...CIÓN DE DATOS:

...RODUCCIÓN: Modelo de transmisión fiable y eficiente.

...ente → Canal → Receptor

...:

...eto fuente: $A_F = \{0, 1\}$ (fuente binaria)

$A_F = \{a, b, c, d\}$

...r de probabilidades: $\vec{P} = \{0{,}7,\ 0{,}1,\ 0{,}1,\ 0{,}1\}$

simétricas: → $\vec{P} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

... IDEALES: sin errores.

...aracterizados por un alfabeto de canal (A_C: conjunto de símbolos que puede transmitir el canal)

... $\{a, b, c, d\}$

...blema: $A_C = \{0, 1\}$

... y A_C son distintos $\Rightarrow$ codificación de fuente.

...uente:

...nte → Codificador de fuente → canal (ideal) → decodificador de fuente →

$A_C = \{0, 1\}$

→ Receptor

..., c, d}

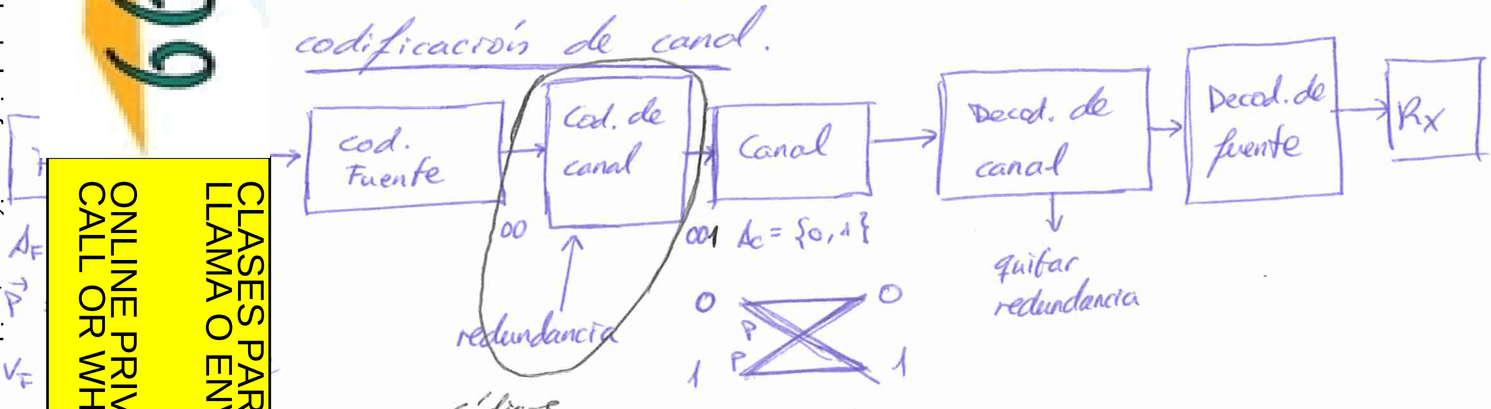
...$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

a → 00
b → 01
c → 10
d → 11

00 → a
01 → b
10 → c
11 → d

realidad no existen canales ideales: los canales cometen

conseguir fiabilidad, si el canal no es ideal, se debe codificación de canal.

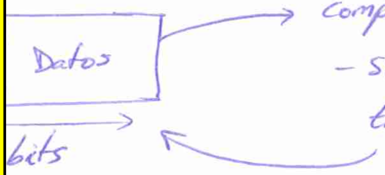


fuente
empo

códigos lineales:
- códigos cíclicos

Canal simétrico, se comporta de igual manera para todos los elementos.

ARQ:

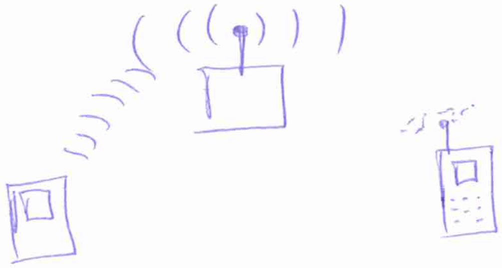


comprueba la trama:
- si detecta fallos le pide al transmisor que la repita.

ACK: asentimiento
+
−

"~~Protocolos~~ MAC" (Control de Acceso al Medio)

wifi



Problema → colisión.

CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE LA INFORMACIÓN.

ENTROPÍA PROPIEDADES.

1. Entropía.

Sea X una V.A. con $P_X = \{P_1, P_2, \dots P_n\}$

Se define la entropía de X como:

$$\boxed{H_s(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \log_s \frac{1}{P_i}}$$

$s = 2 \Rightarrow H_2() : \text{bits}$

$$\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$$

Ejemplo: Sea X, $P_X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\}$

$H_2(x)$?

$$\frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 + \left(\frac{1}{8} \cdot \log_2 8 \right) \cdot 2 = 1{,}75 \text{ bits.}$$

... equiprobable es el que tiene mayor incertidumbre.

lades de la entropía:

$H(x) \geq 0$. Son positivas por definición.

Determinista.

$$H(x) = 0 \Rightarrow \vec{P} = \{1\}$$

) $\boxed{H(x) \leq \log n} \iff H_{max} = \log n$

La entropía es máxima si $P_i = \frac{1}{n} \quad \forall i$.

(símbolos equiprobables)

) Propiedad de partición:

Sea X una V.A y sea X_1, X_2 dos particiones en

de cumpla que:

$$\boxed{) = H(p) + p \cdot H(X_1) + (1-p) \cdot H(X_2)}$$

siendo p, la masa de probabilidad de X_1.

$$\vec{P}_x = \Big\{ \overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{X_1}, \underbrace{\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}}_{X_2}}^{X} \Big\}$$

o porque X_1 solo depende de un valor.

$$P_{X_1} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

$\frac{1}{2}$

$$x) = H_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot H(X_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H_2(X_2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{2 \text{ bits.}}$$

$$\frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2} \Big\} = \Big\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \Big\}$$

$$) = \log_2 4 = 2 \text{ bit.}$$

$$) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.}$$

Entropía conjunta. $H(X,Y)$

Sea X, Y dos V.A con vector de probabilidad:

$P_x = \{P_{x1}, P_{x2}, \dots P_{xn}\}$, $P_y = \{P_{y1}, P_{y2}, \dots P_{yn}\}$

$H(X,Y) \equiv$ es una medida de la incertidumbre que existe a

... entre X e Y.

$$\boxed{H(X,Y) = \sum_i \sum_j P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}}$$

... probabilidad conjunta.

$P(X = x_i, Y = y_j)$

Entropía condicionada. $H(X/Y)$

Sea X e Y dos V.A. con vectores de probabilidad.

$P_x = \{P_{x1}, P_{x2}, \dots P_{xn}\}$, $P_y \{P_{y1}, P_{y2}, \dots P_{yn}\}$ Se define la ... condicionada:

$H(X/Y)$: como la incertidumbre que existe sobre X conocido Y.

$H(X/Y) \leq H(X)$

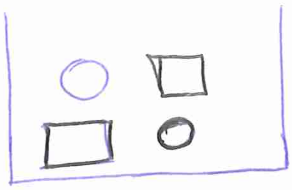
$$\boxed{H(X/Y) = \sum_j H(X/Y = y_j) \cdot P(Y = y_j)}$$

$$H(X/Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i / Y = y_j) \cdot \log \frac{1}{P(X = x_i / Y = y_j)}$$

...RMA:

$$\boxed{H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)}$$

Experimento: una extracción sin restitución.



…tidumbre sobre la forma?

… $= \{ \text{esfera}, \text{cubo} \}$

…$_F = \{ \frac{1}{2} , \frac{1}{2} \}$

…$F) = \log_2 2 = 1 \text{ bit}.$

…uanta incertidumbre existe sobre la forma de la segunda …ón si la 1º era cubo?

… $= \{ \text{esfera}, \text{cubo} \}$ $\qquad H(F') = H_2\left(\frac{2}{3}\right) =$

…$' = \{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \}$ $\qquad = \frac{2}{3} \cdot \log_2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \log_2(3) = 0{,}918 \text{ bits}.$

…ue incertidumbre existe sobre el color y la forma de la …ccion?

…(C,F)? $\qquad H_2(C,F) = \sum_i \sum_j P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}$

… $n, v \}$

…$= \{ \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \}$

…onjunta: $\rightarrow H(C,F)$

$$p(X=x_i, Y=y_j) = p(X=x_i / Y=y_j) \cdot p(Y=y_j)$$

…les

…$c=n, F=e) = 1/4$ $\qquad p(c=v, F=e) = \frac{1}{4}$

…$c=n, F=c) = 2/4$ $\qquad p(c=v, F=c) = 0$ $\qquad 0{,}75 \text{ bits}$

…$(C,F) = \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 + \frac{2}{4} \log_2 \frac{4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = \underline{1{,}5 \text{ bits}}$

la incertidumbre existe sobre el color si se sabe forma es cubo?

$$/F=c) = 0$$

'' '' '' forma es esfera?

$$/F=e) = \sum_i p(C=c_i/Y=y_j)\cdot \log \frac{1}{p(C=c_i/Y=y_j)} =$$

$$(C=n/F=e)\cdot \log \frac{1}{p(C=n/F=e)} + p(C=v/F=e)\cdot \log \frac{1}{p(C=v/F=e)} =$$

$$\log_2 2 + \frac{1}{2}\cdot \log_2 2 = \log_2 2 = \underline{\underline{1 \text{ bit.}}}$$

a incertidumbre existe sobre el color si se sabe la forma?

$$F) = \sum_j H(C/F=F_j)\cdot p(F=F_j) =$$

$$= \underbrace{H(C/F=e)}_{\log_2 2}\cdot \underbrace{p(F=e)}_{1/2} + \underbrace{H(C/F=c)}_{0}\cdot p(F=c) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \text{ bits.}}}$$

la de la cadena.

$$\boxed{(X,Y) = H(X/Y) + H(Y) = H(Y/X) + H(X)}$$

si X e Y son independientes: $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

formación mutua

n X, Y 2 v.a. se define la información mutua entre

$$I(X;Y) = \underbrace{\underbrace{H(X)}_{\text{incertidumbre sobre } X} - \underbrace{H(X/Y)}_{\text{incertidumbre que queda de } X \text{ conocido } Y.}}_{\text{incertidumbre que se elimina de } X \text{ por conocer } Y.} = H(Y) - H(Y/X)$$

Una variable aporta información sobre otra cuando

...na variable aleatoria aporta información sobre otra
...uce su incertidumbre.

...de problemas:

...a 4:

X: "Legalidad del dado"

$A_X = \{ l, nl \}$

$P_X = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

Y: "Resultado de 1 tirada"

$A_Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$P_Y = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15} \right\}$

... incertidumbre sobre X conocido Y

... ≡ cuanta incertidumbre se elimina sobre la legalidad del dado
...ce el resultado de la 1 tirada.

$$\ldots) = H(X) - \underbrace{H(X/Y)}_{p(X/Y)} = H(Y) - \underbrace{H(Y/X)}_{p(Y/X)} = \underbrace{H(Y)}_{P_Y} - H(Y/X)$$

$$\ldots = 1) = p(y=1/x=l) \cdot p(x=l) + p(y=1/x=nl) \cdot p(x=nl)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{18} + \frac{2}{9} = \frac{6}{18} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\ldots(y=2) = p(y=2/x=l) \cdot p(x=l) + p(y=2/x=nl) \cdot p(x=nl) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}/5 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{15}}$$

...H(Y):

$$\ldots(Y) = \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 + \left(\frac{2}{5} \log_2 \frac{15}{2} \right) \cdot \underbrace{5}_{\text{resto de los números}} = 0{,}528 + 5{,}814 = 6{,}342$$

incertidumbre máxima → son independientes

$$= \sum_i H(Y/x=x_i) \cdot p(X=x_i) = \underbrace{H(Y/x=l)}_{\log_2 6} \cdot \underbrace{p(x=l)}_{\frac{2}{3}} +$$

$$\underbrace{/x=nl)}_{\text{...rla}} \cdot \underbrace{p(x=nl)}_{\frac{1}{3}} =$$

$$\log_2 6 \cdot \frac{2}{3} + 1{,}69 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}72 + 0{,}56\hat{3} =$$

$$= \boxed{2{,}283}$$

$H(Y/x=nl)$:

$$=nl) = p(y=1/x=nl) \cdot \log \frac{1}{p(y=1/x=nl)} +$$

$$+ \left(p(y=2/x=nl) \cdot \log \frac{1}{p(y=2/x=nl)} \right) \cdot 5 =$$

$$\log_2 \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{15} \cdot \log_2 15 \right) \cdot 5 = 0{,}39 + 1{,}3 = \boxed{1{,}69}$$

$$H(Y) - H(Y/X) = 6{,}342 - 2{,}283 = \boxed{4{,}059}$$

(X/Y')? $\quad Y'$: Resultado de 2 tiradas.

$$= \{ (1,1), (1,2), \dots (1,6)$$
$$(2,1), (2,2) \dots$$
$$\vdots$$
$$(6,1), \dots \quad (6,6) \}$$

$$\{ (1,1), \quad (1,x), (x,1), \quad (x,x) \}$$

$$(1,1) \to \frac{1}{9} \qquad (x,1) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{45} \qquad (x,x) \to \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15}$$

...a información que aporta una v.a por sí sola es su ...re

10.

c : "Color"

$A_c = \{v, r, n\}$

$P_c = \left\{\frac{2}{38}, \frac{18}{38}, \frac{18}{38}\right\}$

$$H_2(c) = H_2\left(\frac{2}{38}, \frac{18}{38}, \frac{18}{38}\right) = \frac{2}{38}\cdot\log_2\frac{38}{2} + 2\cdot\left(\frac{18}{38}\cdot\log_2\frac{38}{18}\right) = \boxed{1,24 \text{ bits}}$$

$H(C,N)$

N: Nº

$A_N = \{0, \dots, 37\}$

$P_N = \left\{\frac{1}{38}, \dots, \frac{1}{38}\right\}$

un solo elemento ⇓ (máxima)

$$= \underbrace{H(C/N)}_{0} + \underbrace{H(N)}_{\log_2 38} = \underbrace{H(N/C)}_{\text{Difícil de calcular}} + \underbrace{H(C)}$$

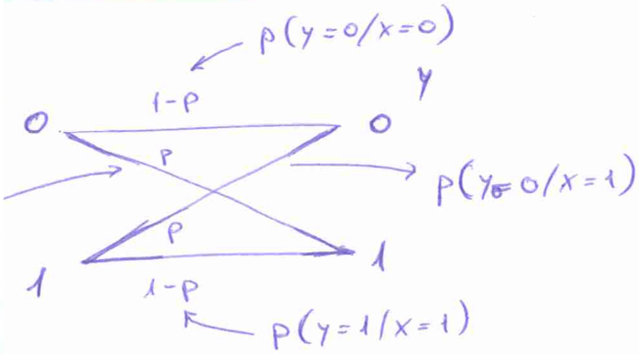
...l ...or (la duda es 0) porq... Nº

$$H(C,N) = \log_2 38 = 5,25 \text{ bits}$$

$$H(N/C) = \underbrace{H(C,N)}_{\text{apartado b}} - \underbrace{H(C)}_{\text{apartado a}}$$

$$...c) = 5,25 - 1,24 = \boxed{4,01 \text{ bits}}$$

…ABILIDADES DE TRANSICIÓN.



…de transmisión:

$$Q_{r\times s} = \begin{pmatrix} p(y=1/x=1) & \cdots & p(y=s/x=1) \\ \vdots & & \\ p(y=1/x=r) & \cdots & p(y=s/x=r) \end{pmatrix}$$

nº salidas.

$$Q_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

…ada fila de Q suma 1.

…de probabilidades conjuntas:

$$\begin{pmatrix} p(x=1, y=1) & \cdots & p(x=1, y=s) \\ \vdots & & \\ p(x=r, y=1) & \cdots & p(x=r, y=s) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow p(x=1) \\ \\ \rightarrow p(x=r) \end{matrix}$$

$\downarrow p(y=1)$ … $\downarrow p(y=s)$

suma de todos los valores de la matriz es 1.

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

$$\ldots = 1, y = 1) = p(y=1/x=1) \cdot p(x=1)$$

$$\ldots_{ij} = Q \cdot \text{ multiplicando cada fila de } Q \text{ por } p(x = x_i)$$

9.

$$\ldots_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow p(x=1) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \\ \rightarrow p(x=2) = \frac{1}{3} \\ \rightarrow p(x=3) = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$p(y=1) = \frac{1}{3} \qquad p(y=2) = \frac{1}{3} \qquad p(y=3) = \frac{1}{3}$$

...opía conjunta → ¿$H(x,y)$?

$$\ldots) = H_2\left(\frac{7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{4}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{7}{24}\right) =$$

$$\ldots + 4 \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot \log_2(24)\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = 1{,}37 + 0{,}76 + 0{,}5 = \boxed{2{,}63 \text{ bits}}$$

$$\ldots H(Y) = \log_2 3 = \boxed{1{,}58 \text{ bits}}$$

como la variable Y es indep. su entropía es máxima.

$$H(X/Y) = \underbrace{H(X,Y)}_{\text{apartado a}} - \underbrace{H(Y)}_{\text{apartado b}} = 2{,}63 - 1{,}58 = \boxed{1{,}05 \text{ bits}}$$

enero 2014. (dictado)

la matriz de transmisión:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bilidades de los elementos de entrada: $P_X = \left\{ \frac{1-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2} \right\}$

(X/Y) ?

emos la matriz de probabilidades conjuntas.

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q\cdot\frac{\alpha}{2} & p\cdot\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\frac{\alpha}{2} & q\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

ando la regla de la cadena:

$$) = \underbrace{H(X/Y)} + H(Y)$$

$$/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

ulamos $H(Y)$: cada probabilidad de Y se obtiene con la suma

columna de P_{ij}

$$=1) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$=2) = q\cdot\frac{\alpha}{2}$$

$$=3) = 2p\cdot\frac{\alpha}{2}$$

$$P(y=4) = q\cdot\frac{\alpha}{2}$$

$$P(y=5) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\overbrace{\qquad}^{Y_1\ (1-\alpha)} \qquad \overbrace{\qquad}^{Y_2\ (\alpha)}$$

$$= H_2\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{q\cdot\alpha}{2}, p\cdot\alpha, q\cdot\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \underbrace{H_2(1-\alpha)} + (1-\alpha)\cdot \underbrace{H(Y_1)}_{①} + \alpha\cdot \underbrace{H(Y_2)}_{②} =$$

$$H_2(1-\alpha) = H_2(1-\alpha, \alpha) = H_2(\alpha)$$

$$= H_2(\alpha) + (1-\alpha)\cdot 1 + \alpha\cdot H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right)$$

$$① = H_2\left(\frac{\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}, \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}\right) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.}$$

$$② = H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right).$$

$$\begin{cases} \frac{q}{2} + p + \frac{q}{2} = 1 \\ p = 1-q \end{cases} \longrightarrow \frac{q}{2} + (1-q) + \frac{q}{2} = 1$$ Queda en función de q.

...nos $H(X,Y)$!

$$(X,Y) = H\left(\underbrace{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}}_{Z_1\ (1-\alpha)}, \underbrace{q\cdot\frac{\alpha}{2}, p\cdot\frac{\alpha}{2}, p\cdot\frac{\alpha}{2}, q\cdot\frac{\alpha}{2}}_{Z_2\ (\alpha)}\right) =$$

$$1-\alpha) + (1-\alpha)\cdot H(Z_1) + \alpha\cdot H(Z_2)$$

$$(\alpha) + (1-\alpha)\cdot \log_2 2 + \alpha\cdot H\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) =$$

$$\boxed{(\alpha) + (1-\alpha) + \alpha\cdot H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right)}$$

Solución

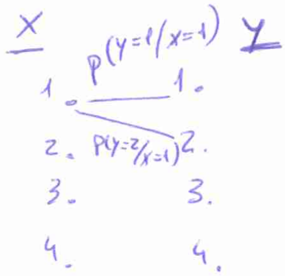
$$(X,Y) - H(Y) = \left[\cancel{H_2(\alpha)} + \cancel{(1-\alpha)} + \alpha\cdot H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right)\right] - \left[\cancel{H_2(\alpha)} + \cancel{(1-\alpha)} + \alpha\cdot H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\left[H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) - H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right)\right]}$$

5 Junio 2010.

$$\times 4 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$p(y=2/x=1)$ $p(y=4/x=4)$



...tua $I(x;y)$

...junta $H(x,y) \rightarrow$

...dicionada $H(x/y) \rightarrow$ que duda hay sobre la entrada si conoces la salida

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\}$

...de la cadena:

$$H(x,y) = H(x/y) + H(y)$$

$$\boxed{H(x/y) = H(x,y) - H(y)}$$

$$\downarrow$$

$$p_{i,j} = p(x=x_i, y=y_j)$$

...os la matriz de probabilidades conjuntas multiplicando la ...sima de Q por $p(x=x_i)$ $i=1\dots n$.

$$\dots j = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} & 0\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} & 0\cdot\frac{1}{8} \\ 0\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} & 0\cdot\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\dots j = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} & 0 & \frac{1}{32} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$p(y=1)$ $p(y=2)$ $p(y=3)$ $p(y=4)$

de la j-ésima columna de P_{ij} nos da $p(Y=y_j)$

$\frac{14}{32} = \frac{7}{16}$ $\qquad$ $p(y=3) = \frac{4}{32}$

$\frac{5}{32}$ $\qquad$ $p(y=4) = \frac{9}{32}$

$= H_2\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{3}{16}\right) =$

$\frac{1}{16} \cdot \log_2 16) + 6 \cdot \left(\frac{1}{32} \cdot \log_2(32)\right) + \frac{3}{16} \cdot \log_2\left(\frac{16}{3}\right) = \boxed{2,92 \text{ bits}}$

$= H_2\left(\frac{7}{16}, \frac{5}{32}, \frac{4}{32}, \frac{9}{32}\right) = \frac{7}{16} \cdot \log_2 \frac{16}{7} + \frac{5}{32} \log_2 \frac{32}{5} + \dots =$

$= \boxed{1,83 \text{ bits}}$

Solución $\boxed{H(X/Y) = 2,92 - 1,83 = 1,09 \text{ bits}}$

$\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$

nro 2007.

lema 1.

$$P_{ij} = \begin{array}{ccc} p(y=1) & p(y=2) & p(y=3) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow p(x=1) = \frac{1}{3} \\ \longrightarrow p(x=2) = \frac{1}{3} \\ \longrightarrow p(x=3) = \frac{1}{3} \end{array}$$

¿ $H(Y)$? (solo habla de una variable).

ertidumbre es máxima) $\boxed{H_2(Y) = H_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \log_2 3 = 1,59 \text{ bits}}$

↑ nº de elementos

uiprobables.

