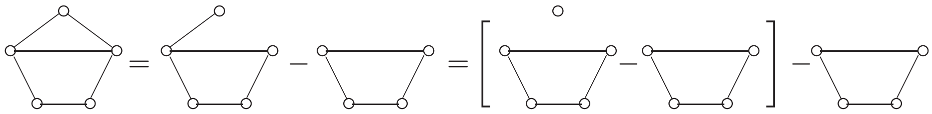


Es decir, que

$$P_G(x) = P_{K_5}(x) + 4P_{K_4}(x) + 3P_{K_3}(x) = x(x-1)(x-2)(x^2-3x+3).$$

Obsérvese, sin embargo, que el algoritmo de "quitar aristas" es mucho más rápido en este caso (porque no necesitamos llegar a grafos vacíos, por el camino encontramos grafos conocidos):

O bien:



En este último paso, utilizamos que el polinomio cromático de un grafo con dos componentes conexas es el producto de los polinomios de cada una de ellas, y podemos terminar:

$$P_G(x) = xP_{C_4}(x) - 2P_{C_4}(x).$$

Claro, que todavía podíamos haber calculado el polinomio cromático de manera más sencilla; porque el grafo es un triángulo y un cuadrado que comparten una arista. Así que

$$P_G(x) = \frac{P_{C_3}(x)P_{C_4}(x)}{x(x-1)}.$$

♣

Ejemplo 8.5.9 *¿Cuál es la probabilidad de que en el número premiado en un sorteo ordinario de la Lotería Nacional no aparezcan números iguales consecutivamente?*

Éste es un ejemplo típico de contar listas con prohibiciones: cada número del sorteo es una lista de seis posiciones, con repetición permitida, formada con los símbolos $\{0, 1, \ldots, 9\}$. En el lenguaje de las coloraciones de grafos, tenemos una paleta de colores $S = \{0, \ldots, 9\}$ y queremos colorear ciertos grafos con seis vértices. Para contar el número de resultados posibles, colorearemos con esos colores un grafo vacío con seis vértices (porque no hay restricciones):

$$\#\{\text{resultados posibles}\} = P_{N_6}(10) = 10^6\,.$$

Si ahora queremos contar cuántos de esos resultados cumplen las condiciones del enunciado, lo que tendremos que colorear es un grafo lineal con 6 vértices:

$$\#\{\text{resultados que queremos contar}\} = P_{L_6}(10) = 10 \times 9^5\,.$$

Así que la probabilidad pedida será $p = (10 \times 9^5)/(10^6) \approx 0{,}595$.

Por supuesto, podríamos haber obtenido este resultado contando directamente el número de listas, sin utilizar coloraciones de grafos. Pero si complicáramos un poco el problema, exigiendo por ejemplo que el número premiado tampoco empezara y acabara con el mismo número, la cuenta directa se complicaría. Sin embargo, con las herramientas de coloraciones, el planteamiento sería el mismo: ahora tendríamos que colorear un grafo C_6 (la prohibición extra se traduciría en una arista entre los vértices primero y último). Y así,

$$\#\{\text{ resultados que queremos contar}\} = P_{C_6}(10) = (10-1)^6 + (-1)^6(10-1) = 9^5 + 9\,,$$

de manera que la probabilidad sería, en este caso, 0,0596. ♣

8.5.2. Coeficientes del polinomio cromático

Iniciamos aquí un breve estudio de los coeficientes del polinomio cromático de un grafo que, como el lector podrá suponer, encierran mucha información sobre el grafo en cuestión.

La primera observación es que $P_G(k)$ es, realmente, un polinomio en k. Basta recordar el algoritmo de cálculo del polinomio cromático: al final del procedimiento, escribimos $P_G(k)$ como suma (o resta) de polinomios cromáticos de grafos vacíos N_t, para varios valores de t. Es decir, como suma (o resta) de términos del tipo:

$$A_t\, k^t,$$

donde A_t es el número que da cuenta de las veces que aparece (con signos + ó −) el grafo vacío N_t en el resultado del algoritmo.