(y) si $X = x_1$ no puede ser.

$= \{ x_2, x_3 \}$

$$= \frac{P_{ij}}{1 - \text{prob. eliminada}} = \frac{P_{ij}}{1 - \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{P_{ij}}{2/3}}$$

.. eliminada $= \frac{7}{24} + \frac{1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$$ij = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} \\ 0 \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} & \frac{7}{24} \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$ij = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to p(x = x_2) = \frac{8}{16} \\ \to p(x = x_3) = \frac{8}{16} \end{matrix}$$

$= \left\{ \frac{8}{16}, \frac{8}{16} \right\}$

$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16} \right\}$

$= H_2 \left(\frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16} \right) = 1{,}27$ bits.

tiembre 2009.

roblema 1.

¿ $H(S, E)$?

$= \{ \text{sexo} \}$

$= \{ H, M \}$

$P_S = \{ 0{,}7, \; 0{,}3 \}$

$E = \{ \leq 30, \; 31\text{-}40, \; > 40 \}$

$P_E = \{ 0{,}25, \; 0{,}55, \; 0{,}2 \}$

H	M	
0,05	$2\alpha = 0,2$	$\longrightarrow p(E \leq 30) = 0,25$
$0,55 - 0,1 = 0,45$	$\alpha = 0,1$	$\longrightarrow p(E = 31-40) = 0,55$
0,2	0	$\longrightarrow p(E > 40) = 0,2$

$\downarrow$

$p(S = M) = 0,3 = 3\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0,1}}$

$E) = H_2(0,05,\ 0,2,\ 0,45,\ 0,1,\ 0,2) =$

$= 0,05 \cdot \log_2 \frac{1}{0,05} + \ldots$

E/S	H	M
≤ 30	$\frac{0,05}{0,35} = \frac{1}{7}$	$\frac{0,2}{0,35} = \frac{4}{7}$
31-40	0	$\frac{0,1}{0,35} = \frac{2}{7}$
> 40	0	0

liminada $= 0,45 + 0,2 = 0,65$

$= \frac{p_{ij}}{1-0,65} = \frac{p_{ij}}{0,35}$

$H(E, S) = H_2\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$

odificación de fuente.

.1. Introducción.

→ Cod. Fuente → Canal → Decod. Fuente → Receptor

a → 00
b → 01
c → 10
d → 11

$A_c = \{0,1\}$

De finiciones:

- Códigos univocamente decodificables: son códigos con una
nterpretación en el receptor.

emplo:

- - - - decod Fuente → Rx

a → 0
b → 00
c → 001
d → 0011

$\underbrace{100}_{c}\,\underbrace{0}_{a}\,\underbrace{\underbrace{0}_{a}\,\underbrace{0}_{a}}_{b}$

- Códigos instantaneos o prefijos: Son aquellos códigos
mente decodificables en los que ninguna palabra código
fijo de otra.

a → 1
b → 01
c → 001
d → 0001

- Longitud media de un código: Indica el número medio
oles que contiene cada palabra código. Se calcula:

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot P_i}$$

ru

A_F	$\vec{P}$	P.C	l_i
a	1/4	1	1
b	1/4	01	2
c	1/4	001	3
d	1/4	0001	4

$$1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5\ \frac{\text{bits}}{\text{símbolo-fuente}}.$$

...a una transmisión eficiente ⇒ $\bar{L}$ sea lo menor posible.

...ódigos compactos: Tienen la $\bar{L}$ menor posible. No existen otros con $\bar{L}$ menor.

Códigos óptimos: Son aquellos que tienen la $\bar{L}$ mínima teórica: $\boxed{\bar{L}_{min} = H_S(\vec{P}_{Fuente})}$

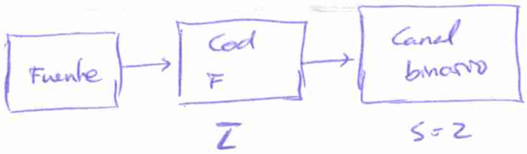
indica el tamaño del A_C

canal binario: s=2.

...2. Algoritmo de Huffman.

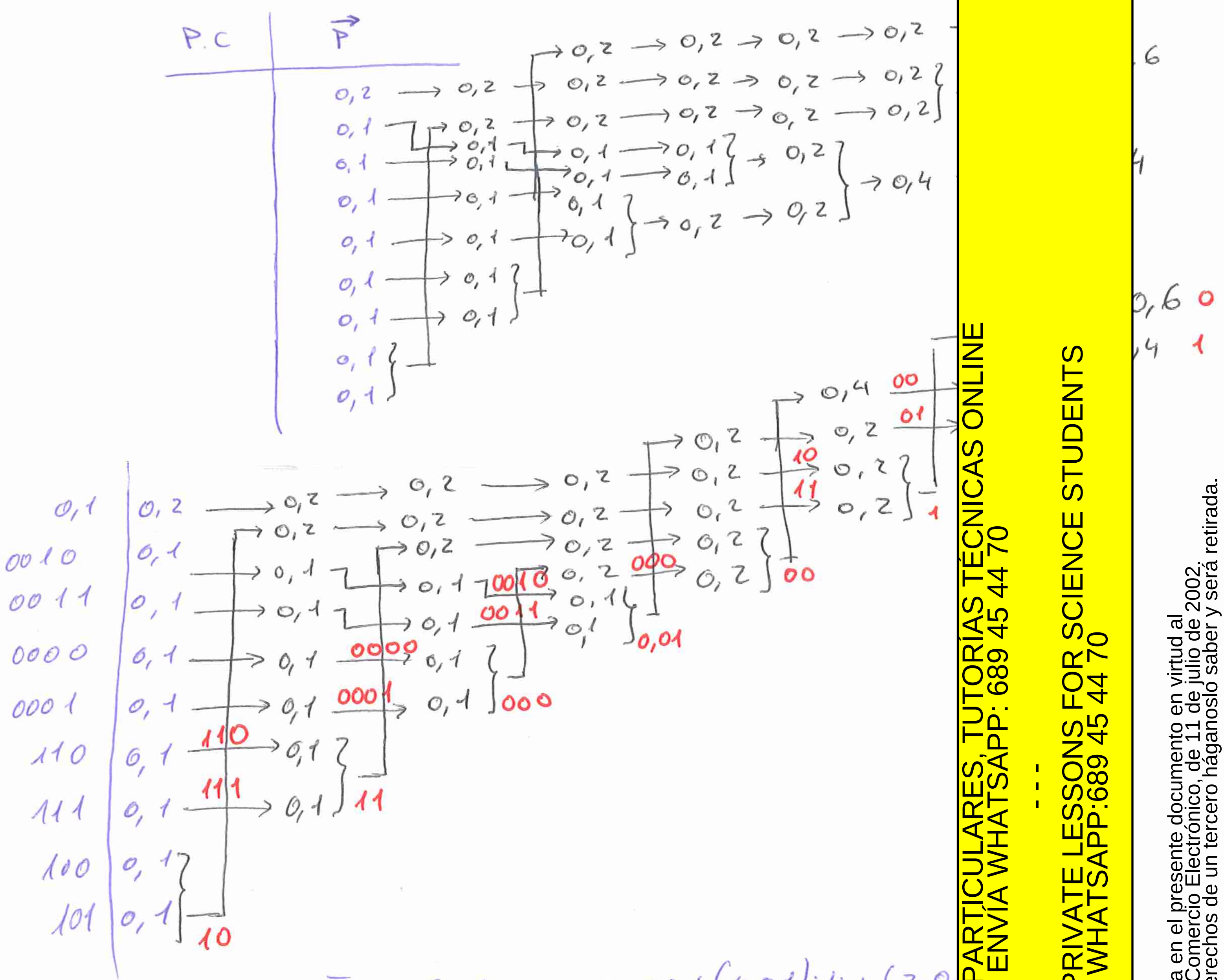
Es un método para obtener códigos compactos.

- caso binario (s=2)



Sea una fuente con vector de probabilidades:

$$\vec{P} = \{0,2,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1,\ 0,1\}$$



$$\bar{l} = \sum_i l_i \cdot p_i = 2 \cdot 0,2 + (4 \cdot 0,1) \cdot 4 + (3 \cdot 0,$$

$$\boxed{\bar{l} = 3,2 \ \frac{\text{bit}}{\text{símbolo fuente}}}$$

~~...CIÓN DE FUENTE~~

...iciencia:

$$\boxed{\eta = \frac{H_s(\vec{p})}{\bar{L}}}$$

s: tamaño del Ac. (canal binario. s = 2)

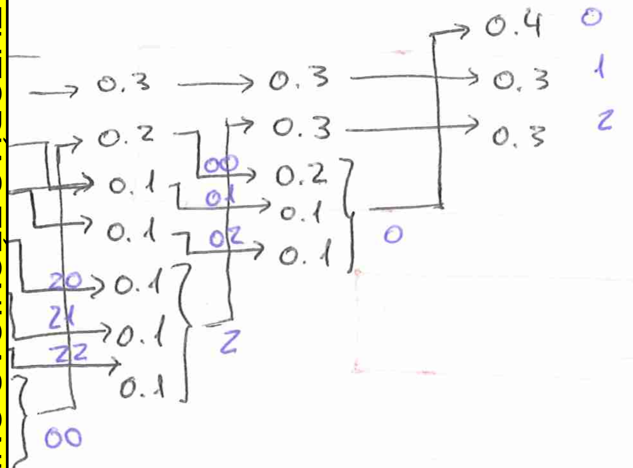
...ódigos óptimos $\Rightarrow \eta = 1 \Leftrightarrow \bar{L} = \bar{L}_{min} = H_s(\bar{p})$

...o general del algoritmo de Huffman.

Ej: Obtén la longitud media de un código ternario para la fuente con vector de probabilidades:

$... = \{0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$

Po...



dividir

$\boxed{...-2) \bmod (s-1)}$

...e simb. fuente.

...año del alfabeto de cod.

$s' = 2 + (8-2) \bmod (3-1)$

$= 2 + 6 \bmod 2 = 2 + 0 = 2$

En los siguientes etapas se grapa de s en s.

$$li \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}3 + (\overset{\text{nº de bits}}{2} \cdot 0{,}1) \cdot 5 + (\overset{\text{nº de bits}}{3} \cdot 0{,}1) \cdot 2$$

$$\boxed{\bar{L} = 1{,}9 \text{ u. ternarios / simb. fuente.}}$$

Cotas de la longitud media de códigos compactos.

Mc. Millan

Si el código es univocamente decodificable se cumple:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} s^{-li} \leq 1}$$

Kraft.

Si se cumple $\sum_{i=1}^{n} s^{-li} \leq 1$ entonces se puede construir

o univocamente decodificable tomando:

$$\boxed{li = \log_s \frac{1}{p_i} \quad \forall i : 1 — n.}$$

dad: $\boxed{\bar{L} \geq H_s(\vec{p})}$

stificación:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} li \cdot p_i \underset{\text{Kraft}}{=} \sum_{i=1}^{n} \log_2 \frac{1}{p_i} \cdot p_i \geq \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{p_i} \cdot p_i = H_s(\vec{p})$$

$3 \geq 2{,}99\ldots9$

l: $\boxed{\bar{l} < H_S(\vec{p}) + 1}$

ación:

$$= \sum l_i \cdot p_i = \sum_i \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil \cdot p_i < \sum_i \left(\log_2 \frac{1}{p_i} + 1 \right) \cdot p_i =$$

$$\underbrace{\sum_i \log_2 \frac{1}{p_i} \cdot p_i}_{H_S(\vec{p})} + \underbrace{\sum_i p_i}_{1}$$

to: $\boxed{H_S(\vec{p}) \le \bar{l} < H_S(\vec{p}) + 1}$

Extensión de fuente.

dad: Si $\log_S \frac{1}{p_i}$ entero $\forall i : 1 - n$ entonces

$H_S(\vec{p}) \equiv$ código óptimo.

neral, los códigos compactos tienen $\eta \le 1$.

nsión de fuente consiste en codificar los símbolos fuente
de m símbolos (extensión de fuente de orden m).
ue mejorar la eficiencia de los códigos compactos (que no
nos).

Obtén un código compacto binario para una fuente simétrica cuya eficiencia supere el 96%

l: $\vec{P} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

sacar el código compacto binario utilizamos Huffman.

$\vec{P}$		
$\frac{1}{3}$	$2/3$	0
$\frac{1}{3}$	$1/3$	1
$\frac{1}{3}$		

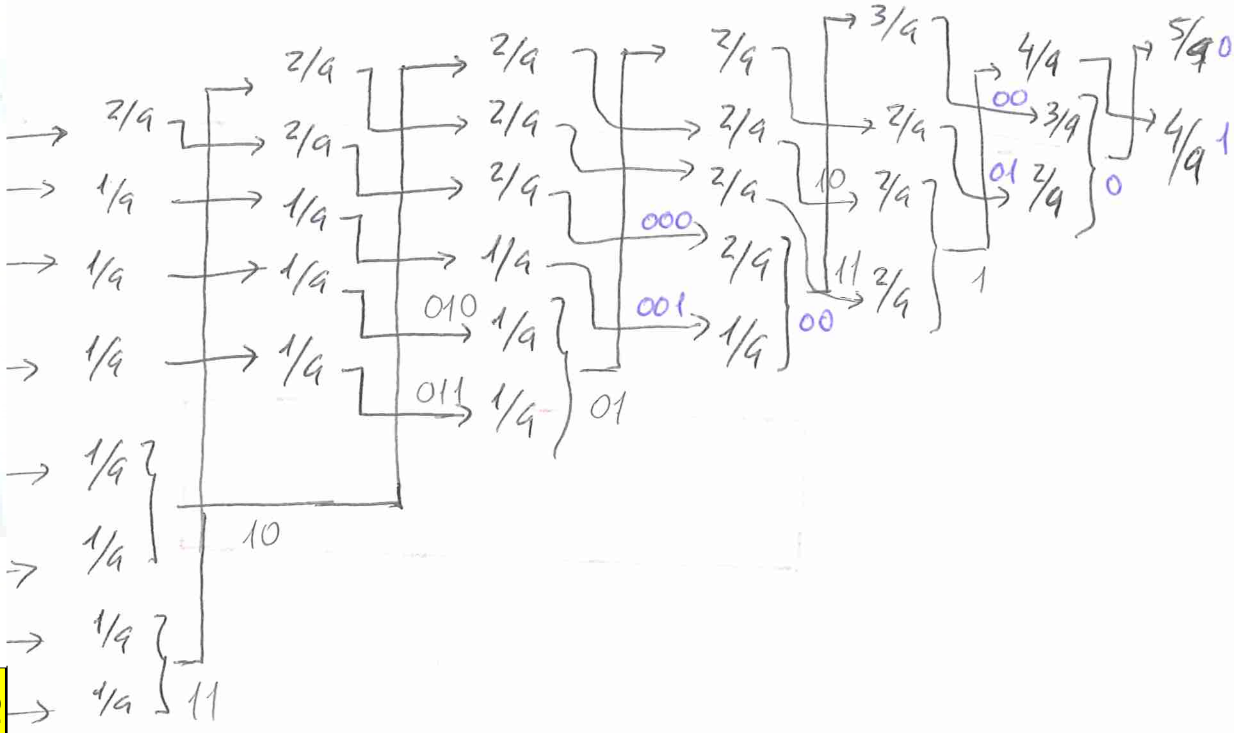
$= \sum_i l_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ bits/simb. fuente

$\frac{H_2(p)}{\bar{L}} = \frac{\log_2 3}{5/3} = 0,95$

btendremos otro código con eficiencia mayor usando extensión uente. Probamos extensión de fuente de orden 2.

$\vec{P}^2 = \left\{ \underset{aa}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}, \underset{ab}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}, \underset{ac}{\frac{1}{9}}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \underset{cc}{\frac{1}{9}} \right\}$

btenemos el código de la fuente extendida.



$$= \sum_i l_i^2 \cdot p_i = \left(3 \cdot \frac{1}{9}\right) \cdot 7 + \left(4 \cdot \frac{1}{9}\right) \cdot 2 = \frac{29}{9} = 3,22 \ \frac{\text{bits}}{2\text{simb. fuente}}$$

$$= \frac{3,22}{2} = 1,61 \ \frac{\text{bits}}{\text{simb. fuente}}$$

...ciencia del nuevo código:

$$\boxed{\eta = \frac{H_2(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{H_2(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{\log_2 3}{1,61} = 0,9844}$$

...i. de Shannon de codificación de fuente.

...mentando el orden de la extensión de fuente se puede ... la longitud media de los códigos compactos tanto ... desee al límite teórico (la entropía de la fuente)

$$\boxed{H_s(\vec{p}) \le \bar{L} < H_s(\vec{p}) + \frac{1}{m}}$$

$$...) = H_s(x, \overset{m}{\dots}, x) = m \cdot H_s(\vec{p})$$

$\uparrow$

...pía de la fuente extendida se puede ver como la entropía ... <u>m</u> fuentes independientes.

$$H_s^m(\vec{p}) \le \bar{L}^m < H_s^m(\vec{p}) + 1$$

$$m \cdot H_s(\vec{p}) \le m \cdot \bar{L} < m \cdot H_s(\vec{p}) + 1$$

... septiembre 2009.

...ma 2.

$$\vec{p} = \{\alpha, 2\alpha\}$$

$$\alpha + 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\vec{p} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

Th. Shannon de codificación fuente.

$$...(\vec{p}) \le \boxed{\bar{L} < H_s(\vec{p}) + \frac{1}{m}}$$

... = orden de ext. de fuente.

... = 8

$$\boxed{... \bar{L} < H_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}}$$

Cálculo de la $\bar{L}$ de códigos compactos.

$$\log_s \frac{1}{p_i} = \text{entero } \forall i \Rightarrow \bar{L} = H_s(\vec{p})$$

Ej.: Calcula la $\bar{L}$ de un código compacto binario para una fuente simétrica con 32 símbolos.

Sol.:

$$p_i = \frac{1}{32} \quad \forall i \quad , \quad s = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{1/32} = \log_2 32 = 5.$$

$$\boxed{\bar{L} = H_2(\vec{p}) = \log_2 32 = 5 \ \frac{\text{bits}}{\text{símb. fuente}}}$$

Si la fuente cumple que $p_i = \frac{1}{n} \ \forall i$ (símbolos equiprobables) ~~existen~~ en el código compacto asociado hay palabras código de longitud j ó $j+1$, tal que:

$$2^j \leq n^{\circ} \text{ de palabras código} < s^{j+1} \quad (\text{caso binario: } s=2)$$

$$s^j \leq \quad '' \quad '' \quad < s^{j+1} \quad (\text{en general})$$

Ej.: Obtén la longitud media de un código binario compacto de una fuente con 9 símbolos equiprobables.

Sol.:

$$p_i = \frac{1}{9} \quad \forall i$$

$$\cancel{\log_2 \frac{1}{1/9} = \log_2 9 \equiv \text{entero}}$$

Las palabras código cumplen:

$$2^j \leq 9 < 2^{j+1}$$

$$j = 3$$

$j = 3$: $n_3 = 7$

$j+1 = 4$: $n_4 = 9 - 7 = 2$

p.c

$000 \to 0000$, $000 \to 0001$

No existen por ser prefijo de la anterior

...i palabra de longitud j ∃ dos combinaciones de que no pueden ser p.c.

...gamos que existen n_3 palabras código de $l=3$.

$$n_3 + \underbrace{2^4 - 2 \cdot n_3}_{\text{posible combinaciones con } l=4} \geq \text{nº de p.c} = 9$$

$$\underline{\underline{n_3 \leq 7}}$$

$$\sum l_i \cdot p_i = (\overset{\text{nº bits}}{3} \cdot \tfrac{1}{9}) \cdot 7 + (\overset{\text{nº bits}}{4} \cdot \tfrac{1}{9}) \cdot 2$$

$$\boxed{\bar{L} = \frac{29}{9} \text{ bit/simb. fuente.}}$$

...e cumplen los 2 primeros hay que utilizar Huffman.

15 junio 2010

...blema 2.

...ente simétrica ⇒ símbolos equiprobables.

$$p_i = \frac{1}{243} \quad \forall i$$

η? código compacto binario ⇒ $s=2$

$$\eta = \frac{H_2(\vec{p})}{\bar{L}}$$

Si $\log_2 \frac{1}{p_i}$ = entero ⇒ $\bar{L} = H_s(\vec{p})$

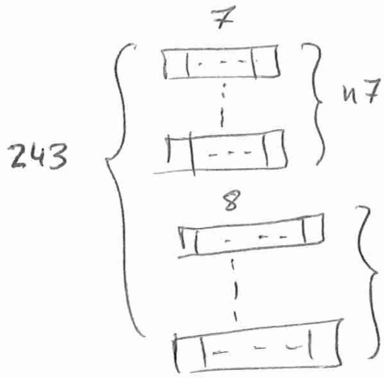
$$\log_2 \frac{1}{p_i} = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{243}} = \log_2 243 \neq \text{entero}$$ ⇒ El código no es óptimo.

$p_i = \frac{1}{243} \quad \forall i$ entonces las palabras código tienen 2 longitudes

$\therefore$ j o $j+1$

$2^j \leq$ nº de palabras código $< 2^{j+1}$

$2^j \leq 243 < 2^{j+1} \Rightarrow \boxed{j=7}$



por cada una de n_7 hay 2 que no pueden existir.

$\underbrace{2^8}_{\text{posibles combinaciones}} - 2n_7 \geq$ nº de p.c.

arias con 8 bits

$256 - 243 = 13 \Rightarrow \underline{\underline{n_7 = 13}} \longrightarrow n_8 = 243 - 13 = 230$

$\sum l_i \cdot p_i = \left(\overset{\text{nº bits}}{7} \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{n_7}{13} + \left(\overset{\text{nº bits}}{8} \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{n_8}{230}$

$$\boxed{\bar{L} = 7{,}94 \text{ bits/simb. fuente}}$$

$$\frac{H_2(\bar{P})}{\bar{L}} = \frac{\log_2 243}{7{,}94} = \boxed{0{,}997}$$

$s = 3 \qquad \eta = \frac{H_3(\bar{P})}{\bar{L}}$

e cumple que $\log_3 \frac{1}{\frac{1}{243}} \cdot \log_3 243 = 5$

$\Downarrow$

el código $\rightarrow$ óptimo $\Rightarrow \boxed{\eta = 1}$

ular lo mismo con un código cuaternario $(s=4)$

- $\log_4 243 \neq$ entero $\Rightarrow$ código no es óptimo.
- $p_i = \dfrac{1}{243} \quad \forall i \Rightarrow l_i \begin{cases} j \\ j+1 \end{cases}$

$$\boxed{s^j \leq n^{\circ} \text{ de p.c} < s^{j+1}}$$

$$\boxed{j=3} \qquad 4^j \leq 243 < 2^{j+1}$$

$$243 \begin{cases} \left.\begin{matrix} \square\square\square \\ \square\square\square \end{matrix}\right\} n_3 \\ \left.\begin{matrix} \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \end{matrix}\right\} n_4 \end{cases}$$

$$\boxed{s^{j+1} - s \cdot n_j \geq n^{\circ} \text{ de p.c}}$$

$$+\ 4^4 - 4 \cdot n_3 > 243$$

$$n_3 \leq \frac{256-243}{3} = \frac{13}{3} = 4,\ldots \Rightarrow \boxed{n_3 = 4}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n_4 = 243 - 4 = 239}$$

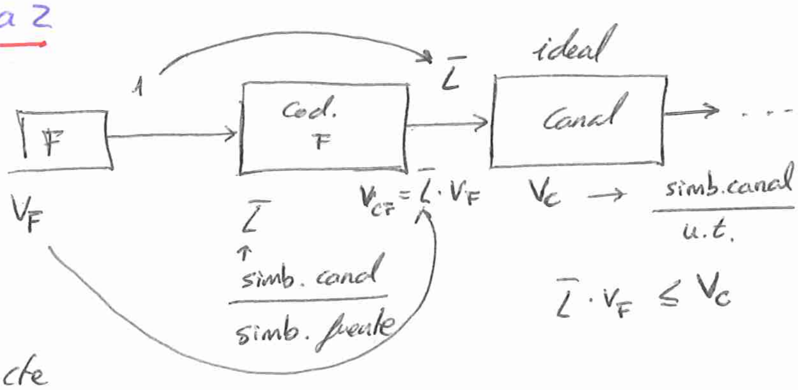
$$\sum_i l_i p_i = \left(3 \cdot \frac{1}{243}\right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n_3}}{4} + \left(4 \cdot \frac{1}{243}\right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n_4}}{239}$$

$$\boxed{\bar{L} = 3{,}98 \ \frac{\text{u. cuaternarias}}{\text{simb. fuente}}}$$

$$\frac{H_4(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{\log_4 243}{3{,}98} = \boxed{0{,}995}$$

5 septiembre 2007.

blema 2



$\bar{I} \cdot V_F \leq V_C$

cte
"
$\leq V_C$

que pueda
de fuente.

$P_i = \frac{1}{16} \quad \forall i$

$V_C = 8 \cdot V_F$

F → fracción de uso.

$\frac{\text{bits}}{\cancel{\text{simb. fuente}}} \cdot \frac{\cancel{\text{simb. fuente}}}{u.t.}$

$F = \frac{\bar{I} \cdot V_F}{V_C}$ (adimensional)

$\frac{\text{bits}}{u.t}$

canal irá completo cuando $\bar{I} \cdot V_F = V_C$

entrada de información al canal

tasa de trans. del canal.

ófimo? $\rightarrow \log_2 \frac{1}{P_i} = \log_2 16 = 4$ (entero) $\Rightarrow$ es óptimo

$\bar{I} = H_2(\vec{p}) = \log_2 16 = 4$ bits

$= \frac{4 \cdot \cancel{V_F}}{\underbrace{8 \cdot \cancel{V_F}}_{V_C}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$= 8$ Régimen de trans. dos veces mayor que fuente. $V_c = 2 \cdot V_F$

$i = \frac{1}{16}\ \forall i.$

$$\frac{\text{tasa de entrada de inform. al canal}}{\text{velocidad de transmisión de inf. por el canal}} = \frac{\bar{L} \cdot V_F}{V_c} = \frac{\bar{L} \cdot \cancel{V_F}}{2\cancel{V_F}}$$

$\bar{L}$:

$p_i = \frac{1}{16}\ \forall i, \quad l_i \begin{matrix} \nearrow j \\ \searrow j+1 \end{matrix}$

$8^j < 16 < 8^{j+1}$

$j = 1$

$16 \left\{ \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \square \\ \vdots \\ \square \end{matrix}\right\} n_1 \\ \square\square \\ \vdots \\ \square\square \end{matrix} \right.$

$- 8 \cdot n_1 \geq 16$

$\leq \frac{64-16}{7} = 6{,}85 \Rightarrow \boxed{n_1 = 6}$

$\boxed{n_2 = 16 - 6 = 10}$

$$\sum_i l_i p_i = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \underset{n_1}{6} + \left(2 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot \underset{n_2}{10}$$

$$\boxed{\bar{L} = \frac{26}{16} = 1{,}625 \ \frac{\text{u. octarias}}{\text{simb. fuente}}}$$

$$\frac{\bar{L}}{2} = \frac{1{,}625}{2}$$

problemas num 2.

blema 4.

a) Dice mínimo $\Rightarrow$ óptimo. $H_2(\vec{p})$.

blema 1.

a) $s = 4$ $\qquad \eta = \dfrac{H_4(\vec{p})}{\bar{l}}$

$p_i = \dfrac{1}{6}$

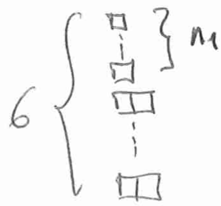
$\log_4 \dfrac{1}{p_i} = \log_4 6$ no es un entero entonces no es óptimo

$p_i = \dfrac{1}{6} \ \forall_i \Rightarrow l_i \begin{cases} j \\ j+1 \end{cases}$

$s^j \leq$ numero de palabras código $< s^{j+1}$

$4^j \leq 6 < 4^{j+1}$

$j = 1$

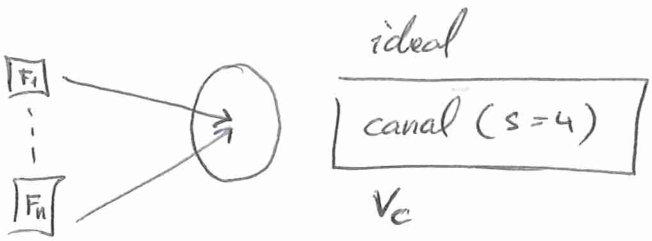


$^2 - 4 \cdot n_1 \geq 6$

$\leq \dfrac{16-6}{3} = \dfrac{10}{3} = 3,33 \Rightarrow \boxed{n_1 = 3}$

$l_i p_i = \left(1 \cdot \dfrac{1}{6}\right) \cdot 3 + \left(2 \cdot \dfrac{1}{6}\right) \cdot 3 = \boxed{1,5. \text{ u. cuaternarias}}$

$= \boxed{\dfrac{\log_4 6}{1,5}} = 0,86$



a norma que se debe cumplir es que:

$$\boxed{\text{de entrada de inf. al canal} \le \text{Tasa de trans de inform por el canal}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{L}_i \cdot V_{F_i} \le V_c \qquad N: \text{nº de fuentes.}$$

$$\text{ax} \cdot \bar{L}_{min} \cdot \underset{\text{const}}{\underset{\uparrow}{V_F}} \le \underset{\text{const}}{\underset{\uparrow}{V_C}}$$

(N será max cuando L min)

$$\text{ax} \le \frac{V_c}{L_{min} \cdot V_F} = \frac{10 \cdot \cancel{V_F}}{\bar{L}_{min} \cdot \cancel{V_F}}$$

$$H_4(\vec{p}) = \log_4 6 \text{ u. cuaternarias} = 1{,}29 \text{ u. cuaternarias}$$

$$\text{ax} = \frac{10}{1{,}29} = \boxed{7{,}75}$$

no se utilizad la del apartado anterior puesto que el cod. F ~~canal~~ es diferente
(haciendo extensión de fuente)

. 3

entrada de inform. al canal ≤ tasa de transmisión de inf. por el canal.

tasa media de inform. mínima

$N_{max} \cdot \bar{L}_{min} \cdot V_F \le V_c \longrightarrow$ Velocidad canal

↳ Velocidad fuentes

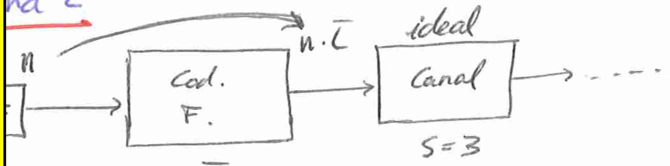
$$N_{max} \le \frac{V_c}{\bar{L}_{min} \cdot V_F} = \frac{1000}{0,63 \cdot 100} = 15,87 \text{ fuentes}$$

$$H_3\left(\frac{1}{2}\right) = \log_3 2 = 0,63 \text{ u. ternarias}$$

es

$$\boxed{N_{max} = 15 \text{ fuentes}}$$

na 2



$T_n \rightarrow$ tiempo que se tardan en enviar los símbolos por el canal.

$, 0,4\}$

$V_c = 1$

$$\frac{\bar{L}}{V_c} \longrightarrow \boxed{T_{n\,min} = \frac{n \cdot \bar{L}_{min}}{V_c} = 0,61 \cdot n \quad u.t}$$

$$H_3(\vec{p}) = 0,61 \text{ u. ternarias.}$$

$$= 0,6 \cdot \log_3 \frac{1}{0,6} + 0,4 \cdot \log_3 \frac{1}{0,4} = 0,61$$

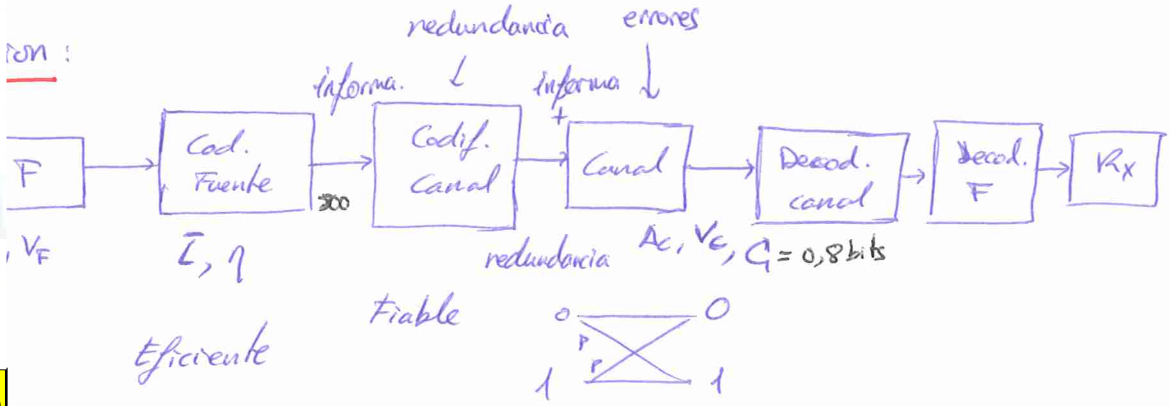
d. Fuente

$0,6, 0,4\}$ $\bar{L}_{min} = H_2(0,8) = 0,8$

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \longrightarrow \bar{L}_{min} = H_2(\frac{1}{2}) = 1$

Si A_F y A_C son iguales conviene hacer codificación de siempre que $\bar{L} < 1$. Esto sucede si los símbolos fuentes no son equiprobables.

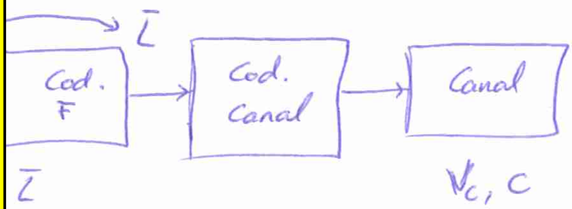
...ión :



...dad

... de símbolos de canal que son de información.

...ACIÓN DE CANAL



$$\bar{L}_C = \frac{n^o \text{ medio de simb. canal}}{\text{símbolo de información}}$$

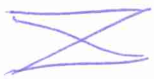
$$\boxed{\ldots = \frac{1}{C}}$$ → No puede existir un codi. de canal con $\bar{L}_C$ menor para garantizar transmisión fiable.

$$\frac{\ldots\text{. de información}}{\ldots\text{mb. de canal}}$$

CAPACIDAD

Def. Capacidad

Sea X la v.a que representa la entrada de un canal y la v.a que indica la salida. Se define la capacidad del

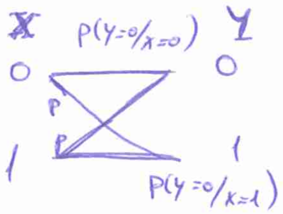


$$\boxed{C \triangleq \max\left(I(X;Y)\right)}$$

Canales conocidos:

a) Canal simétrico: Se dice que un canal es simétrico si cumple:

- las filas de su matriz de transición tienen los mismos valores (…ier orden).
- Las columnas de la matriz de transición suman todas lo mismo.



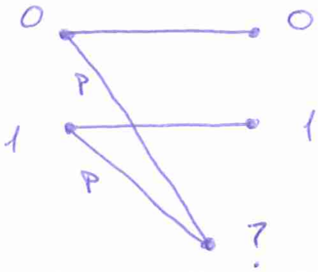
$$P(Y/X)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº entradas}}}{Q}{}_{r \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº salidas}}}{s}} = \begin{pmatrix} P(Y=0/X=0) & P(Y=1/X=0) \\ P(Y=0/X=1) & P(Y=1/X=1) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \log \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº salidas}}}{s} - H(\text{fila de } Q)}$$

Canal con borrado: La salida de este canal o es igual
trada o es un símbolo distinto de cualquier posible

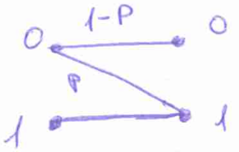


$$\boxed{C = (1-p)\log H}$$

nº de entradas

Canal en Z.

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



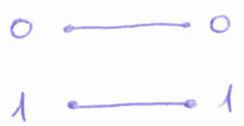
$$\boxed{C = \log\left(1 + (1-p)\cdot p^{\frac{p}{1-p}}\right)}$$

Si un canal se comporta del mismo modo para todos los
de entrada entonces la información mutua entre la entrada
alida se hace máxima si los símbolos de entrada son
ables.

$$C = \max\left(I(X;Y)\right) = I(X;Y)\Big|_{p(x=x_i)=\frac{1}{n}\ \forall i}$$

los:

Calcula la capacidad de los siguientes canales (en bits):



$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \log_2 2 - H_2(1) = \log_2 2 = \underline{\underline{1\ \text{bit}}}$$

Cogemos este camino por ser el mas fácil

$$Y) = H(X) - \underbrace{H(X/Y)} = \overbrace{H(Y) - \underbrace{H(Y/X)}}$$

$$X;Y) = \underbrace{H(Y)} - H(Y/X)$$

$$p(y=0) = p(y=0/x=0) \cdot p(x=0) + p(y=0/x=1) \cdot p(x=1) = 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}45$$

$$p(y=?) =$$

$$p(y=1) = p(y=1/x=0) \cdot p(x=0) + p(y=1/x=1) \cdot p(x=1) =$$

$$X): \quad H(Y/X) = \sum_i \underbrace{H(Y/x=x_i)}_{H(\text{fila i-esima de } Q)} \cdot p(x=x_i) =$$

$$H(\text{fila}) \cdot \frac{1}{2} + H(\text{fila}) \cdot \frac{2}{3}$$

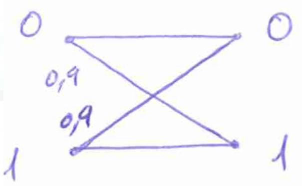
$$= H(\text{fila de } Q)$$

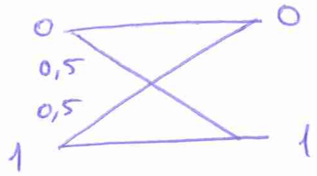
↑

las 2 filas de Q son iguales.

No hay ningún canal binario con capacidad mayor de 1 bit
este es el ideal y tiene capacidad 1.

un canal no es binario puede tener capacidad mayor que





$- H_2(0,1) > 0$

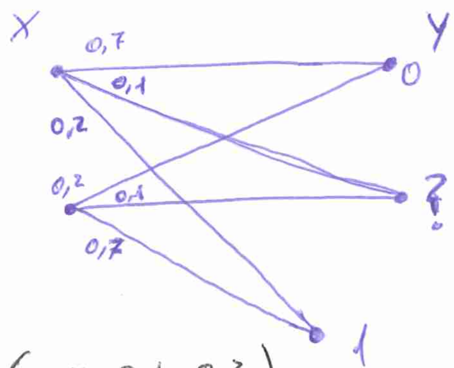
$C_2 = 0 \rightarrow$ La salida no da información sobre la entrada.

$C_2 = \log_2 2 - H_2(0{,}5) = \log_2 2 - \log_2 2 = 0$

0,9)
0,1)

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

...lcula la capacidad en bits del siguiente canal.



$$= \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

...s columna de la matriz de transición Q no suman lo mismo no ...

...un canal con borrado

...l canal se comporta del mismo modo para todos los elementos

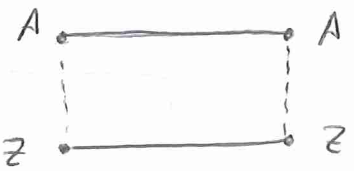
se cumple :

$$C = I(X;Y) \Big|_{P(X=x_i) = \frac{1}{2} \quad \forall i = 0,1}$$

...en 2007.

...ema 3.

a)



$$Q = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0\,1 \end{pmatrix} = I_{26}$$

$$\log_2 26 - H_2(1) = \log_2 26 - \overset{0}{\overset{\parallel}{\log_2 1}} = \boxed{4,7 \text{ bits}}$$

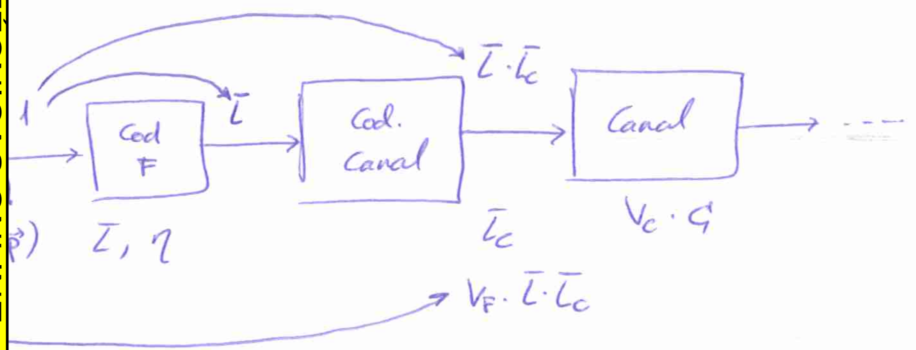
b)

Canal simétrico todas las columnas suman lo mismo.

$$\underset{26\times 26}{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\ldots_2\, 26 - H_2\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{C = \log_2 26 - 1 \text{ bits} = 4,7 - 1 = 3,7 \text{ bits}}$$



...Shannon de codificación de canal.