Sin argumentos adicionales, hemos comprobado también que los coeficientes del polinomio cromático *son siempre números enteros*. Si queremos una demostración más formal, podemos proceder por inducción, otra manera de expresar el método constructivo descrito antes. Supongamos que $P_G(k)$ es un polinomio en k con coeficientes enteros para todo grafo con $|A| \leq m$. Sea H un grafo cualquiera con $m+1$ aristas. Si e es una arista de H, sabemos que

$$P_H(k) = P_{H\setminus\{e\}}(k) - P_{H_e}(k)\,,$$

donde el grafo $H \setminus \{e\}$ tiene m aristas, mientras que H_e tiene, a lo sumo, m aristas. Por inducción, los dos términos de la derecha son polinomios en k con coeficientes enteros, así que su resta también lo será. El lector podrá comprobar con facilidad, con argumentos análogos, que el grado del polinomio coincide con el número de vértices del grafo y que el coeficiente de ese monomio de grado máximo es 1.

Pero vayamos con un estudio sistemático. Consideremos el polinomio cromático de un grafo $G = (V, A)$ que tiene n vértices y m aristas:

$$P_G(k) = \sum_j b_j\, k^j\,.$$

Los números b_j son, como ya hemos visto, enteros. A partir de ellos vamos a obtener mucha información sobre el grafo G, pero conviene advertir que no tanta como para caracterizarlo, pues pueden existir dos grafos no isomorfos con el mismo polinomio cromático. Por ejemplo, los grafos G_1 y G_2 que dibujamos a continuación

G_1  G_2

no son isomorfos y, sin embargo, ambos se pueden colorear con k colores del mismo número de formas, $k^2\,(k-1)^3$.

digamos que tiene dos componentes conexas, su polinomio cromático P_G será el producto de los polinomios cromáticos de sus dos componentes; ninguno de estos dos polinomios tiene término independiente, así que el la menor potencia de P_G podrá ser k^2. Lo que supone que $P'_G(0) = 0$, es decir, el coeficiente b_1 también es nulo.

En general, si $G_1, \dots, G_t$, $t \geq 2$, son las componentes conexas de un grafo G, entonces

$$P_G(k) = \underbrace{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k) \cdots P_{G_t}(k)}_{\text{todos con término independiente nulo}} = (\cdots + b\,k^{t+1} + a \underbrace{k^t}_{\text{menor orden}}),$$

y por tanto las primeras $t-1$ derivadas, evaluadas en 0, son nulas,

$$P_G^{(j)}(0) = 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq j \leq t-1.$$

Es decir, los coeficientes $b_1, \dots b_{t-1}$ son nulos, donde $t \geq 2$ es el número de componentes conexas que tiene G.

2) Si G no es un polinomio nulo, es decir, tiene alguna arista, entonces la suma de los coeficientes de su polinomio cromático vale siempre 0, porque

$$\sum_j b_j = P_G(1) = \#\{\text{formas de colorear } G \text{ con 1 color}\} = 0\,.$$

3) Para obtener información sobre el grado del polinomio y sobre los coeficientes de los grados altos, aplicaremos el principio de inclusión/exclusión. Recordemos que colorear con k colores un grafo G de n vértices era lo mismo que formar $n-$listas con k símbolos y con las restricciones que señalen las aristas.

Llamemos m al número de aristas (esto es, el número de prohibiciones). Definimos los conjuntos

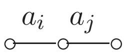
$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{listas con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } 1\}\,,\\
A_2 &= \{\text{listas con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } 2\}\,,\\
&\ \vdots\\
A_m &= \{\text{listas con el mismo símbolo en las posiciones que indique la arista } m\}\,.
\end{aligned}$$

Pasando al complementario,

$$\#\text{ listas legales} = \#\text{ total de listas} - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|.$$

Vamos a evaluar el tamaño de todas las posibles intersecciones. El número total de listas es, por supuesto, k^n, y para calcular $|A_i|$, para cada i, basta darse cuenta de que el símbolo de una posición está ya fijado, así que sólo hay que decidir los símbolos de las otras $n-1$ posiciones. Por tanto, para cada $i = 1, \dots, m$

Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos pares de vértices a los que llegan a_i y a_j $\longrightarrow |A_i \cap A_j| = k^{n-4+2} = k^{n-2}$

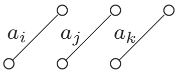


Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los tres vértices a los que llegan a_i y a_j $\longrightarrow |A_i \cap A_j| = k^{n-3+1} = k^{n-2}$