La tasa de entrada de información al canal ≤ Tasa de trans infor. por el canal.

$$V_F \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}_c \le V_c \longrightarrow \boxed{V_F \cdot \bar{I} \le V_c \cdot \frac{1}{\bar{I}_c}}$$

$\frac{\text{simb. fuente}}{\text{u.t}} \times \frac{\text{simb. informa.}}{\text{simb. fuente}}$ $\qquad$ $\frac{\text{simb. canal}}{\text{u.t}} \times \frac{\text{simb. inf}}{\text{simb de canal}}$

e codificadores óptimos:

$$\bar{L}_{min} = H_S(\vec{p})$$

$$\bar{L}_{c\,min} = \frac{1}{C}$$

orema de Shannon queda:

$$\boxed{V_F \cdot H_S(\vec{p}) \leq V_c \cdot C}$$

9.

transmitir sin error por el canal hay que cumplir el Th. de Shannon de canal.

$$\sum_{i=1}^{N} V_{F_i} \cdot \bar{L}_i \leq V_c \cdot \frac{1}{\bar{L}_c}$$

en este caso las fuentes son todas iguales se cumple:

$$N \cdot V_F \cdot \bar{L} \leq V_c \cdot \frac{1}{\bar{L}_c}$$

nº de fuentes

codificadores óptimos para obtener las velocidades de fuente máximas:

$$_F \leq V_c \cdot \frac{1}{\bar{L}_{c\,min}} \cdot \frac{1}{\bar{L}_{min}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$= H_S(\vec{p}) = H_2(\vec{p}) = \underline{0{,}5 \text{ bits}}$$

Canal binario

ce transmite 1000 dígitos binarios.

$$= \frac{1}{C} = \frac{1}{0{,}7} \text{ bits}$$

$$V_{F\,max} \leq 1000 \cdot \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{1}{1/0{,}7} \cdot \frac{1}{64} \Rightarrow V_{F\,max} \leq 21{,}87 \ \frac{\text{simb. fuente}}{\text{segundo}}$$

$$\boxed{V_{F\,max} = 21{,}87 \ \frac{\text{bits}}{\text{s}}}$$

(no tiene porque ser entero. Es una velocidad no una capacidad)

...men Noviembre 2010

...o 1. Dada la matriz de transición: $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 2/7 & 2/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix}$

...smiten símbolos con: $P_X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$

...$(x; Y)$

Idem si no se transmiten X_1 ni se recibe Y_4

...lculamos la matriz de probabilidades conjuntas P_{ij}:

P_{ij}: cada una de sus filas se obtiene multiplicando cada fila ...Q por la correspondiente probabilidad de los símbolos transmitidos:

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{28} & \frac{2}{28} & 0 & \frac{3}{28} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to p(x=1) \\ \to p(x=2) \\ \to p(x=3) \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p(y=1) & p(y=2) & p(y=3) & p(y=4) \end{array} \end{array}$$

$$= H(x) - H(X/Y) = \underbrace{H(Y) - H(Y/X)}_{\text{utilizamos esta}}.$$

...lamos $H(Y)$:

$p(y = y_j)$ se obtiene como la suma de la j-ésima columna de P_{ij}.

$$...) = \frac{3}{20} + \frac{2}{28} = 0{,}22$$

$$...) = \frac{1}{3} + \frac{2}{28} = 0{,}4$$

$$...) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0{,}13$$

$$...4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{3}{28} = 0{,}24$$

$$H_2(0{,}22,\ 0.4,\ 0.13,\ 0.24) =$$

$$\underbrace{0{,}22 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}22}}_{0{,}4805} + \underbrace{0{,}4 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}4}}_{0{,}5287} + \underbrace{0{,}13 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}13}}_{0{,}3826} + \underbrace{0{,}24 \cdot \log_2 \frac{1}{0{,}24}}_{0{,}494} =$$

$\boxed{1{,}8859}$

$\boxed{\ldots 9 \text{ bits}}$

...lamos $H(Y/X)$: Aplico regla de la cadena.

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)$$

$$H(Y/X) = \underbrace{H(X,Y)}_{P_{ij}} - \underbrace{H(X)}_{P_x} = 1{,}35 \text{ bits}$$

$$\ldots X) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\ldots, Y) = \sum_i \sum_j P_{ij} \cdot \log \frac{1}{P_{ij}} = H_2\left(\frac{2}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{2}{28}, \frac{2}{28}, \frac{3}{28}\right)$$

... se transmite X_1

... se recibe Y_4

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{28} & \frac{2}{28} & 0 & \frac{3}{28} \end{pmatrix}$$

No existen.

No se recibe $Y=4$.

...esario reescalar los valores de la nueva matriz de probabilidades

$$P_{ij}' = \frac{P_{ij}}{1 - \text{probabilidad eliminada}} = \frac{1}{1-0{,}657} = \frac{1}{0{,}343}$$

$$\ldots \text{inada} = 0 + \frac{2}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{3}{28} = 0{,}657.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{0{,}343} & 0 & \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{0{,}343} \\ \frac{2}{28} \cdot \frac{1}{0{,}343} & \frac{2}{28} \cdot \frac{1}{0{,}343} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_{ij}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & 0 & \frac{7}{48} \\ \frac{5}{24} & \frac{5}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

$Y') = H(Y) - H(Y'/X')$

(Y):

$$p(y'=1) = \frac{7}{16} + \frac{5}{24}$$

⋮

$'/X')$: $H(X', Y') = H(X') - H(Y'/X')$

$$H(Y'/X) = H(X'; Y') - H(X)$$

20 Enero 2011.

lema 1. Considera una familia de canales con matriz de

d de transición:

$$\begin{pmatrix} -p & p-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & p-\varepsilon & 1-p \end{pmatrix}$$

uestre que la capacidad se alcanza para entradas equiprobables.

que casos la capacidad es nula.

$= \max\{I(X;Y)\} = \max\{H(Y) - H(Y/X)\}$ ⊛

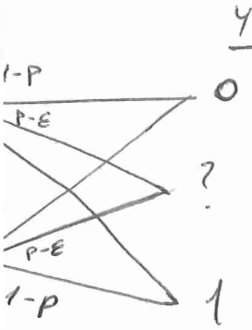
$X) = \underbrace{\sum_i H(Y/X=x_i)}_{A(\text{Fila i-ésima de } Q)} \cdot p(X=x_i) = H(1^{a}\text{ fila})\cdot p(X=x_1) +$

$1^{a}\text{ fila})\cdot p(X=x_2) = H(\text{fila de } Q) = \text{cte.}$

iguales

⇓ constante.

$\{H(Y)\} - H(Y/X)$



$$p(y=0) = p(y=0/x=0)\cdot p(x=0) + p(y=0/x=1)\cdot p(x=1) =$$

$$= \underline{(1-p)\cdot p(x=0) + \varepsilon\cdot p(x=1) = a}$$

$$p(y=1) = p(y=1/x=0)\cdot p(x=0) + p(y=1/x=1)\cdot p(x=1) =$$

$$= \underline{\varepsilon\cdot p(x=0) + (1-p)\cdot p(x=1) = b}$$

$$p(y=?/x=0)\cdot p(x=0) + p(y=?/x=1)\cdot p(x=1) =$$

$$p-\varepsilon\cdot p(x=0) + p-\varepsilon\cdot p(x=1) = p-\varepsilon\,\underbrace{(p(x=0)+p(x=1))}_{=1} = p-\varepsilon$$

$$\{H(Y)\} = \max\{H(\overbrace{a,b,}^{Y_2}\ \overbrace{p-\varepsilon}^{Y_1})\} =$$

$$\{\underbrace{H(p-\varepsilon)}_{cte.} + (p-\varepsilon)\cdot \cancel{H_2(Y_1)} + (1-(p-\varepsilon))\, H_2(Y_2)\}$$

0 xq solo hay un valor.

$$-\varepsilon) + \max\{H(Y_2)\}\cdot(1-(p-\varepsilon))$$

$$\{\ ,\ \}$$

$$\left\{\frac{a}{1-(p-\varepsilon)}, \frac{b}{1-(p-\varepsilon)}\right\} = \left\{\frac{(1-p)\,p(x=0)+\varepsilon\cdot p(x=1)}{1-(p-\varepsilon)}, \frac{\varepsilon\cdot p(x=0)+(1-p)\,p(x=1)}{1-(p-\varepsilon)}\right\}$$

...) e $p(x=1)$ son iguales, son equiprobables y obtenemos la capacidad.

...na variable binaria, entonces el máximo de Y_2 se obtiene si sus ... equiprobables, esto sucede si $p(x=x_0) = p(x=x_1) \Rightarrow \underline{p(x=x_3) = p(x=x_1) = \frac{1}{2}}$

..., se obtiene la capacidad cuando las entradas son equiprobables.

$$= \max \{ I(X;Y) \} = H(p-\varepsilon) + \max \{ H(Y_2)\cdot(1-(p-\varepsilon)) - H(Y/X) \}$$

$$H(p-\varepsilon) + \log_2 2 \cdot (1-(p-\varepsilon)) - H(\text{fila de } Q)$$

$$= H(p-\varepsilon) + 1 - p + \varepsilon - \underbrace{H(1-p,\ p-\varepsilon,\ \varepsilon)}$$

$$\vec{P}_{X_2} = \left\{ \frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon} \right\} = \{1\}$$

$$\ldots, \varepsilon, \overset{X_2}{p-\varepsilon}) = H(p-\varepsilon) + (p-\varepsilon)\cdot \underset{0}{\cancel{H(X_2)}} + 1-(p-\varepsilon)\cdot H(X_1)$$

$$H(p-\varepsilon) + 1-(p-\varepsilon) - \left[H(p-\varepsilon) + 1-(p-\varepsilon)\cdot H(X_1) \right] =$$

$$H(p-\varepsilon) - H(p-\varepsilon) + 1-(p-\varepsilon) - \left[1-(p-\varepsilon)\cdot \underbrace{H(X_1)}_{\text{Variable binaria}} \right] = 0 \Leftrightarrow H(X_1)=1$$

$$H(X_1) = H\left(\frac{1-p}{1-(p-\varepsilon)}, \frac{\varepsilon}{1-(p-\varepsilon)} \right) \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 1-p}$$

12 julio 2011.

...ma 1.

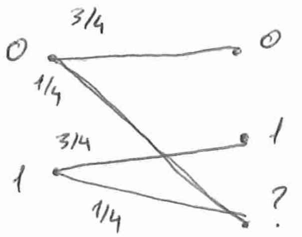
$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

...de transición Q se obtiene dividiendo cada fila de la matriz de ...s conjuntas entre la correspondiente probabilidad de entrada

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to p(x=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \to p(x=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} & 0 & \frac{1/6}{1/3} \\ 0 & \frac{1/4}{1/3} & \frac{1/12}{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{12} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

No es simétrico.



⇒ Canal con borrado (o sale lo mismo que hay a la entrada o algo distinto)

$$(1-p) \cdot \log M = \frac{3}{4} \cdot \log_2 2 = \boxed{\frac{3}{4} \text{ bits}}$$

↑ nº de entradas

...s de fallo

...n 23 mayo de 2014

...blema 4.

$\eta = 0,942$

$s = 2$

$A_F = \{0, 1\}$

$\vec{P} = \{ \quad , \quad \}$

→ 0

→ 10

→ 110

→ 111

P_i	$f_{i\phi}$
1/2	1
3/8	1/2
1/16	1/3
1/16	0

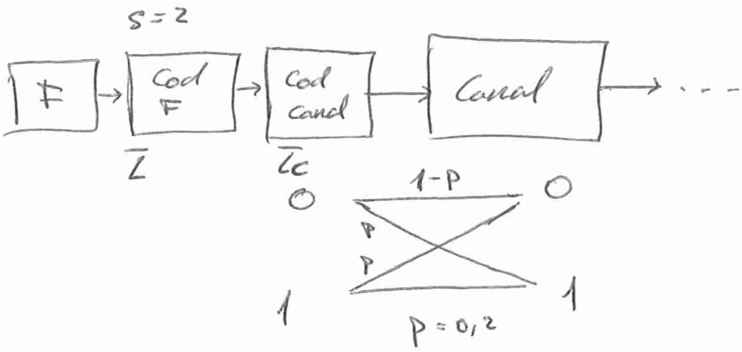
$$\ldots) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot 0 \simeq 0,7}$$

...os la función de "0" generados por el codificador fuente.

$\ldots(x' = 0) = \sum_i p_i \cdot f_{i\phi}$ siendo P_i: probabilidad de cada código

$f_{i\phi}$: función de ceros en cada palabra código.

2.



F

$= \frac{1}{48}$

...ador fuente ideal:

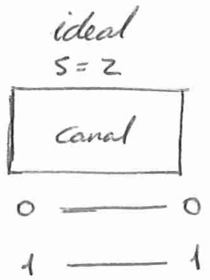
$$\bar{L}_{min} = H_2(\vec{p}) = \log_2 48 = \quad \text{bits}$$

...ificador de canal:

$$\bar{L}_{c\,min} = \frac{1}{C} \qquad \boxed{C = \log_2 2 - H_2(p) = 1 - H_2(0,2)}$$

Enero 2012

...blema 2.



...que la transmisión sea fiable se debe cumplir:

$$\boxed{V_F \cdot \bar{L} \le V_c} \qquad \text{Para que } \boxed{V_{F_i max} \cdot \bar{L}_{i\,min} \le \frac{V_c}{4}} \qquad V_i = 1,2,3,4$$

entropía

porque son 4 y tienen que compartir el canal a partes iguales.

$$V_{F_1} \cdot H(X_1) \le \frac{V_c}{4}$$

$$\boxed{\frac{V_{F_1}}{H(X_1)} = \frac{V_c}{4} \quad \frac{\text{simb. fuente}}{\text{segundo}}}$$

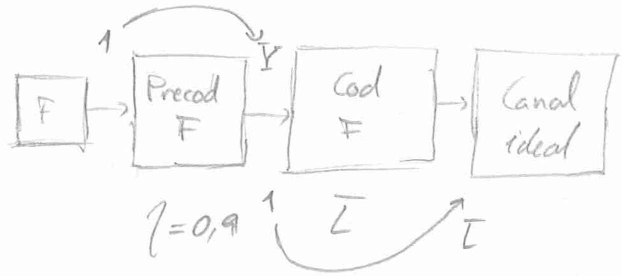
$$= \frac{V_c}{4}$$

$$= \frac{V_c}{4 \cdot H_2(X_2)} = \frac{2 V_c}{4}$$

$$_{max} = \frac{V_c}{4 \cdot H_2(X_3)} = \boxed{V_c \text{ bps}}$$

$$_{max} = \frac{V_c}{4 \cdot H(X_4)} = \boxed{2 V_c \text{ bps}}$$

na 3



z

$0,9$

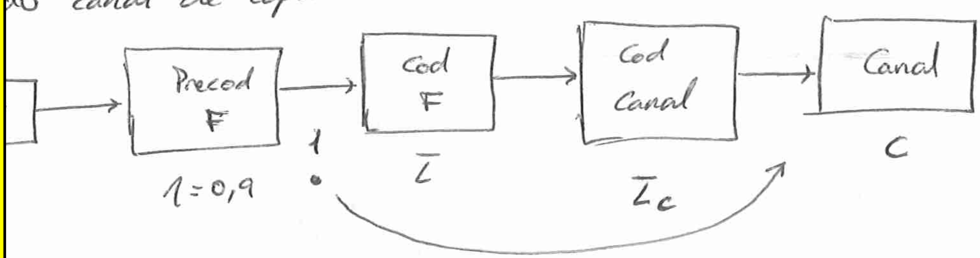
$$\bar{L} = \frac{\text{simb. canal}}{\text{simb. precod}}$$

$$\boxed{\bar{L} = \bar{L}_{min} = H(Y) = \eta = 0,9 \; \frac{\text{simb. de canal}}{\text{simb. precodificado}}}$$

entropía a la salida de un codificador de fuente es su

encia. $\boxed{\text{Cod F}} \xrightarrow{H(Y) = \eta}$

do canal de capacidad c:



$$\bar{L}_{c\,min} = \eta \cdot \frac{1}{c}$$

$$\uparrow \; \frac{\text{simb. de canal}}{\text{simb. de informa}}$$

s

simb

lificador de fuente.

$$\boxed{F} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Cod}\\ F\end{matrix}}$$

$\eta, \bar{L}$

ódigos compactos.

$H_s(p) \leq \bar{L} < H_s(\vec{p}) + 1/m \rightarrow$ orden de la extensión de fuente.

$$\eta = \frac{H_s(p)}{\bar{L}}$$

ódigos óptimos:

$$\eta = 1 \Leftrightarrow \bar{L}_{min} = H_s(\vec{p})$$

lo de $\bar{L}$ de códigos compactos:

) si $\log_s \frac{1}{P_i} \equiv$ entero $\forall i \Rightarrow \bar{L} = \bar{L}_{min} = H_s(\vec{p})$

2) $P_i = \frac{1}{n} \; \forall i \Rightarrow l_i < \begin{matrix} j \\ j+1 \end{matrix}$

$$\boxed{s^j < n^{\underline{o}} \text{ de p.c} < s^{j+1}}$$

$n_j + s^{j+1} - s \cdot n_j \geq n^{\underline{o}}$ de p.c.

p.c $\left\{ \begin{matrix} \square \} n_j \\ \} \end{matrix} \right.$

3) Huffman.

6: Dada una fuente ternaria sin memoria con $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ construye un código cuaternario de eficiencia que $\frac{3}{4}$. Cuantifique la eficiencia.

$$\frac{H_4(\vec{P})}{\bar{L}}$$

Calculamos la $\bar{L}$ del código compacto. No es óptimo.
No existe un código óptimo para la fuente puesto que $\log_4 \frac{1}{P_i}$ no es entero $\forall i$

$$\left(\log_4 \frac{1}{1/2} = \log_4 2 = 0{,}5 \text{ no es entero}\right)$$

licamos Huffman:

$\vec{P}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$

$$\bar{L} = 1 \ \frac{\text{símbolo cuaternario}}{\text{símbolo fuente}}$$

$$\boxed{\eta =} \frac{H_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{1} = \frac{1}{2} \cdot \log_4 2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \log_4 4\right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Esta codificación no nos sirve. Tenemos que mejorar la eficiencia.

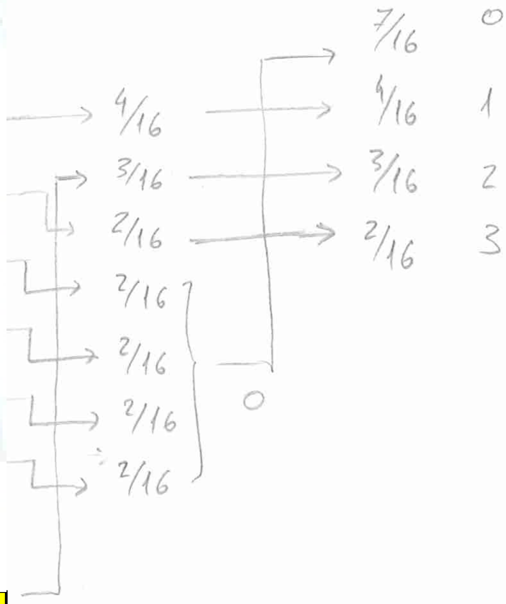
ejorar la eficiencia con extensión de fuente:

camos extensión de fuente de orden 2: (codificador los símbolos fuente de 2 en 2)

$\{a, b, c\}$ $\quad A_F^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ $\quad \vec{P}^2 = \{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\}$

$$\vec{P}^2 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right\}$$



$$2 + (n-2) \bmod (s-1) = 2 + (9-2) \bmod (4-1) = 2+1 = 3$$

$$\sum_i l_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \left(2 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot 4 = \frac{13}{8} \quad \frac{\text{4. cuaternarias}}{\text{2 simb. fuente}}$$

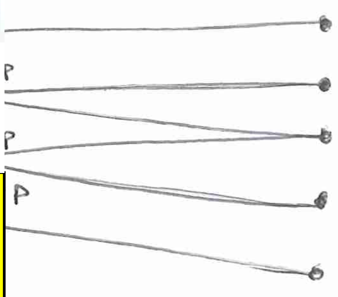
$$\frac{\bar{L}^2}{2} = \frac{13}{16} \quad \frac{\text{4. cuaternaria}}{\text{símbolos fuente}}$$

$$\eta = \frac{H_4(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{3/4}{13/16} = \boxed{0,92}$$

Enero 2012

...blema 1.

$$\underset{\substack{r\times s \\ \text{entradas} \nearrow \ \nwarrow \text{salidas}}}{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Y	P_Y
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$
2	ε
3	$\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

...lo de $H(Y)$:

$$H_2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}}_{Y_1}, \underbrace{\tfrac{1}{4} - \tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{1}{4} - \tfrac{\varepsilon}{2}, \varepsilon}_{Y_2}\Big) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{H_2\left(\tfrac{1}{2}\right)}} + \tfrac{1}{2} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{H_2(Y_1)}} + \tfrac{1}{2} \cdot H_2(Y_2) =$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{H_2(Y_2)}_{(*)} =$$

$H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ bit

$, \frac{1/4}{1/2} \}$

$$\ldots) = H_2\Big(\overbrace{\frac{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}}{1/2}, \frac{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}}{1/2}}^{Y_4}, \overbrace{\frac{\varepsilon}{1/2}}^{Y_3}\Big) = \cancel{H_2(2\varepsilon) + 2\varepsilon \cdot H(Y_3) +}$$

ponderado de antes

$$H_2(2\varepsilon) + 2\varepsilon \cdot \underset{0}{\cancel{H_2(Y_3)}} + (1 - 2\varepsilon) \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{H_2(Y_4)} = H_2(2\varepsilon) + (1 - 2\varepsilon) =$$

$$\boxed{H_2(2\varepsilon) + 1 - 2\varepsilon}$$

$$\boxed{) = 1{,}5 + \frac{1}{2}\left(H(2\varepsilon) + 1 - 2\varepsilon \right)}$$

lo $H(Y/X)$:

$$Y/X) = \sum_i H(Y/X=x_i) \cdot p(X=x_i) \quad (*)$$

$$0) = \frac{p(y=0)}{p(y=0/x=0)} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

$$) = \frac{p(y=4)}{p(y=4/x=3)} = \frac{1}{4}$$

$1) = p(y=2)$ por el comportamiento del canal y el valor de las
dades de Y son equiprobables.

$$(\cancel{1^{\circ}\text{ fila de } Q}) \cdot \frac{1}{4} + H_2(2^{\circ}\text{ fila } Q) \cdot \frac{1}{4} + H_2(3^{\circ}\text{ fila}) \cdot \frac{1}{4} + H(\cancel{4^{\circ}\text{ fila}}) \frac{1}{4} =$$

0 (duda 0) entra 1 y sale 1. 0

$$(p) \cdot \frac{1}{4} + H(p) \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{H_2(p)}{2}}$$

$$) = H(Y) - H(Y/X) = 1{,}5 + \frac{1}{2}\left(H_2(2\varepsilon) + 1 - 2\varepsilon \right) - \frac{H_2(p)}{2}$$

$$y=2) = \varepsilon = p(y=2/x=1) \cdot p(x=1) + p(y=2/x=2) \cdot p(x=2) =$$

$$= p \cdot \frac{1}{4} + p \cdot \frac{1}{4} = \frac{p}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{p}{2}}$$

$$) = 1{,}5 + \frac{1}{2}\left(H\left(2 \cdot \frac{p}{2}\right) + 1 - 2\,\frac{p}{2} \right) - \frac{H(p)}{2} =$$

$$= 1{,}5 + \frac{1}{2}\left(H(p) + 1 - p \right) - \frac{H(p)}{2} =$$

$$= 1{,}5 + \cancel{\frac{H(p)}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{p}{2} - \cancel{\frac{H(p)}{2}}$$

$$(;Y) = 1{,}5 + \frac{1}{2} - \frac{p}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

de Shannon de codificación de canal.

$$V_F \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_c \le V_c$$

$$\boxed{V_F \cdot \bar{L} \le V_c \cdot \frac{1}{\bar{L}_c}}$$

$$\boxed{V_F \cdot H_s(\vec{p}) \le V_c \cdot C}$$

ma 11

$$— \boxed{\text{Cod canal}} — \boxed{\text{Canal } s=4}$$

$\bar{L}_c$

$\frac{1}{c} = 3$ u. cuaternarias

$\frac{1}{3}$ u. cuaternarias

$$c = \frac{1/3}{\log_4 2} = \frac{1/3}{1/2} = \boxed{\frac{2}{3} \text{ bits}}$$

$n \qquad n \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_c$

$$\boxed{F} \rightarrow \boxed{\text{Cod F}} \rightarrow \boxed{\text{Cod Canal}} \rightarrow \boxed{\text{Canal}} \rightarrow \cdots$$

$V_F, H_s(\vec{p}) \qquad \bar{L} \qquad \bar{L}_c \qquad V_c, C$

$$\frac{n \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_c}{V_c} \xrightarrow[\text{sea mínimo}]{\text{Para que}} t_{n\,min} = \frac{n \cdot \bar{L}_{min} \cdot L_{c\,min}}{V_c}$$

$$= \frac{n \cdot H_4(\vec{p}) \cdot 1/c}{V_c}$$

$) = \log_4 2 = 0{,}5$ u. cuaternarias

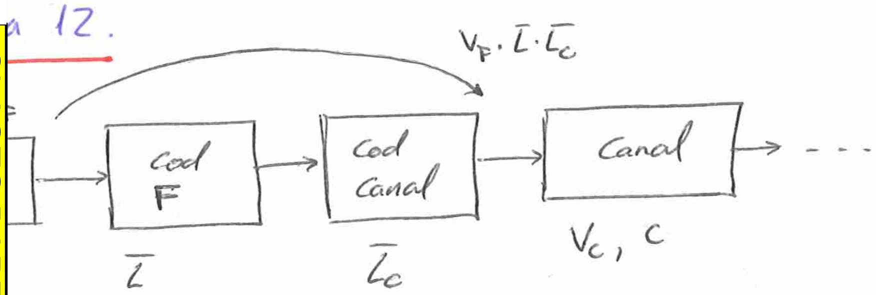
$\frac{1}{3}$ u. cuaternarias (apart. a) (unidades del canal)

$$\boxed{\frac{n\cdot 0{,}5\cdot 3}{1000} \text{ segundo}}$$

000

000

a 12.



ada de información d canal ≤ tasa de transmisión de inf. por el canal.

$$N\cdot V_F\cdot\bar{L}\cdot\bar{L}_c \le V_c$$

deal:

$$N\cdot V_F\cdot H_3(\vec{p})\cdot\frac{1}{C} \le V_c$$

$$N \le \frac{V_c\cdot C}{V_F\cdot H_3(\vec{p})} = \frac{10\cancel{00}\cdot 1/2}{1\cancel{00}\cdot H_3(0,1)} = \frac{5}{H_3(0,1)} =$$ si fuese (no es) 7,78

$= \frac{1}{2}\, C_{ideal} = \frac{1}{2}$ u. ternarias

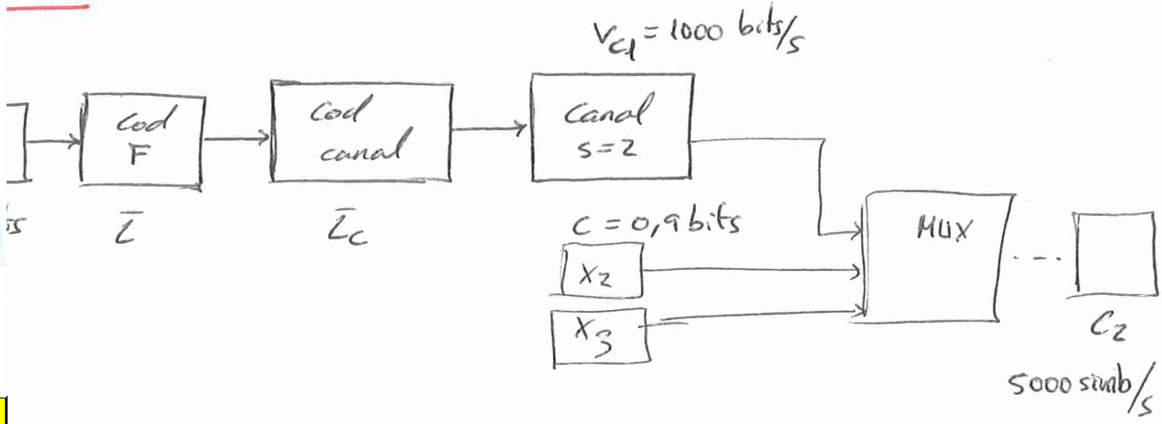
‖ 1 u. ternaria

$(\vec{p}) = H_3(0,1)$ u. ternarias

$$N_{max} = \left\lfloor \frac{5}{H_3(0,1)} \right\rfloor$$

... de octubre de 2013

... a 5



...ue la transmisión sea fiable se debe cumplir el th. de Shannon ...icación de canal:

En el 1er canal:

$$V_1 \cdot \bar{L}_1 \le V_{c1} \cdot \frac{1}{\bar{L}_{c1}}$$

$$V_1 \cdot H_2(\vec{p}) \le 1000\ C_1 \longrightarrow \boxed{V_1 \le \frac{100\cancel{0} \cdot 0{,}9}{1\cancel{0}} = 90\ \frac{simbs}{s}}$$

...debe cumplir el th. de Shannon en el 2º canal.

$$\boxed{V_1 \cdot H \ \ldots + V_3 \cdot H(x_3) \le V_{c2} \cdot C_2}$$

$$90 \cdot 10 + 50 \cdot 10 + 25 \cdot 10 \le 5000\ C_2$$

$$C_2 \ge$$

. 6.

$H(X_1) = 1$ bit/simb

X_1 $\quad V_1 = 1000 \frac{simb}{s}$

$= 2$ bit

X_2 $\quad V_2 = 100 \frac{simb}{s}$

$= 3$ bit

X_3 $\quad V_3 = 50 \frac{simb}{s}$

MUX

Canal ternario

$C = \frac{1}{2} C_{ideal}$

$V_{c_{min}}$?

Shannon:

$$\cdot H(x_1) + V_2 \cdot H(x_2) + V_3 \cdot H(x_3) \leq V_c \cdot C$$

tanto la Capacidad como las entropías tienen que estar en unidades ternarias.

entropías a u. ternarias:

$$) = \frac{1}{\log_2 3} = 0,633$$

$$) = \frac{2}{\log_2 3} = 1,266$$

$$_3) = \frac{3}{\log_2 3} = 1,9$$

$$V_c \geq \frac{1000 \cdot \frac{1}{\log_2 3} + 100 \cdot \frac{2}{\log_2 3} + 50 \cdot \frac{3}{\log_2 3}}{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{V_{c_{min}} = \qquad \frac{simb}{s}}$$

$$F_{uso} = \frac{\text{tasa de entrada}}{\text{tasa de trans del canal}}$$

$$\frac{v_1 \cdot H(x_1)}{V_c \cdot C} =$$

$$\frac{v_2 \cdot H(x_2)}{V_c \cdot C} =$$

$$\frac{v_3 \cdot H(x_3)}{V_c \cdot C} =$$

Comunicación de Datos

21 de octubre de 2013

________________________ D.N.I.: ______________

tos) De un grupo de estudiantes, el 25 % no están convenientemente preparados para la l. Sin embargo, el 25 % de estos son aceptados tras una prueba de selección, que es superada de los estudiantes.

: el resultado de la prueba, ¿cuánta información recibe un estudiante que está suficientemente ırado?

si la selección se decide tirando una moneda al aire.

ıtudiante preparado supera la prueba de selección con una probabilidad p tal que

$$\frac{3}{4}p + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

ıs, $p = 7/12$, de modo que obtiene una información igual a $H(7/12) \approx 0.98$ bits.

selección es completamente aleatoria hay igual probabilidad de ser aceptado o rechazado, ndependencia de la preparación. Así entonces, la información recibida es $H(1/2) = 1$ bit.

o). ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \ldots, 1/16)?$$

ıntificarla? Razónelo.

edida en que todo mensaje de una fuente discreta es una representación simbólica, una fuente codificador específico. En este caso el alfabeto es decimal y el código es una asignación uno no las probabilidades no son potencias decimales, esta fuente (o código) posee redundancia, ual a la diferencia entre la longitud $L = 1$ y la entropía decimal $H_{10}(X)$, que es la mínima osible.

$$L - H_{10}(X) \approx 0{,}097.$$

os) Calcule la eficiencia de los códigos compactos cuaternarios de los conjuntos de símbolos ilidades dadas por los siguientes vectores:

1/6, 1/6, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18)

1/512 para todo i.

dificación Huffman de estos símbolos —una de ellas— tiene la estructura

$$\boxed{1/6, \boxed{1/6, 1/12, 1/12, 1/12}, \boxed{1/12, 1/18, 1/18, 1/18}, \boxed{1/18, 1/18, 1/18}}.$$

anto, el código compacto tiene todas sus palabras de longitud 2, excepto la correspondiente de los símbolos con probabilidad 1/6, que es de longitud 1. La longitud del código es $2 - 1/6 = 11/6$ y la eficiencia

$$\eta = \frac{H_4(X)}{L} \approx 94\,\%.$$

ódigo compacto cuaternario para esta fuente uniforme consta de 170 palabras de longitud 4 palabras de longitud 5. Tiene una longitud de $L \approx 4{,}66$ y su eficiencia es $\eta = \log_4 512/L \approx$ %.

tos) Obtenga la capacidad del canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & \varepsilon & \varepsilon & & & & \\ & & & & \varepsilon & \varepsilon & p_n & \dots & p_2 & p_1 \end{bmatrix}.$$

ula $I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$ tenemos que

$$H(X \mid Y) = 2\varepsilon H(X)$$

hay incertidumbre acerca del símbolo transmitido para dos de los posibles símbolos de nal. En consecuencia $I(X;Y) = (1-2\varepsilon)H(X)$ es máxima con entradas equiprobables y la l canal es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits/símbolo.

de una manera más convencional, si calculamos $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$ tenemos que

$$H(Y \mid X) \overset{(1)}{=} H(p_1, p_2, \dots, \varepsilon, \varepsilon) \overset{(2)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon) H\Big(\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{1-2\varepsilon}\Big)$$

por tener Q filas con los mismos elementos y (2) resulta de aplicar la propiedad de partición;

$$\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \varepsilon, \varepsilon, \overline{\alpha} p_1, \dots, \overline{\alpha} p_n\big) \overset{(3)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon) H\Big(\frac{\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \overline{\alpha} p_1, \overline{\alpha} p_n}{1-2\varepsilon}\Big)$$

$$2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1-2\varepsilon)\big(H(\alpha) + H\big(\frac{p_1, \dots, p_n}{1-2\varepsilon}\big)\big)$$

por la aplicación de la propiedad de partición y (4) por una segunda aplicación de la misma ancelando términos comunes se llega a $I(X;Y) = (1-2\varepsilon)H(\alpha)$, que es máxima si $\alpha = 1/2$, entradas equiprobables. La capacidad es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits.

os) En cierto sistema de comunicaciones, los mensajes de una fuente discreta sin memoria ía 10 bits por símbolo y tasa de transmisión v_1 se transmiten a través de un canal binario 0,9 bits/símbolo y régimen 1000 símbolos/s. La salida de este canal se multiplexa con ntes, X_2 y X_3, de entropías $H(X_2) = H(X_3) = 10$ bits por símbolo y velocidades $v_2 = 50$ bolos/s, y los mensajes multiplexados se transmiten por otro canal de capacidad C_2 cuya misión es de 5000 símbolos/s. Si el receptor ha de recuperar fidedignamente los mensajes entes, acote los valores de v_1 y C_2.

isión es fiable si lo es por los dos canales. Para que lo sea por el primero debe cumplirse

$$v_1 H(X_1) < v_{c_1} C_1 \Rightarrow v_1 < \frac{v_{c_1} C_1}{H(X_1)} = 90 \text{ símbolos/s}; \qquad (1)$$

a por el segundo, sobre el que se multiplexan las fuentes X_2 y X_3 más la salida del primer sario y suficiente que

$$v_1 H(X_1) + v_2 H(X_2) + v_3 H(X_3) < v_{c_2} C_2 \Rightarrow C_2 > \frac{10 v_1 + 750}{5000} \text{ bits/símbolo.} \qquad (2)$$

es (1) y (2) delimitan las combinaciones (v_1, C_2) factibles para la transmisión fiable.

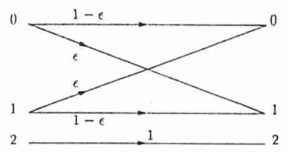
) Tres fuentes discretas sin memoria independientes de entropías 1 bit por símbolo, 2 bits 3 bits por símbolo, respectivamente, comparten un canal ternario de capacidad la mitad a primera emite 1000 símbolos por segundo, la segunda 100 símbolos por segundo y la bolos por segundo:

s la tasa mínima de transmisión del canal que hace posible enviar sin error los mensajes es fuentes?

tasa mínima, ¿qué fracción de su régimen de transmisión dedica el canal a cada fuente?

y determine $q(i)$, la probabilidad de usar el canal i-ésimo. Interprete C como el promedio de las capacidades de los canales individuales más la información aportada por la selección de un canal.

b) Use el resultado anterior para determinar la capacidad del canal de la figura.



Problema 6. Considere un canal óptico síncrono por el que se envían señales binarias (luz, no luz). A la salida de dicho canal, un fotodetector sólo se excita cuando recibe luz, fallando con una probabilidad $p = 0{,}1$. Con el objeto de mejorar la transmisión, se considera el uso de dos canales de estos de las siguientes formas:

a) Se envía la misma señal por los dos canales.

b) Se envían señales complementarias.

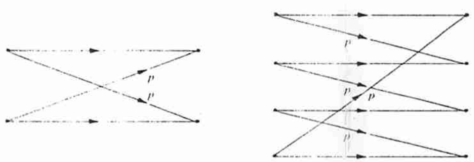
¿Cuál es la mejor alternativa?

Problema 7. Dada una fuente cuyo alfabeto tiene 64 símbolos equiprobables, los cuales se transmiten a través de un canal binario simétrico sin memoria con probabilidad de error $p = 0{,}2$.

a) ¿Cuál es el número mínimo de caracteres binarios necesarios para transmitir un símbolo de la fuente con un porcentaje de errores tan pequeño como se quiera?

b) Si se transmite por el canal a razón de 10 caracteres binarios por segundo, ¿cuál es la velocidad de transmisión de información?

Problema 8. Suponga una fuente binaria sin memoria que genera ambos símbolos equiprobablemente. Suponga que se considera la utilización de dos canales alternativos para la transmisión de los mensajes de la fuente.

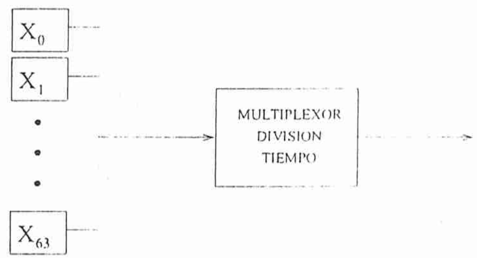


a) ¿Cuál es más conveniente, si ambos canales transmiten un símbolo por unidad de tiempo y el coste de transmisión de todos los símbolos es siempre el mismo? ¿Por qué?

b) ¿Existe alguna combinación de los parámetros régimen de transmisión y coste por símbolo del canal 2 para la que ambas alternativas sean equivalentes?

Problema 9. X_i ($i = 0, 1, \ldots, 63$) es una fuente binaria de entropía 0,5 bits/símbolo, y el multiplexor coge en el j-ésimo intervalo ($j = 0, 1, 2, \ldots$) el símbolo de la fuente X_i ($i = j \mod 64$).

Si se quieren enviar los mensajes emitidos por dichas fuentes sobre un canal de capacidad 0,7 bits/símbolo y capaz de transmitir 1000 dígitos binarios por segundo, ¿cuál es la máxima velocidad a la que se pueden transmitir símbolos de cada una de las fuentes dadas sin error?



Problema 10. Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que se considera la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente en el menor tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,8 bits, y el otro un canal ternario de capacidad 0,8 unidades de información ternarias. Si cada uno de los canales tiene un régimen de transmisión de 1000 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande?

Problema 11.

a) ¿Cuál sería la capacidad en bits de un canal cuaternario cuyo codificador ideal para transmisión fiable tuviese una longitud de código 3?

b) ¿Cuál sería, en media, el tiempo mínimo necesario para trasmitir una secuencia aleatoria de n símbolos binarios equiprobables si el régimen de transmisión del canal es de 1000 símbolos por segundo?

Problema 12. Considere una clase de fuentes que generan símbolos de un alfabeto binario (representemos tales símbolos por 0 y 1) a razón de cien por unidad de tiempo, de forma que una secuencia típica de símbolos de dicha fuente contiene un 10% de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse a través de un canal ternario de capacidad mitad de uno ideal que transmite mil símbolos por unidad de tiempo. ¿Cuántas fuentes de esa clase pueden multiplexarse sobre dicho canal?

Examen 2007.

ılema 3 (2 puntos). Considere una máquina de escribir de 26 teclas.

ɔulsar una tecla da como resultado la impresión de la letra asociada. ¿cuál es la capacidad en ¡?

ɔra suponga que pulsando una tecla se imprime la letra correspondiente o la siguiente (equibablemente). Así, $A \to A$ o B, …, $Z \to Z$ o A. ¿Cuál es la capacidad?

:ión.

ıo hay error entre la tecla pulsada y la impresa, la capacidad es igual a la entropía de la letra ida, $\log_2 26$.

ada pulsación puede dar lugar, equiprobablemente, a una de dos letras, la idéntica y la siente, entonces la situación corresponde a la de un canal con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

es *simétrico*. En consecuencia, la capacidad del canal es

$$C = \log_2 26 - H_2(1/2) = \log_2 26 - 1 \text{ bits}.$$

· Enxeñería Telemática
Vigo

Fundamentos de Telemática
Boletín de problemas núm. 2

›blema 1

›termine la eficiencia de un código cuaternario compacto de una fuente que genera seis símbolos ›uiprobablemente.

›uál es el número máximo de fuentes como la anterior que se pueden multiplexar sobre un canal ›eal cuaternario con un régimen de transmisión 10 veces superior al de cada una de las fuentes?

›blema 2. Considere una fuente que genera, a intervalos regulares, símbolos de un alfabeto binario ›ntemos tales símbolos por 0 y 1), de forma que una secuencia típica de símbolos de dicha fuente › un 60 % de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse a través de un canal ideal › que transmite un símbolo por unidad de tiempo. ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para enviar › una secuencia de n símbolos de la fuente (n suficientemente grande)?

›blema 3. Considere una clase de fuentes que generan símbolos de un alfabeto binario (represente›s símbolos por 0 y 1) a razón de **cien** por unidad de tiempo, de forma que una secuencia típica ›los de dicha fuente contiene un 50 % de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse › de un canal ideal ternario que transmite **mil** símbolos por unidad de tiempo. ¿Cuántas fuentes ›lase pueden multiplexarse sobre dicho canal?

›blema 4. Dada una fuente cuyo vector de probabilidades es $\vec{p} = (1/8, 1/2, 1/8, 1/4)$, se pide:

›lcule la longitud mínima de un código binario.

›em de uno ternario.

›tenga un código ternario compacto con longitud de bloque unitaria y calcule su eficiencia.

›blema 5. Dada una fuente cuaternaria sin memoria cuya distribución de probabilidades es {0,5, ›25, 0,125}, construya —con símbolos de un alfabeto también cuaternario— un código unívoca›ecodificable cuya eficiencia sea de al menos el 90 %.

›blema 6. Una fuente ternaria de información genera símbolos con probabilidades 0,4, 0,3 y 0,3.

›lcule la cantidad de información por símbolo.

›lcule las probabilidades de todos los posibles mensajes de dos símbolos.

›lcule la cantidad de información por mensaje de dos símbolos.

›lcule la redundancia de un código binario compacto para los mensajes de dos símbolos.

›lcule la tasa de transmisión (bits por segundo) para el código del apartado anterior si la duración › cada símbolo de la fuente es, respectivamente, de 1, 2 y 3 ms.

›blema 7. Aunque las longitudes de las palabras de un código de longitud variable compacto ›iones complicadas de las probabilidades de los mensajes $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, puede decirse que los › menos probables se codifican mediante palabras más largas. Suponga que las probabilidades de ›ajes se dan en en orden decreciente $p_1 > p_2 \geq \cdots \geq p_m$.

›muestre que, para cualquier código Huffman binario, si $p_1 > 2/5$, entonces al símbolo más ›bable le corresponde una palabra de longitud 1.

a) ¿Cuánta información proporciona el mes?

b) ¿Cuánta información proporcionan el mes y el día del mes?

c) ¿Cuánta información proporciona el día del mes si el mes es conocido?