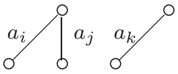
En ambos casos (¡es una casualidad!) obtenemos k^{n-2}; por tanto,

$$|A_i \cap A_j| = k^{n-2}\,.$$

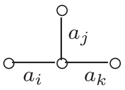
Las dificultades aparecen al contar el tamaño de las intersecciones tres a tres (tres aristas). Hay cinco configuraciones posibles:



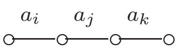
Quedan $n-6$ vértices libres y hay que elegir tres colores para los tres pares de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\longrightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-6+3} = k^{n-3}$



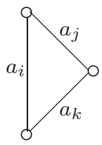
Quedan $n-5$ vértices libres y hay que elegir dos colores para los dos conjuntos de vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\longrightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-5+2} = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\longrightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4+1} = k^{n-3}$



Quedan $n-4$ vértices libres y hay que elegir un color para los dos vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\longrightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-4+1} = k^{n-3}$



Quedan $n-3$ vértices libres y hay que elegir un color para los vértices a los que llegan a_i, a_j y a_k $\longrightarrow |A_i \cap A_j \cap A_k| = k^{n-3+1} = k^{n-2}$

Esta última configuración es la que menos vértices involucra y, como vemos, es especial. El polinomio cromático se podrá escribir, con la información de que disponemos hasta ahoracomo

$$\begin{aligned}
P_G(k) &= k^n - \Big[\sum_i |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots\Big] \\
&= k^n - \left\{\binom{m}{1} k^{n-1} - \binom{m}{2} k^{n-2} + \left[\binom{m}{3} - \#\text{triángulos}\right] k^{n-3} + (\#\ \text{triángulos})\, k^{n-2} + \cdots\right\} \\
&= k^n - m\, k^{n-1} + \left[\binom{m}{2} - \#\ \text{triángulos}\right] k^{n-2} + \cdots
\end{aligned}$$

Proposición 8.14 *Sea G un grafo con r componentes conexas, n vértices y m aristas. Entonces,*

(a) Si G no tiene vértices aislados, entonces $2r \leq n$.

(b) Si G no tiene vértices aislados y además $m \geq 4$, entonces $r \leq n-3$.

Demostración. La parte (a) es trivial, porque cada componente conexa tendrá, como mínimo, dos vértices. Para la segunda parte,

- si $n \geq 6$, se cumple que $n/2 \leq n-3$, y la parte (a) nos permite concluir el resultado.
- Si $n = 5$ y hubiera tres componentes conexas, tendríamos un vértice aislado; así que necesariamente $r \leq 2$.
- Si $n = 4$, podemos tener, sin quedarnos con vértices aislados, una o dos componentes conexas (no más). Pero como $m \geq 4$, sólo cabe la posibilidad de tener una componente conexa. ■

Apliquemos este resultado a probar que las configuraciones que involucran a cuatro aristas o más no pueden afectar al coeficiente de k^{n-2}. Consideremos un grafo G con n vértices y un conjunto de t aristas suyas, $A_1, \dots, A_l$, con $l \geq 4$. Asignemos k colores a los vértices de G sin más restricción que la de que los vértices de cada arista A_j, para $j = 1, \dots, l$ reciban el **mismo** color (éstas son las coloraciones que intentamos contar en el principio de inclusión/exclusión).

Los A_j involucrarán un cierto número de vértices, digamos t, y formarán un subgrafo H con a lo sumo r componentes, donde $r \leq t-3$, por la proposición anterior. Para colorear G de esta manera, colorearemos primero los vértices de H: nótese que todos los vértices de cada componente conexa de H reciben el mismo color, así que habrá k^r posibles formas de hacerlo. Una vez hecho esto, coloreamos los restantes $n-t$ vértices de G sin restricciones. El número total de coloraciones así obtenidas será k^p, donde

$$p = (n-t) + r \leq n - t + (t-3) = n-3\,.$$

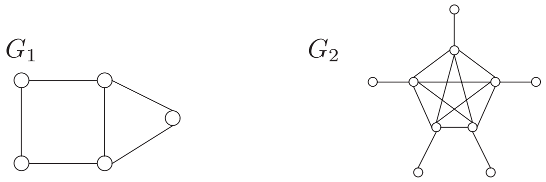
Así que estas coloraciones no pueden aportar nada a los términos del polinomio cromático de grado $\geq n-2$. El lector podrá convencerse de este argumento escribiendo con detalle, por ejemplo, el caso de $l = 4$ aristas.