Solución. Sea M la variable aleatoria que señala el mes de la fecha escogida y sea D la que indica el día del mes.

a) Se pide $H(M)$, que vale

$$\begin{aligned} H(M) &= H\left(\frac{31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31}{365}\right) \\ &= \frac{28}{365}\log\frac{365}{28} + 4\times\frac{30}{365}\log\frac{365}{30} + 7\times\frac{31}{365}\log\frac{365}{31} \\ &= \log 365 - \frac{28}{365}\log 28 - 4\times\frac{30}{365}\log 30 - 7\times\frac{31}{365}\log 31 \approx 3{,}58 \text{ bits.} \end{aligned}$$

b) $H(M,D) = \log 365 \approx 8{,}51$ bits.

c) $H(D\,|\,M) = H(M,D) - H(M)$ por la regla de la cadena. Por tanto,

$$H(D\,|\,M) = \frac{28}{365}\log 28 + 4\times\frac{30}{365}\log 30 + 7\times\frac{31}{365}\log 31 \approx 4{,}92 \text{ bits.}$$

la fuente.

Solución

a) Como la fuente genera 16 símbolos equiprobables, la codificación compacta en binario de tales símbolos uno a uno es óptima, dando lugar a palabras de 4 bits por cada símbolo de fuente. El codificador de fuente emitirá símbolos binarios a tasa $4v_f$ y la fracción de tiempo que el canal está en uso será

$$\frac{4v_f}{v_c} = \frac{4v_f}{8v_f} = \frac{1}{2}.$$

b) En este caso, la codificación compacta de los símbolos uno a uno no produce un código óptimo, sino un código de 6 palabras de un símbolo "octario" y 10 de dos símbolos "octarios" (basta aplicar el algoritmo de Huffman). Así pues, la longitud del código es

$$L_f = \frac{1}{16}(1\times 6 + 2\times 10) = \frac{13}{8} \text{ símbolos octarios / símbolo de fuente.}$$

Y la fracción de tiempo que se utiliza el canal será

$$\frac{L_f v_f}{v_c} = \frac{(13/8)v_f}{2v_f} = \frac{13}{16}.$$

Problema 1 (2 puntos). Sea el canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

a) Se transmiten los símbolos con una distribución de probabilidad $(1/2, 1/8, 1/8, 1/4)$. A la recepción de un símbolo, ¿cuánta información falta, en media, para saber con seguridad el símbolo transmitido?

b) Calcule la información transmitida por símbolo si se sabe que ni se transmite x_1 ni se recibe y_4.

a) La información que falta para poder determinar sin error el símbolos transmitido es

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y).$$

Para calcularla, partiremos de la matriz de probabilidades conjuntas de (X, Y)

$$\operatorname{diag}(1/2, 1/8, 1/8, 1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = R.$$

Así, tenemos que

$$H(X, Y) = \frac{1}{32}(-12\log 12 - 6\log 6 - 4 \cdot 2\log 2 - 6\log 1) + \log 32 = 4 - \frac{9}{16}\log_2 3.$$

y que

$$H(Y) = H(14/32, 5/32, 5/32, 9/32) = \frac{1}{32}(-14\log 14 - 10\log 5 - 9\log 9) + \log 32$$
$$= 5 - \frac{7}{16} - \frac{1}{32}(14\log_2 7 + 10\log_2 5 + 18\log_2 3).$$

Finalmente.

$$H(X \mid Y) = \frac{9}{16} - \frac{7}{32}\log_2 7 - \frac{5}{16}\log_2 5 \text{ bits.}$$

b) Si no se transmite x_1 ni se recibe y_4 la matriz de probabilidades conjuntas de (X', Y') será

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(que se obtiene eliminando la primera fila —x_1— y la última columna —y_4— de R, y renormalizando los valores para que sumen 1). La información transmitida será el valor de $I(X'; Y')$, es decir,

$$H(X') + H(Y') - H(X', Y') = \frac{2}{9} + \frac{4}{3}\log_2 3.$$

Observe que, en este caso, $H(X') = H(Y')$.

Problema 2 (1 punto). Dada una fuente simétrica con alfabeto de 243 símbolos:

$243 - 13 = 230$ de longitud 8, de manera que la longitud del código valdrá

$$L = \frac{1}{243}(13 \times 7 + 230 \times 8) = \frac{1931}{243}.$$

Y la eficiencia será

$$\eta = \frac{H_2(X)}{L} = \frac{243}{1931}\log_2 243 \approx 99{,}7\,\%.$$

b) La eficiencia es uno: basta con observar que $243 = 3^5$.

Problema 3 (2 puntos). Se quieren transmitir eficiente y fielmente los mensajes de la fuente anterior por un canal cuaternario de capacidad 1 bit.

a) ¿Cuál es la longitud del código de fuente? ¿Y la del código de canal?

b) Calcule la fracción de tiempo que se usaría el canal si su régimen fuese unitario y el de la fuente, cien veces menor.

a) Para una transmisión eficiente el código de fuente tendría que tener una longitud $L_f = H_4(X) = \log_4 243$ símbolos cuaternarios por cada símbolo de fuente. Y para una transmisión fiel, el código de canal debería tener una longitud no menor de $L_c = 1/C = 2$ ($C = 1$ en bits es $C = 1/2$ en unidades cuaternarias).

b) La fracción de tiempo de uso del canal se calcula como

$$\frac{v_f L_f L_c}{v_c}.$$

Poniendo $v_f/v_c = 1/100$, $L_f = \log_4 243$ y $L_c = 2$ resulta

$$\frac{v_f L_f L_c}{v_c} = \frac{\log_4 243}{50} \approx 8\,\%.$$

Problema 4 (2 puntos). El polinomio $g(x) = (x - 1)(x^3 + x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1)$ engendra un código cíclico $[21, 11]$.

a) Sabiendo que la longitud máxima de una ráfaga de peso w es $n - \lceil (n - w)/w \rceil$, demuestre que en el código no existen vectores de peso 2.

b) Sepa que tampoco hay vectores de peso impar en el código. ¿Cuál es la salida del decodificador si se recibe el polinomio $x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$?

a) Considérense los errores dobles como ráfagas de error e de peso $w = 2$ y de cierta longitud. Así, la longitud máxima de e será

$$21 - \lceil (21 - 2)/2 \rceil = 11$$

y cabe distinguir dos casos: 1) si e fuese una ráfaga de longitud 10 o menor, entonces sería detectable, pues el grado de $g(x)$ es 10; 2) si e fuese una ráfaga de longitud 11 tendría que ser $x^{10} + 1$ o una cualquiera de sus rotaciones, y tampoco podrá ser una palabra del código porque $g(x)$ es el único polinomio del código de grado 10. En consecuencia, en ningún caso e pertenece al código, como se quería probar.

Examen de Fundamentos de Telemática

3 de septiembre de 2009

Nombre: ______________________________ D.N.I.: ______________

Problema 1 (2 puntos).
Un estudio sobre el personal de cierta empresa de telecomunicaciones revela que el 70 % de sus ingenieros son hombres, y que el 25 % de la plantilla no rebasa los 30 años de edad (≤ 30), con un 20 % mayor de 40. Además, el número de mujeres en este último tramo (> 40) es despreciable, y las más jóvenes (≤ 30) duplican al resto de sus compañeras.

1. Considerando únicamente esta información, ¿qué incertidumbre existe a priori sobre el grupo humano (definido por sexo e intervalo de edad) donde se situará una nueva contratación?
2. ¿Y si nos dicen que el/la nuevo/a no es un hombre mayor de 30 años?

Solución.

1. La respuesta es $H(S,E)$, donde S y E son, respectivamente, las variables aleatorias del sexo y grupo de edad de un empleado elegido al azar, cuya f.m.p. conjunta se obtiene fácilmente a partir de los datos.

   Así, $H(S,E) = H(0,1,0,2,0,05,0,45,0,2)$
2. Se resuelve de forma idéntica, pero recalculando la f.m.p. conjunta de las variables S y E.

   Ahora, $H(S,E) = H(1/7, 2/7, 4/7)$

Problema 2 (1 punto).
Considere una fuente binaria que genera dos veces más símbolos de un tipo que del otro. Determine una buena cota superior para la longitud de un código compacto que codifique los símbolos de dicha fuente en grupos de ocho.

Solución.
Por el teorema de Shannon de codificación de fuente,

$$L < H_2(1/3) + \frac{1}{8}$$

Problema 3 (2 puntos).

1. ¿Cuál es la tasa de codificación de un codificador ideal de un canal cuaternario de 1 bit de capacidad?
2. Utilizando el resultado anterior, determine la entropía (en bits) de una fuente binaria si se sabe que la transmisión fiel de sus mensajes a través del sistema dado sólo es posible cuando el régimen de transmisión de la fuente no supera el del canal.

Problema 4 (3 puntos).
Considere el código lineal binario C con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{pmatrix}$$

en donde H_4 es matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario $[15,11]$.

1. Indique la longitud, la dimensión y la distancia de C.
2. Demuestre que C sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?
3. Supuesto que se conoce la distribución de pesos del código Hamming ($\{A_i\}$), calcule el número de palabras de peso mínimo de C.

Solución.

1. Las palabras del código C se obtienen simplemente por concatenación de dos palabras cualesquiera del código Hamming binario $[15,11]$. De ahí se deduce que la longitud de C es 30; su dimensión, 22; y su distancia, 3, exactamente la misma que la del código Hamming binario $[15,11]$.
2. Por la construcción del código, se puede corregir a lo sumo un error en cada una de las dos mitades de una palabra. Sólo se corrigen, por tanto, errores simples o dobles. Se corrigen todos los simples (30), por ser 3 la distancia del código; y se corrigen 225 errores dobles, que son simplemente 30 unidades menos que todos los síndromes no nulos.
3. El peso de las palabras de peso mínimo (no nulas, se sobrentiende) es 3; y, por construcción, C tendrá $2A_3$ palabras de peso 3.

Problema 5 (1 punto).
Determine, exponiendo pormenorizadamente las razones, la distancia del menor código cíclico generado por el polinomio $(x-1)(x^7+x+1)$, donde x^7+x+1 es primitivo.

Solución.
Se trata de un código cíclico de longitud 127 y redundancia 8, cuyo polinomio generador tiene 4 coeficientes no nulos

$$(x \quad 1)(x^7+x+1) = x^8 \quad x^7 + x^2 \quad 1$$

Dado que el polinomio generador tiene peso 4, la distancia del código sólo puede ser 2 o 4. Pero como el factor primitivo de grado 7 del polinomio generador garantiza la detección de todos los errores dobles, la distancia del código es 4.

Problema 6 (1 punto).
Para cualquiera de las estrategias de retransmisión que conoce, ¿se obtiene la cadencia eficaz máxima cuando el número de retransmisiones por trama es mínimo? Aclare esta cuestión.

Solución.

Problema 1. Dos tiradores, por turno, disparan sobre una diana. El tirador A dispara dos veces en cada turno, con una probabilidad de dar en la diana en cada disparo de $1/2$. El tirador B dispara tres veces en cada turno, con una probabilidad de dar en la diana en cada disparo de $(1/3)i$, siendo i el número de orden del disparo ($i = 1, 2, 3$). ¿Qué información nos da la diana sobre la identidad del tirador después de que haya finalizado su turno?

Problema 2. Ha comprobado 10 resultados de una quiniela de fútbol (tradicional, de 14 partidos) y tiene 9 aciertos y un fallo. Suponiendo que los resultados de cada partido (1–X–2) son equiprobables, ¿cuánta incertidumbre acerca de si tiene premio (12, 13 o 14 aciertos) eliminaría el conocimiento de dos nuevos resultados?

Problema 3. Una competición entre dos equipos queda resuelta cuando uno de ellos gana cuatro partidos al otro. Sea X la variable aleatoria que representa los resultados de los partidos de una competición entre los equipos A y B: valores posibles de X son AAAA, BABABAB, etc. Sea Y el número de partidos jugados, que varía entre 4 y 7. Suponiendo que ambos equipos tienen la misma probabilidad de ganar un partido y que los partidos son independientes, calcule $H(X), H(Y), H(Y \mid X)$ y $H(X \mid Y)$.

Problema 4. Cierto jugador tramposo tiene un dado trucado de tal forma que la probabilidad de obtener un uno es $2/3$, siendo los resultados restantes equiprobables. Desafortunadamente, ha guardado ese dado en una caja donde había otros dos dados legales, idénticos en apariencia al primero. Si elige uno de ellos al azar.

a) ¿cuánta información aporta el resultado de una única tirada acerca de la legalidad del dado?

b) ¿cuánta incertidumbre restaría aún después de conocido el resultado de dos lanzamientos?

Problema 5. Considere el siguiente experimento. Se dispone de dos monedas: una con cara y cruz, y otra con dos caras. Se elige una de ellas al azar y se lanza al aire dos veces consecutivas, anotándose el número de caras como resultado del experimento. Calcule la información sobre la moneda elegida que nos proporciona dicho resultado.

Problema 6. En un instituto las clases se imparten a grupos de 15 o 30 alumnos.

a) Suponga que se sabe que, en un grupo elegido al azar, no hay dos alumnos que cumplan años el mismo día. ¿Cuánta incertidumbre existe acerca del tamaño del grupo?

b) Ídem si se sabe que el grupo escogido sí contiene alumnos nacidos el mismo día.

Problema 7. Sean X e Y variables aleatorias discretas con valores pertenecientes a los conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$, respectivamente. Sea $Z = X + Y$.

a) Demuestre que $H(Z \mid X) = H(Y \mid X)$.

b) Razone que, si X e Y son independientes, entonces $H(Y) \leq H(Z)$ y $H(X) \leq H(Z)$. Así, la adición de variables aleatorias independientes añade incertidumbre.

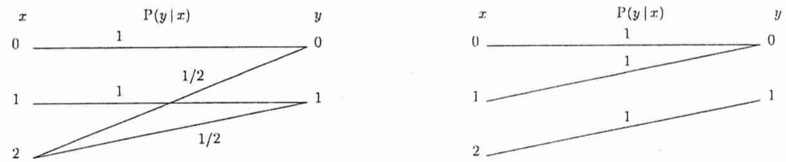
c) Dé un ejemplo de variables aleatorias (necesariamente dependientes) en las que $H(X) > H(Z)$ y $H(Y) > H(Z)$.

d) ¿En qué condiciones se cumple que $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

Problema 8. Una fuente X produce tres símbolos con las siguientes probabilidades

$$\mathrm{P}_X(0) = 1/4, \quad \mathrm{P}_X(1) = 1/4, \quad \mathrm{P}_X(2) = 1/2.$$

Cada símbolo de la fuente, x, se transmite directa y simultáneamente a través de dos canales con salidas y y z y probabilidades de transición como las indicadas en la figura. Calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, $H(Y, Z)$.



$I(X;Y)$, $I(X;Z)$, $I(X;Y|Z)$, $I(X;Y,Z)$. Interprete las expresiones de la información mutua.

Problema 9. Dadas dos variables aleatorias X e Y con probabilidades conjuntas $\mathrm{P}(x_i, y_j) = p_{ij}$ dadas por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de X e Y?

b) ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de Y?

c) ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de X cuando ya se conoce el resultado de Y?

Problema 10. La rueda de una ruleta está dividida en 38 compartimentos de varios colores. La distribución de los compartimentos según el color es: 2 verdes, 18 rojos y 18 negros. El experimento consiste en arrojar una bola en la ruleta mientras gira. Los sucesos elementales, que la bola caiga en alguno de los 38 compartimentos, son equiprobables.

a) ¿Cuánta información proporciona el color?

b) ¿Cuánta información proporcionan el color y el número?

c) ¿Cuánta información proporciona el número si el color es conocido?

Problema 11. Suponga que lanzamos un dado que tiene dos caras numeradas con un 1, dos caras numeradas con un 2, y dos caras numeradas con un 3. A continuación, lanzamos una moneda el número de veces que indica el dado, y contamos el número de caras. ¿Cuánta información proporciona este experimento?

Problema 12. Los habitantes de cierto pueblo se dividen en dos grupos, A y B. La mitad de las personas del grupo A siempre dicen la verdad, $3/10$ mienten siempre y las demás siempre rehúsan contestar. En el grupo B, $3/10$ de las personas son sinceras, la mitad son mentirosas y las demás siempre rehúsan contestar. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar sea del grupo A. Sea $I = I(p)$ la información que sobre el tipo de respuestas de una persona proporciona su pertenencia a un grupo. Determine el valor máximo posible de I y el porcentaje de personas en el grupo A para el que dicho máximo se da.

Examen de Fundamentos de Telemática

11 de junio de 2007

: ______________________________ D.N.I.: ______________

ema 1. Dadas dos variables aleatorias X e Y con probabilidades conjuntas $\mathrm{P}(x_i, y_j) = p_{ij}$ la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

ınta incertidumbre se elimina al conocer el resultado de Y? (**1 punto**)

ınta información se obtiene al conocer el resultado de Y si se sabe que x_1 no puede ocurrir? ınto)

certidumbre que se elimina al conocer el resultado de Y es la entropía de Y. $H(Y) = \log 3$.

$= x_1$ no puede ocurrir, la distribución conjunta de probabilidades de X e Y pasa a ser

$$\begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 & 3/8 & 1/16 \\ 0 & 1/16 & 7/16 \end{pmatrix}.$$

ahora $H(Y)$ vale

$$H(Y) = H(1/16, 7/16, 1/2) = \log 2 + \frac{1}{2} H(1/8) \approx 1{,}27 \text{ bits}.$$

Examen de Fundamentos de Telemática

8 de septiembre de 2010

D.N.I.: ______________

1. Sean X e Y las variables aleatorias que representan la entrada y la salida, respectivamente, l discreto sin memoria.

ınto) Calcule $H(X\,|\,Y)$ si la función de masa de probabilidad conjunta está dada por la nte matriz

$$[p(x_i, y_j)] = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4q & 0 & 0 & 0 & 4p \\ 0 & 2q & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

$> 0,\ q > 0,\ p + q = 1.$

er modo. Si escribimos la matriz de probabilidades conjuntas como el producto

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & q & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

oceremos fácilmente que el canal es un canal 4-ario con borrado. Entonces, enumerando sus s como y_1, y_2, y_3, y_4 y $\epsilon = y_5$,

$$H(X\,|\,Y) = \sum_{j=1}^{5} P(Y = y_j) H(X\,|\,Y = y_j) = P(Y = \epsilon) H(X\,|\,Y = \epsilon)$$

e si la salida es $y_1, \ldots, y_4$ no hay duda sobre la entrada. Además $P(Y = \epsilon) = p$ y $H(X\,|\,Y =$ $H(X)$. Por lo tanto

$$H(X\,|\,Y) = pH(X) = pH\big(1/2, 1/4, 1/8, 1/8\big) = \frac{7}{4}p \text{ bits.}$$

ndo modo. Use la regla de la cadena $H(X, Y) = H(Y) + H(X\,|\,Y)$ y calcule $H(X, Y)$ y directamente a partir de los elementos de la matriz:

$$\begin{aligned} H(Y) &= H\big(q/2, q/4, q/8, q/8, p\big) = H(p) + qH\big(1/2, 1/4, 1/8, 1/8\big) \\ H(X, Y) &= H\big(q/2, q/4, q/8, q/8, p/2, p/4, p/8, p/8\big) \\ &= H(p) + pH\big(1/2, 1/4, 1/8, 1/8\big) + qH\big(1/2, 1/4, 1/8, 1/8\big) \\ &= H(p) + H\big(1/2, 1/4, 1/8, 1/8\big) \end{aligned}$$

nbos casos habiendo hecho uso de la propiedad de partición. Despejando

$$H(X\,|\,Y) = H(X, Y) - H(Y) = pH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) = \frac{7}{4}p \text{ bits.}$$

ınto) Calcule la capacidad del canal.

pacidad del canal 4-ario con borrado es $C = (1 - p)\log 4 = 2(1 - p)$ bits.

IO COMUNICACIÓN DE DATOS. CURSO 2014-2015.

. Conceptos básicos de Teoría de la Información (9 horas)
oducción
nición de entropía y entropía condicional. Propiedades
rema de Shannon de codificación de fuente
nición de información mutua y capacidad de canal. Propiedades
rema de Shannon de codificación de canal

. Codificación de fuente (9 horas)
esis de códigos instantáneos
oritmo de Huffman
ificación aritmética
ificación universal

. Codificación de canal (9 horas)
igos lineales. Caracterización matricial
odificación por síndrome
ección y corrección de errores. Probabilidad de error
igos Hamming
igos cíclicos
piedades de detección de errores

. Protocolos de retransmisión (6 horas)
ategias ARQ
lisis de la cadencia eficaz
ocolos de enlace de datos

. Canales de acceso múltiple (12 horas)
oritmos MAC: Aloha y Aloha ranurado, CSMA y CSMA/CD, CSMA/CA, anillos con paso de
go
lisis de eficiencia
es locales: Ethernet, WiFi, *hubs* & *switches*, LAN virtuales

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

re: ______________________ D.N.I.: ____________

nto) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de bles aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

ıntos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una ternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

e sabe que 1/3 de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad bits?

l coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el te de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n(\gg 1)$?

nto) La secuencia

$$A, L, (1,4,B), (1,2,R), (1,9,D), E, (8,2,O), (4,5,L), (1,2,D), (A,2,\emptyset)$$

a la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado `longitud de la frase, sufijo`), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el o. Averigüe el mensaje.

atriz

$$H = \left(I_5 \;\; \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

nprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

tenga la distribución de pesos del código **(1 punto)**

nsidere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

estre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen al código definido por H, entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una palabra del código nido por H'. Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto **(1 punto)**

$= (x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico $[15, 12]$.

11 . . . 1 una palabra del código? **(1 punto)**

uentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los despla- nientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? **(1 punto)**

nto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de tinuo con rechazo selectivo.

nto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una nsta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que on probabilidad p. Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

…idad de Vigo

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA TELEMÁTICA

Examen de Fundamentos de Telemática

20 de enero de 2011

…: ______________________ D.N.I.: ______________

…a 1 (2 puntos). Considere la familia de canales dada por la matriz de probabilidades de

$$\begin{pmatrix} 1-p & p-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & p-\epsilon & 1-p \end{pmatrix}.$$

…uestre que la capacidad se alcanza en todos los casos para entradas equiprobables.

…rmine en qué casos la capacidad es nula.

…ulemos $C = \max_{p(x)} I(X;Y)$, siendo $p(x)$ una distribución de probabilidad binaria. Tenemos

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y \mid X).$$

…a bien, $H(Y \mid X) = H(1-p, p-\epsilon, \epsilon) = h(p-\epsilon) + (q+\epsilon)h(\epsilon/(q+\epsilon))$ no depende de la …ibución de probabilidad a la entrada, por lo que

$$C = \left(\max_{p(x)} H(Y)\right) - H(Y \mid X).$$

…que $H(Y) = H(a, p-\epsilon, b)$ para ciertos $a, b > 0$ tales que $a+b+p-\epsilon = 1$, se sigue por aplicación …ta de la propiedad de partición que $\max_{p(x)} H(Y)$ se alcanza cuando $a = b = (q+\epsilon)/2$. Así, …$H(Y) = h(p-\epsilon) + (q+\epsilon)\log 2$. Finalmente, reuniendo todos los términos

$$C = (q+\epsilon)\left(\log 2 - h\left(\frac{\epsilon}{q+\epsilon}\right)\right).$$

…ción: $q = 1-p$ y $h(p)$ denota la función de entropía binaria.

… última expresión se deduce que $C = 0$ si y sólo si $\log 2 = h(\epsilon/(q+\epsilon))$, es decir, si y sólo si … o $p+\epsilon = 1$.

… 2 (3 puntos). Se van a transmitir a través de un canal cuaternario de capacidad 1 bit los …e una fuente simétrica con un alfabeto de 48 símbolos.

…rmine el número mínimo de símbolos cuaternarios necesarios para transmitir fielmente un …aje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande.

… fracción de esos símbolos es redundante?

…rmine la fracción de tiempo que se usaría el canal si su régimen es unitario y el de la fuente …entésima.

…mero medio de símbolos necesarios para la transmisión fiable es de nL_fL_c, donde L_f (resp., …s la longitud del código de fuente (resp., de canal) utilizado. Tal número es mínimo si se …ca codificación ideal, $L_f = H_4(X)$ y $L_c = 1/C$ en virtud de los teoremas de Shannon. Por …guiente, son necesarios

$$n\frac{H_4(X)}{C} = n\frac{\log_4 48}{1/2} = 2n(2+\log_4 3) \text{ símbolos cuaternarios}$$

…e $C = 1 \cdot \log_4 2 = 1/2$ unidades cuaternarias por símbolo.

...RATEGIAS DE RETRANSMISIÓN

...ión
... espera
...ontinuo
...hazo simple
...echazo selectivo

1. ...ÓN

...ema de transmisión:

→ Canal → Rx

...ramas

...información   l=m+n

• ... si la trama recibida contiene errores
... errores, la descarta y pide al Tx que se la reenvíe.
... un protocolo de retransmisiones y asentimientos (ACK)

A... (ACK): trama corta (solo cabecera). Puede ser:
... la trama fue exitosa
... la trama recibida es errónea y hay que retransmitirla.

N... ...dera que se genera un ACK por cada trama recibida.

• Ti... ...ntimiento

• P… de error de trama

…d de error de trama

…probabilidad de error de bit

…o falle ninguno) $= 1 - (1-P_b)^{\ell} \approx P_b \cdot \ell = P_b \cdot (n+m)$ ↑ $\ell >>$

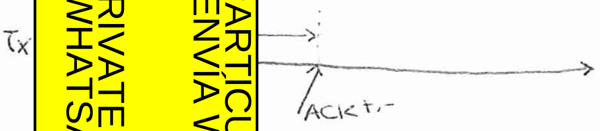
• C…caz

- … real de transmisión por el canal

$$\frac{\text{… medio de bits de información por trama}}{\text{…medio de uso del canal por trama}} = \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$$

$$…S = \frac{C_e}{C}$$

2. … ESPERA



El tx envía una trama y se detiene hasta recibir su ACK. Si es positivo sigue con otra trama y si es negativo la retransmite.

→ … la cadencia eficaz

… tiempo de ocupación medio

t… de ocupación del canal si solo se tx. 1 vez la trama.

$… + T_{as}$

$$T_{as} = 2t_p + t_{proc.} + \frac{m}{c}$$

$$…\cdot\left(\frac{\ell}{c} + T_{as}\right)$$

$$\bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx}\left(\frac{\ell}{c} + T_{as}\right)$$

$$…\cdot\left(\frac{\ell}{c} + T_{as}\right) \quad \forall i: 1, \ldots, \infty$$

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{\text{prob. éxito}} = \frac{1}{1-P}$$

$$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{1-P}\left(\frac{\ell}{c} + T_{as}\right)$$

$$\frac{…n \cdot C}{…s \cdot C} = \frac{[1-P_b(n+m)]\,n \cdot C}{n+m+T_{as} \cdot C}$$

10 nov

$\frac{e}{c}) + (\bar{n}_{tx} - 1) T_{out} + T_{as}$

$\frac{1}{1-P}$

$t_{as} = \ldots$

$(1-P) n \cdot C$
$C + P \cdot T_{out} \cdot C + (1-P) \cdot T_{as} \cdot C$

$\frac{1}{(1-P)(1-q)}$ → Lo demás es igual.

...TINUO

...r no se detiene al finalizar la transmisión de una trama
...se envía la siguiente.

| 2 | ...

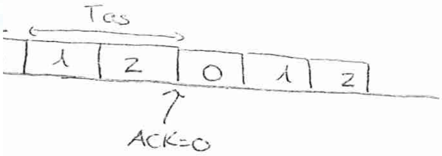
...o de tx.

...x: indique el número de tramas que el tx puede tener pendientes de ACK. Si se llena la ventana, el tx se detiene.

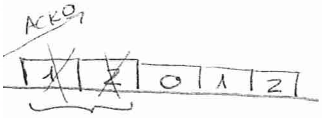
...ada y espera es un envío continuo con tamaño de ventana = 1

...amiento ante la recepción de un ACK tiene dos soluciones:

nazo simple



mite la trama fallida y las siguientes.



las tira porque espera la cero.

or rechaza todas las tramas recibidas que no sean la
a.

de la cadencia ~~media~~ eficaz.

$t_{oc1} = l/c \qquad t_{oc2} = l/c + T_{as} + l/c \qquad t_{oc\,i} = i \cdot \frac{l}{c} + (i-1)\,T_{as}$

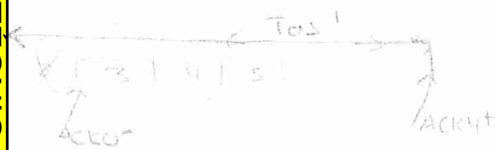
$\forall i = 1, \dots, \infty$

$\frac{l}{c} + (\bar{n}_{tx}-1)T_{as}$

$= \frac{1}{1-P}$

$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{1-P} \cdot \frac{l}{c} + \frac{P}{1-P} \cdot T_{as}$

2



$+ T_{as}' + l/c \qquad t_{oc\,i} = i \cdot l/c + (i-1)T_{as}'$

$+ T_{as}' + l/c + T_{as}' + l/c$

$\cdot \frac{l}{c} + (\bar{n}_{tx}-1)\overline{T_{as}'} \qquad \overline{T_{as}'} = \bar{n}_{tx} \cdot l/c + T_{as}$

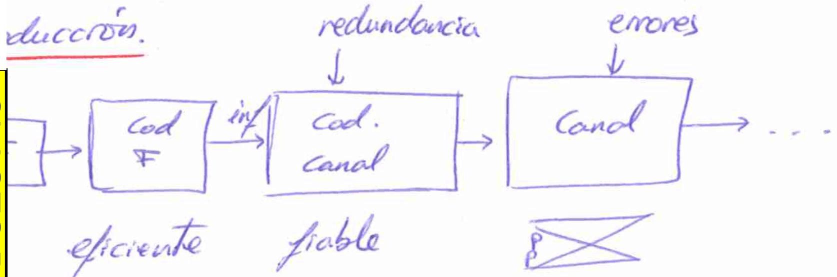
$\frac{1}{1-P}$

$= \frac{l}{c} + \frac{P}{1-P} \cdot \left(\frac{1}{1-P} \cdot \frac{l}{c} + T_{as}\right)$

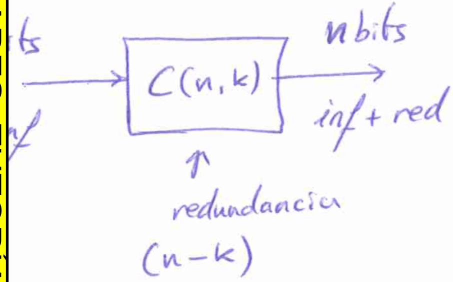
3: CÓDIGOS LINEALES

- ...troducción
- ...atriz generada.
- Matriz de comprobación de paridad.
- Propiedades detectoras de errores.
- Propiedades correctoras de errores.

...ducción.



... códigos lineales (binarios)



...otación vectorial:

La salida del cod. lineal:

$$(n=6): 100001 \longrightarrow \vec{x}_{1\times 6} = (100001)$$

$$: 00000 \longrightarrow \vec{0}_{1\times 6} = (000000)$$

$$: 111\,111 \longrightarrow \vec{1}_{1\times 6}$$

Código lineal: Se dice que un código $C(n,k)$ es lineal si cumple:

El vector nulo ($\vec{0}_{1xn}$) siempre es palabra código.

Si el vector $\vec{x}_{1xn}$, $\vec{y}_{1xn}$ son palabras código ($\in C_i$) entonces:

$$\vec{x}_{1xn} \oplus \vec{y}_{1xn} \in C_i.$$

$\uparrow$ suma módulo 2. ("o exclusiva")

emplo: $n = 6$

$$\vec{x}_{1x6} = 100111$$
$$\vec{y}_{1x6} = 100001$$

$$\vec{x}_{1x6} \oplus \vec{y}_{1x6} = 000110$$

Peso hamming: (P_H): El peso hamming de la palabra es el número de unos de la palabra código.

$\vec{x}_{1x6} = 100111$, $P_H(\vec{x}_{1x6}) = 4$

istancia hamming: (d_H) La d_H entre 2 palabras código
eso hamming de la suma (módulo 2)

Sea $\vec{x}_{1x6} = 100111$

$\vec{y}_{1x6} = 100001$

$$(\vec{x}_{1x6}, \vec{y}_{1x6}) = P_H(\vec{x}_{1x6} \oplus \vec{y}_{1x6}) = P_H(000110) = 2$$

Distancia código: (d_c) La distancia código en un código
$C(n,k)$ es el P_H de la palabra código no nula de menor

$$\underset{\text{inf (k bits)}}{\xrightarrow{\vec{u}_{1xk}}} \boxed{C(n,k)} \underset{\text{palabras código}}{\xrightarrow{\vec{x}_{1xn}}}$$

d: En un código lineal $C(n,k)$ existen

2^k palabras código

orma matricial:

$$\vec{X}_{1\times n} = \vec{u}_{1\times k} \cdot G_{k\times n}$$

↑ matriz generadora.

Matriz generadora: $G_{k\times n}$

La matriz $G_{k\times n}$ del código lineal permite obtener las
código a partir de las secuencias de información.

$$\vec{X}_{1\times n} = \vec{u}_{1\times k} \cdot G_{k\times n}$$

emplo: Sea un código lineal que cumple:

$x_1 = u_1$ $\qquad$ $x_4 = u_1 \oplus u_2$

$x_2 = u_2$ $\qquad$ $x_5 = u_1 \oplus u_3$

$x_3 = u_3$ $\qquad$ $x_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$

$\vec{\lambda} = (x_1 \dots x_6) = (u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

componente i-ésima de la palabra código
componente i-ésima de la secuencia de información.

etros del código: $n = 6$, $k = 3$

3 bits → $\boxed{C(6,3)}$ → 6 bits

z generadora del código:

$$\underset{3\times 6}{G_{k\times n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

...dades: ($G_{k\times n}$)

a) Las filas de la matriz generadora son palabras

b) Las palabras código se obtienen como todas las posibles ...ones de filas de $G_{k\times n}$. (excepto la nula)

c) Si las filas de $G_{k\times n}$ son todas de P_H par entonces las palabras código van a ser de P_H par.

Para el código lineal generado por:

$$G_{3\times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Forma sistemática} \Rightarrow \text{linealmente independientes.}$$

$\underbrace{\quad}_{I_3} \rightarrow$ de orden k $\quad \underbrace{\quad}_{A}$

...n:

a) Longitud y dimensión del código

...tud $\equiv n = 6$

...sión: $k = 3$

...y que probar que las filas de $G_{k\times n}$ son linealmente independientes.

b) Obtén las palabras código.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

... $= 2^8$

100111		Filas de G.
010101		
001011		
110010	$1^a + 2^a$	2 Filas de G $\quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$
101100	$1^a + 3^a$	
011110	$2^a + 3^a$	
111001		3 Filas de G
000000		

...istancia código (dc):

$d_c = 3$ (1º palabra con menor número de unos).

...ficación sistemática:

← k → ← n-k →

información	redundancia

← n bits →

$G_{k \times n} = (I_k \mid A)$

...atriz de comprobación de paridad. $(H_{n-k \times n})$

$\vec{u}_{1 \times k} \rightarrow \boxed{C(n,k)} \xrightarrow{\vec{x}_{1 \times n}} \boxed{\text{Canal}} \rightarrow$ $\vec{y}_{1 \times n} = \vec{x}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{1 \times n}$

$\uparrow \vec{e}_{1 \times n}$

(Entrada) (salida)

110010 $111111 = 110010 \oplus 001101$

...triz de comprobación de paridad $(H_{n-k \times n})$ permite conocer ...uencia recibida $(\vec{y}_{1 \times n})$ es o no una palabra código.

...o se obtiene el síndrome $(\vec{s})$:

$$\boxed{\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{y}_{1 \times n} \cdot H^T_{1 \times n-k}}$$

$\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \in C$ (pertenece al código)

$s_{1 \times n-k} \neq \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \notin C \Rightarrow \exists\, \vec{e}_{1 \times n}$

(No pertenece al código) (existen errores)

...triz $H_{n-k\times n}$ se obtiene a partir de la matriz ...ora:

$$G_{k\times n} = (I_k \,|\, A) \Rightarrow H_{n-k\times n} = (A^T \,|\, I_{n-k})$$

...lo: Sea el código lineal de matriz generadora:

$$G_{3\times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad n=6,\ k=3$$

...tén la matriz de comprobación de paridad.

$$H_{n-k\times n} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

...-3×6

...3×6

...dad: Si un código lineal tiene distancia código δ se cumple ... ese es el menor número de columnas de $H_{n-k\times n}$ ...ente independientes

...lcula la dc.

$$H_{3\times 6} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \times & & \times & & \times \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ su suma modulo 2 es nula.

...1, no existe columna nula en H.

...2, no existen dos columnas linealmente independientes. (tendrían que ser iguales)

...=3 $\quad 2^{\circ} \oplus 4^{\circ} \oplus 6^{\circ}$

:

$$H = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(the right-hand block is labelled I_4)

...ule la distancia del código.

$= 2$. No puede ser dos porque no hay dos columnas linealmente independientes.

$= 3$. No puede ser porque

Si las columnas de $H_{n-k \times n}$ son todas de peso hamming

...ntonces la distancia código tiene que ser ~~de peso hamming~~ par.

...o combinar un número par de columnas para que se anulen)

$= 4$. Si se cogen ~~cualquiera de las primeras~~ 1º, 6º, 7º, 8º

...!: si la matriz $H_{n-k \times n}$ tiene una fila con ~~un solo~~ todo "1" entonces

par.

...hamming:

...n un caso particular de códigos lineales. Cumplen:

a) $n = 2^{n-k} - 1$ (condición necesaria)

b) Su distancia código es 3 $\boxed{dc = 3}$

c) Son códigos 1-perfectos

...matriz $H_{n-k \times n}$ tiene en sus columnas todas las ...ones binarias no nulas con $n-k$ bits.

...mplo: Sea el código hamming $C(7,4)$. Obtén $H_{n-k\times n}$

$n-k=3$

$$H_{\substack{n-k\times n\\3\times 7}} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0&1&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

se pueden reordenar las columnas de H.

...ección de errores. Propiedades:

$$\ldots k) \xrightarrow{\vec{x}_{1\times n}} \boxed{\text{Canal}} \longrightarrow \quad \vec{y}_{1\times n} = \vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}$$

$\uparrow \vec{e}_{1\times n}$

...ar un error implica que $\vec{y}_{1\times n} \notin C$.

...d:

En un código lineal se detectan todos aquellos errores que ...iden con palabras código.

...ustificación: $\vec{y}_{1\times n} = \vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}$

$$\ldots_{k} = \vec{y}_{1\times n} \cdot H^T_{n\times n-k} = (\vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}) \cdot H^T_{n\times n-k} =$$

$$\underbrace{\ldots_{n} \cdot H^T_{n\times n-k}}_{\vec{0}_{1\times n-k}} \oplus \vec{e}_{1\times n} \cdot H^T_{n\times n-k}$$

$\vec{e}_{1xn} \in C \Rightarrow \vec{e}_{1xn} \cdot H^T_{n-k} = \vec{0}_{1xn-k}.$

$\Downarrow$

${}_{1xn-k} = \vec{0}_{1xn-k} \Rightarrow$ el error no se detecta.

En un código lineal se detectan todos aquellos errores que
Hamming $(P_H(\vec{e}_{1xn})) \leq d_C - 1$.

Justificación:

$P_H(\vec{e}_{1xn}) \leq d_c - 1 \Rightarrow \vec{e}_{1xn} \notin C \Rightarrow$ se detecta

En un código lineal $C(n,k)$ se cumple:

$\exists\ 2^k$ palabras código.

$\exists\ n$ errores simples (de $P_H = 1$)

$\exists \binom{n}{2}$ errores dobles (de $P_H = 2$)

$\exists \binom{n}{i}$ errores de $P_H = i$.

El nº total de errores en un código $C(n,k)$ es $2^n - 1$ (no nulos).

- detectables $20 - 4 = 16$.
- no detectables: los que coinciden con palabra código.
  4

Hay

$\binom{n}{3} =$

$\frac{6}{3!}$

: En el código generado por

$$G_{3\times 6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

el número de errores detectables de $P_H = 3$.

6 : porque las filas de G son linealmente independientes.

3

100 111

010 101

001 011

110 010

101 100

011 110

111 001

000 000

º de errores detectables de $P_H = 2$.

todas detectables puesto que el código no contiene palabras

3 que es $d_c = 3$.

$\binom{n}{2} = \binom{6}{2} = 15$ $\qquad \frac{6!}{5!}$

ad:

En un código lineal $C(n,k)$ si

$\ldots x n \in C \Rightarrow$ la distribución de pesos de las palabras código

trica ($A_i = A_{n-i}$)

A_i: nº de p.c de $P_H = i$.

3.

...digo Hamming

$n = 2^k - 1$

$... = 2^4 - 1 = 15$

$dc = 3$

$H \equiv$ columnas.

...s combinaciones

...on $n-k$ bits

...ulas.

$$\left.\begin{matrix} n = 15 \\ k = 11 \end{matrix}\right\} \quad n - k = 4$$

$$H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 000 & 0000 & 11111111 \\ 000 & 1111 & 00001111 \\ 011 & 0011 & 00110011 \\ 101 & 0101 & 01010101 \end{pmatrix}$$

4×15

...namos todas las columnas con un nº par de unos.

$$H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n \equiv$ longitud.

$k \equiv$ dimensión.

$dc \equiv$ distancia

...mos H a forma sistemática cambiando columnas. $\left[H = \left(A^T \mid I_{n-k} \right) \right]$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

...tá en forma sistemática. Sus filas ~~están~~ son linealmente ...dientes. Por tanto:

$n = 8$

$n - k = 4 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

$\ldots c = 4$. Porque: $d_c \neq 2$ $\nexists$ 2 columnas en H linealmente dependientes.

...todas las columnas de H son de P_H impar entonces la ...
...e que ser par para obtener un número de ellas linealmente ...
...ntes.

$\ldots = 4$. Puesto que existen 4 columnas que sumadas dan cero.
2º, 3º, 4º, 5º.

...Obtenemos la distribución de pesos de las palabras código.

$\vec{1}_{1\times 8} \in C$? Calculo su síndrome:

$$\boxed{\ldots = \vec{1}_{1\times 8} \cdot \underset{8\times 4}{H^T} = (0\,0\,0\,0)} = (1\,1 \ldots 1\,1)\left(\;H^T\;\right)$$

...ponente se obtiene como la suma de las filas de H.

$$\ldots_{1\times 4} = (0\,0\,0\,0) = \vec{0}_{1\times 4} \Rightarrow \underline{\vec{1}_{1\times 8} \in C}$$

...to, la distribución de pesos es simétrica:

A_i	A_{8-i}	nº
0	8	1, 1
1	7	0
2	6	0
3	5	0
4	4	16 − 2 = 14

porque $d_c = 4$, $\nexists$ palabras código de P_H menor que d_c. (salvo la nula)

$\exists\ 2^k$ ...
palab...

Solo hay palabras código de P_H par.

errores de 4

- detectables: $70 - 14 = 56$
- no detectables: nº de p.c de $P_H = 4 \Rightarrow 14 = A_4$

$$\binom{n}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

c)!