Ahora ya podemos escribir, completamente convencidos, que, para un grafo G con n vértices, m aristas y polinomio cromático $\sum b_j\, k^j$,

- El grado del polinomio cromático es n,

EJERCICIOS.

8.5.1 *Calcular los números y los polinomios cromáticos de los siguientes grafos:*



Sugerencia. Para G_2, colorear primero el grafo completo con cinco vértices.

Solución. $P_{G_1}(k) = k(k-1)(k-2)\,[k^2-3k+3]$, $\quad \chi(G_1)=3$. $\quad P_{G_2}(k) = k(k-1)^6(k-2)(k-3)(k-4)$, $\quad \chi(G_2)=5$.

8.5.2 *Sea $G = N_n$ el grafo vacío con n vértices. Llamemos $d(j)$ el número de formas de colorear N_n con j colores* usándolos todos*. Verificar que $d(j) = j!\,S(n,j)$ y concluir que*

$$k^n = \sum_{j=1}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1)\,S(n,j)\,.$$

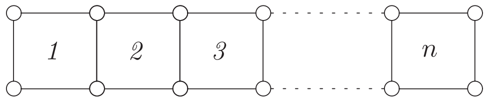
un resultado que ya hemos visto en varias ocasiones (revísese el ejemplo 3.3.4).

Sugerencia. Recordar que colorear un grafo con un cierto número de colores usándolos todos es lo mismo que partir el conjunto de vértices en ese mismo número de bloques no vacíos. Para la segunda parte, clasificar todas las posibles coloraciones según el número de colores que realmente se usen.

8.5.3 *Hallar el polinomio cromático del grafo bipartido completo $K_{r,s}$, donde $r \geq 1$ y $s \geq 1$.*

Solución. $P_{K_{r,s}}(k) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}(m+n)!\binom{k}{m+n}\,S(m,r)\,S(n,s)\,.$

8.5.4 *Calcular el polinomio cromático del grafo E_n=(Escalera)$_n$, que tiene $2n+2$ vértices y $3n+1$ aristas:*



Solución. $P_{E_n}(k) = \frac{[P_{E_1}(k)]^n}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} = k(k-1)(k^2-3k+3)^n\,.$

8.5.5 *Para cada par de números naturales n, m, ($n \geq 2$, $m \geq 2$), construimos el grafo $\mathcal{G}_{n,m}$ que tiene $n+m$ vértices $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ con las $n+m-2$ aristas*

Solución. $P_{\mathcal{G}_{n,m}}(k) = k(k-1)^{n+m-3}(k-2)(k-3)\,.$

8.5.6 *Probar la siguiente generalización de los resultados sobre grafos que son unión de dos que comparten un vértice o una arista: si un grafo G está compuesto por dos subgrafos H_1 y H_2 que comparten un grafo completo con n vértices, entonces*

$$p_G(k) = \frac{p_{H_1}(k)\,p_{H_2}(k)}{p_{K_n}(k)}\,.$$

Los casos vistos anteriormente corresponden a $n = 1$ y $n = 2$. Comprobar que la conclusión no es cierta, en general, si la intersección de los dos subgrafos no es un grafo completo.

Sugerencia. Úsense los mismos argumentos que en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Solución. Considérese, como contraejemplo para la segunda parte, un C_4 como grafo G, y como subgrafos dos grafos lineales con dos vértices que comparten los vértices opuestos del cuadrado.

8.5.7 *¿Cuántas listas distintas (con repetición permitida) de longitud 7 se pueden formar con los cuatro símbolos $\{a, b, c, d\}$ de manera que en posiciones consecutivas aparezcan símbolos distintos, y que además el símbolo de la posición central sea distinto del símbolo en la posición primera y del símbolo en la posición última?*

Sugerencia. Construir el grafo asociado y calcular su polinomio cromático.

Solución. $(3^4 + 3)^2/4 = 1764.$