…tar un error$) = p(\vec{e}_{1 \times n}$ coincida con una palabra código$) =$

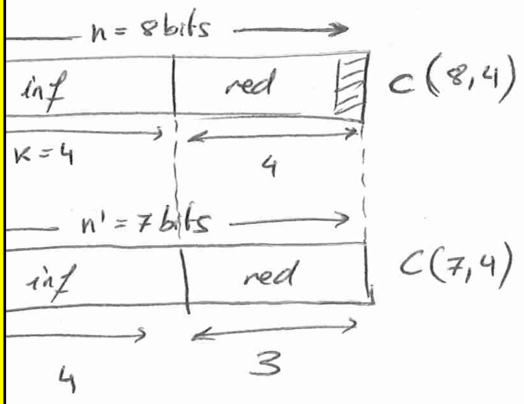
$$(1-p)^{n-4} \cdot 14 + \underbrace{p^n}_{\text{probabilidad de error de } P_H = n} = \boxed{14 \cdot p^4 \cdot (1-p)^{8-4} + p^8}$$

p·

p)…

…asen $p($detectar un error$) = 1 - p($no detectar el error$)$

… de paridad = bit de redundancia.



$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow H'_{3\times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

H' contiene en sus columnas todas las combinaciones binarias con 3 bits.

...anto se trata del código Hamming $C(7,4)$.

...a 7.

...a suma de las filas es nula. Las filas de H no son ...e independientes. Tenemos que eliminar una de las filas.

...inamos la última fila de H.

$$\underset{\substack{n-k\times n \\ 7\times 16}}{H'} = \begin{pmatrix} 1111 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 1111 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 1111 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 0000 & 1111 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 0100 & 0100 & 0100 & 0100 \\ 0010 & 0010 & 0010 & 0010 \end{pmatrix}$$

..., $\rightarrow k = 9$

...7

longitud $= n = 16$
dimensión $= k = 9$
distancia $= d_c =$

...tancia código se obtiene como el menor número de columnas ...almente dependientes.

$= 2$? No existen 2 columnas linealmente dependientes (tendrían que ser iguales)

$= 3$? No. No hay forma de encontrar tres columnas linealmente dependientes.

En cada grupo de 4 columnas no hay 3 linealmente dependientes.

se pueden conseguir escogiendo 2 en uno de esos grupos y
[ot]ro diferente.

[Si escoge]mos una de un grupo distinto tampoco es posible.

$\boxed{\ldots = 4}$ 1º, 2º, 5º y 6º

[C]ompruebo que $\vec{1}_{1\times16} \in C$. Será suficiente calcular el síndrome:

$$\ldots_{16} \cdot H^T_{16\times7} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) = \vec{O}_{1\times7}$$

Por tanto $\vec{1}_{1\times16} \in C$.

[Vamo]s a calcular la distribución de pesos de las palabras código.
[Si] $\vec{1}_{1\times16} \in C$ la distribución de pesos de sus palabras es simétrica.
$\ldots A_{n-i}$. $\forall i = 0, \ldots, 16$.

A_{n-i}	nº
16	1, 1
15	0
14	0
13	0
12	
11	
10	
9	
8	

$d_C = 4$

Por este paso no puedo comprobar de manera sencilla que sean todos pares.

$= \vec{0}_{1\times 7} = (111110\ldots0)\cdot H^T =$

...probar que las palabras código son todas de P_H par es
... probar que no existen grupos con nº impar de columnas de H
...te dependientes.
...dicará que el síndrome de una palabra de P_H impar no es
...es decir, no pertenece al código.
...cho es así porque eligiendo un número impar de columnas
... tocará un número impar en alguno de los grupos de
...mnas y de este modo es imposible obtener una combinación

...a 5.

$$G = \left(I_6 \;\middle|\; \begin{matrix} 1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0 \\ 0&1&1&1&1&1 \end{matrix} \right)$$

...Como las filas de G son linealmente independientes:

$k = 6$

$n = 12$

...Pertenece al código porque se puede obtener el vector $\vec{1}_{1\times 12}$ sumando
...sus filas de G.

...TA: Siempre que esté en forma sistemática si sumando todas
... da el vector $\vec{1}_{1\times k} \in C$.

...Como la distribución de pesos es simétrica:

A_{n-i}	nº
12	1,1
11	0
10	0
9	0
8	15,15
7	0
6	32

$d_c = 4$

Porque todos las p.c. son de P_H par.

*

...mos H: $H = (A^T \mid I_{n-k})$

$$_{6\times 12} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & I_6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

...2? No. Porque no hay dos columnas en H iguales.

...3?

... todas las columnas de H son P_H impar es necesario combinar ...r de ellas para obtener la combinación nula $\Rightarrow$ d_c es par.

... las p.c son de P_H par.

$\boxed{4}$ 1º, 2º, 8º, 9º columna.

... tantas p.c de $P_H = 4$ como grupos de 4 columnas de H linealmente ...tes.

... buscar cuantos grupos de 4 columnas son linealmente dependientes.

...ache matriz $(\; | \; I_6)$ $\longrightarrow$

Grupos que forma p.c.

4 − 0 ×
3 − 1 ×
2 − 2 $\longrightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15.$
1 − 3 ×
0 − 4 ×

...e P_H 4. y otras 15 de P_H 8.

...e Julio de 2011

4.

$$H = \left(I_5 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

$n = 10$
$k = 5$

$n - k = 5 \Rightarrow k = 5$

...y que probar si $\vec{1}_{1\times 10} \in C$. De ser así la distribución de ... simétrica.

$$\vec{s}_{1\times 5} = \vec{1}_{1\times 10} \cdot H^T_{10\times 5} = \vec{0}_{1\times 5}$$

(00000)

2^k

$2^5 = 3$...

A_{n-i}	n.º
10	1, 1
9	0
8	0
7	0
6	15, 15
5	0

$\longrightarrow$ La $d_c \neq 2$ porque no hay 2 columnas de H linealmente dependientes.

...as las columnas de H son de P_H por no existen palabras ...e P_H impar.

Por tanto: $A_0 = 1$ $\quad A_6 = 15$
$A_4 = 15$ $\quad A_{10} = 1$

...o lineales. (Resumen)

$$\boxed{\vec{x}_{1\times n} = \vec{\mu}_{1\times k} \cdot G_{k\times n}}$$

$$\vec{x}_{1\times n} \longrightarrow \boxed{\text{Canal}} \longrightarrow \vec{Y}_{1\times n} = \vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}$$

$\uparrow \vec{e}_{1\times n}$

$$G_{k\times n} = (I_k \mid A)$$

$\Updownarrow$

$$...n = (A^T \mid I_{n-k})$$

$$S_{1\times n-k} = \vec{Y}_{1\times n} \cdot H^T_{n\times n-k}$$

$\hookrightarrow \vec{0}_{1\times n-k} \Rightarrow \vec{Y}_{1\times n} \in \mathcal{C}.$

$$\vec{S}_{1\times n-k} \neq \vec{0}_{1\times n-k} \Rightarrow \exists\ \vec{e}_{1\times n}.$$

nº total de $\vec{e}_{1\times n}$ $\begin{cases} \text{. detectables.} \\ \text{. no detectables} \equiv \text{p.c.} \end{cases}$

Propiedades correctoras de errores.

$$\vec{x}_{1\times n} \longrightarrow \boxed{\text{Canal}} \longrightarrow \vec{Y}_{1\times n} = \vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}$$

$\uparrow \vec{e}$

...so para buscar la palabra código transmitida será:

...calculamos el síndrome de la secuencia recibida.

$$\vec{S}_{1\times n-k} = \vec{Y}_{1\times n} \cdot H^T_{n\times n-k} = (\vec{x}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n}) \cdot H^T_{n\times n-k} =$$

$$\cdot\, H^T_{n\times n-k}$$

...si: $\vec{S}_{1\times n-k} = \vec{0}_{1\times n-k} \Rightarrow \vec{Y}_{1\times n} \in \mathcal{C}.$

$\vec{S}_{1\times n-k} \neq \vec{0}_{1\times n-k} \Rightarrow \vec{Y}_{1\times n} \notin \mathcal{C} \Rightarrow \exists\ \vec{e}_{1\times n}.$

...e buscar el error y estimar la palabra código transmitida:

$$\boxed{\vec{x}_{1\times n\,\text{est}} = \vec{Y}_{1\times n} \oplus \vec{e}_{1\times n\,\text{est}}}$$

(est) = estimado.

$\vec{e}_{est\,1\times n}$ se obtiene de la tabla de síndromes.

: Sea el código lineal $C(6,3)$ generado por:

$$G_{3\times6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

I_3 $\quad$ A

abla de síndromes.

alculamos la matriz $H_{n-k\times n}$ 3×6

$$H_{3\times6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

tabla de síndromes se

errores más probables,

menor peso.

simples los que coinciden

umna de H.

Buscamos una combinación lineal de dos columnas.

Tabla de síndromes

columna 4 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

2^{n-k}

$\vec{S}_{1\times n-k}$ (1×3)	$\vec{e}_{1\times n}$ (1×6)	$P_H(\vec{e})$
000	000000	0
100	000100	1
010	000010	1
110	000110	2
001	000001	1
101	010000	1
011	001000	1
111	100000	1

n la palabra código estimada si se recibe la secuencia: $\vec{Y}_{1\times6} = 111111$

(suma de los unos de cada fila de H)

lo el síndrome:

$$\vec{S}_{1\times3} = \vec{Y}_{1\times6}\cdot H^T_{6\times3} = 110$$

$$\notin C \Rightarrow \exists\ \vec{e}_{1\times6}.$$

a tabla de síndromes: $\vec{e}_{est\,1\times6} = 000110$

$$\boxed{\vec{X}_{est\,1\times n} = Y_{1\times n} \oplus \vec{e}_{est\,1\times6} = 111001}$$

palabra código recibida $\qquad$ error estimado n la probabilidad de cometer un error al decodificar.

rror al decodificar) = 1 − p(no cometer error al decodificar) =

p(error del canal sea el de la tabla de síndromes)] =

$$\Big[\underbrace{(1-p)^n}_{\text{error nulo}} + \underbrace{6p(1-p)^{n-1}}_{\text{error simple}} + \underbrace{p^2(1-p)^{n-2}}_{\text{Error doble}}\Big]$$

dad:

Un código lineal $C(n,k)$ corrige $2^{n-k}-1$ errores no nulos.

s de la tabla de síndromes).

Todos los errores que cumplen:

$$P_H(\vec{e}_{1\times n}) \leq \left[\frac{d_c-1}{2}\right]$$ son corregibles.

CÓDIGOS:

ma 8.

¿Cuáles son la longitud, dimensión y distancia de C?

$$\underset{n-k\times n}{H} = \begin{pmatrix} 1&1&0&&&&&& \\ 1&0&1&&&&&& \\ &&&1&1&0&&& \\ &&&1&0&1&&& \\ &&&&&&1&1&0 \\ &&&&&&1&0&1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

Filas linealmente independiente.

$\boxed{\text{longitud} = 9}$

s $\Rightarrow$ $\boxed{k = \text{dimensión} = 3}$

menor número de columnas linealmente dependientes)

$\boxed{d_c = 3}$ 1º, 2º, 7.

$$G = (I_k \mid A)$$

$$G_{\substack{k\times n \\ 3\times 9}} = \left(\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$P_H(\vec{e}) \leq \left[\frac{d_c - 1}{2}\right] = t = \left[\frac{3-1}{2}\right] = 1$$

nos dice que nuestro código corrige <u>todos</u> los errores simples.

$\exists$ $n = 9$ errores simples.

$\vec{y}_{1\times 9} = 101010101$

$\vec{s}_{1\times 6} = \vec{y}_{1\times 9} \cdot H^T_{9\times 6} = 011001$

...a recibida $\vec{y}_{1\times 9}$ no pertenece al código $\Rightarrow$ $\exists$ $\vec{e}_{1\times 9}$.

...tabla de síndromes sacamos el $\vec{e}_{st}$.

...camos el error asociado al síndrome:

...r asociado no es simple puesto que el síndrome no coincide ... columna de H.

...o tiene asociado un error doble puesto que no se puede ... como la combinación lineal de 2 columnas de H.

$\vec{s}_{1\times 6}$	$\vec{e}_{1\times 9}$
...001	011001000

... un error triple puesto que se puede obtener como combinación ... columnas de H.

$= y_{1\times 9} \oplus \vec{e}_{est\,1\times 9} = 101010101 \oplus 011001000$

$\vec{x}_{est\,1\times 9} = 110011101$

a 9.

$H = \begin{pmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{pmatrix}$ $n = 15$, $k = 11$

$= H_{n-k \times n}$ 4×15 $\longrightarrow$ $H_{n-k\times n}$ 8×30 $= \begin{pmatrix} H_{4\times 15} & 0 \\ 0 & H_{4\times 15} \end{pmatrix}$

...s filas son linealmente independientes por su propia construcción.

...H de un código Hamming contiene todas las combinaciones binarias

...nas)

30

22

= 3 Puesto que los códigos Hamming tienen $d_c = 3$ y por tanto se pueden encontrar 3 columnas linealmente independientes.

...olo corrige errores simples y dobles.

$(\vec{e}_{1}X30) \leq \left[\frac{d_c - 1}{2} \right] = \left[\frac{3-1}{2} \right] = 1$

$n = 30$ errores simples.

...$\times n-k$ ...$\times 8$	$P_H(\vec{e}_{1\times 30})$	n°
...8 _ 0	0	1
	1	30
	2	$256 - 31 = 225$.
... - 1		

$2^8 = 2$...

º de errores dobles corregidos es: $\boxed{\alpha_2 = 225}$

código solo corrige simples y dobles porque los síndromes coinciden con una columna de H (un grupo de cuatro ceros pio o al final) o bien se obtienen como la combinación dos columnas de H, una de cada bloque.

a 10. $H_r = (I_r \quad B_{r \times m})$, $r \geq 2$.

z identidad $r \times r$.

s columnas son todas los vectores de $p_H = 2$ tales que guna fila es nula.

$$H_7 = \Big(I_7 \; \Big| \; \underbrace{\qquad}_{\binom{7}{2}} \Big)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\frac{!}{!} = 3$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & B_{r \times m} \\ \uparrow & \uparrow \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{filas: } r \\ \text{columnas: } r + \binom{r}{2} \end{array}$$

olumnas $\quad \binom{r}{2}$ columnas

$$\boxed{= r + \binom{r}{2}}$$

$n - k = r$

$$\boxed{k = n - (n-k) = r + \binom{r}{2} - r = \binom{r}{2}}$$

...gonalidad

Sean $x_{1\times n}$, $y_{1\times n}$ $\in C(n,k)$. Se define el producto $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ como:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_i x_i \cdot y_i$$

$\vec{x}_{1\times 6} = 111001$ $\qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 =$

$\vec{y}_{1\times 6} = 111000$ $\qquad = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

Sean $\vec{x}_{1\times n}$, $\vec{y}_{1\times n}$ $\in C(n,k)$. Se dice que son ortogonales si:

$$\langle \vec{x}_{1\times n}, \vec{y}_{1\times n} \rangle = 0$$

...edad: La suma de vectores ortogonales entre sí produce vectores ...gonales

...iedad: si las filas de $G_{k\times n}$ son ortogonales entre sí todas ... palabras código son ortogonales entre sí.

...iedad: si las palabras código son todas ortogonales entre sí ...nces su P_H es multiplo de 4. Hay que probarlo utilizando

$$\boxed{P_H(\vec{x} \oplus \vec{y}) = P_H(\vec{x}) + P_H(\vec{y}) - 2\, P_H(\vec{x} \cap \vec{y})}$$

...lo: $\vec{x} = 111001$ $\qquad \vec{x} \cap \vec{y} = 110001$

$\vec{y} = 110001$

$$P_H(\vec{x} \cap \vec{y}) = 3.$$

1.

lema 4. $G = \Big($

ortogonales $\quad n = \text{longitud} = 8$

$k = \text{dimensión} = 4$

$= G'.$ $\quad$ dc.

filas de G son linealmente independientes puesto que son ...les entre sí.

...ódigo cumple que dadas dos palabras código $\vec{X}_{1\times n}, \vec{Y}_{1\times n}$:

$$P_H(\vec{x} \oplus \vec{y}) = \underset{4}{\underset{\shortparallel}{P_H(\vec{x})}} + \underset{4}{\underset{\shortparallel}{P_H(\vec{y})}} - 2 P_H(\vec{x} \cap \vec{y})$$ (múltiplo de 4)

$$= 4 + 4 - 2 \cdot 2 = \dot{4}$$

lo tanto todas las palabras código tienen $P_H = 4$.

Para obtener la d.c:

1) Calcular el menor número de columnas de H linealmente ...dientes.

2) Si las columnas de H son todas de P_H impar $\Rightarrow$ todas las ... son de P_H par $\Rightarrow$ dc. par.

3) Si H tiene una fila de "1" lo mismo.

4) Si las filas de G son todas de P_H par $\Rightarrow$ lo mismo.

5) Si las filas de G son $\perp$ entre sí entonces todas la... tienen $P_H = 4$ (probarlo)

$2^{k} \to$ errores en total de un código

...ulo de la distribución de pesos de las p.c:

...omo $\vec{1}_{1\times 8} \in C \Rightarrow$ la distribución de pesos es simétrica:

A_i	A_{8-i}	nº
0	8	1, 1
1	7	0
2	6	0
3	5	0
4	4	14

No existen esta p.c puesto que $d_C = 4$. (menores de $d_C = 4$)

$$\boxed{\begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_4 = 14 \\ A_8 = 1 \end{array}}$$

...pita el apartado anterior para el código generado por: $\underset{8\times16}{G} = \begin{pmatrix} G_{4\times8} & 0 \\ 0 & G_{4\times8} \end{pmatrix}$

...las de cada bloque no son linealmente independientes

... las de $\hat{G}$ tampoco $\Rightarrow$ son ortogonales.

16

8

$= 4$

En este código $\vec{1}_{1\times16} \in C$ puesto que $\vec{1}_{1\times8} \in$ al código generado

G.

...o hay

A_i	A_{k-i}	nº
0	16	(1, 1)
A_4	A_{12}	28, 28
A_8	A_8	$256-58=198$

$\hat{A}_4 = 2 \cdot A_4 = 2 \cdot 14 = 28$

Cada bloque de $\hat{G}$ genera $\hat{A}_4$ palabras de $P_H = 4$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{A}_4 = 28 \\ \hat{A}_{12} = 28 \\ \hat{A}_8 = 198 \\ \hat{A}_0 = 1 \\ \hat{A}_{16} = 1 \end{array}}$$

...e son

4.

o 2011

$$H_{5\times10} = \left(I_5 \;\middle|\; \begin{matrix} 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&0 \end{matrix}\right)$$

btenga la distribución de pesos de los errores corregibles.

obamos si $\vec{1}_{1\times10} \in C$. Calculamos el síndrome:

$$\vec{1}_{1\times10} \cdot H^T_{10\times15} = (0\,0\,0\,0\,0) = \vec{0}_{1\times15} \Rightarrow \vec{1}_{1\times10} \in C.$$

tanto, la distribución de pesos de las p.c es simétrica:

A_i	A_{10-i}	nº
0	10	1, 1
1	9	0
2	8	0
3	7	0
4	6	15, 15
5	5	0

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= 1\\ A_4 &= 15\\ A_6 &= 15\\ A_{10} &= 1 \end{aligned}}$$

2

puede ser 3 puesto que tiene que ser par, porque las columnas de
impares.

las columnas de H son de P_H impar todas las p.c son de

$= 4$. 4 columnas de H linealmente indep. 3º 4º 5º 6º

...a la distribución de pesos de las palabras del código

... errores corregibles son los que están en la tabla de síndromes.

$\vec{s}_{1\times n-k}$	$\vec{e}$	$P_H(\vec{e})$
0000		
11111		

...imos la siguiente tabla.

$P_H(\vec{s}_{1\times 5})$	0	1	2	3	4	5
nº	1	5	$\binom{5}{2}=10$	$\binom{5}{3}=10$ 5 5	$\binom{5}{4}=5$	1
$P_H(\vec{e}_{1\times 10})$	0	1	2	1 3	2	3

...dos los síndromes de $P_H=1$
...lumnas de H.

...unos con error simple

...columnas de $H \Rightarrow$ error simple.

... error triple puesto que se obtienen
...lumnas de H.

Los síndromes con $P_H=2$ se obtienen con la comb. lineal de 2 columnas de H (en parte identidad)

... de errores corregibles son:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= 10 \\ \alpha_2 &= 10+5=15 \\ \alpha_3 &= 5+1=6 \end{aligned}}$$

izquierda examen 28 noviembre 2012.

3.

$G = (I_7 \mid P_7)$

$$= \left(I_7 \;\middle|\; \begin{matrix} 0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0 \end{matrix} \right)$$

...tribución de pesos de las palabras código.

14

7

El vector $\vec{1}_{1\times14} \notin G$. No se obtiene porque no se obtiene como la comb. lineal de tas las filas de G. por estar esta en forma sistemática.

...mos los pesos de las p.c a partir de las filas de G:

...la $\longrightarrow P_H = 7 \longrightarrow$ nº: 7.

...filas $\longrightarrow P_H = 4 \longrightarrow$ nº $= \binom{7}{2} = 21$

...Filas $\longrightarrow P_H = 7 \longrightarrow$ nº: $\binom{7}{3} = 35$

...Filas $\longrightarrow P_H = 8 \longrightarrow$ nº $= \binom{7}{4} = 35$

...Filas $\longrightarrow P_H = 7 \longrightarrow$ nº: $\binom{7}{5} = 21$

...Filas $\longrightarrow P_H = 12 \longrightarrow$ nº $= \binom{7}{6} = 7$

...Filas $\longrightarrow P_H = 7 \longrightarrow$ nº $= 1$

127

$P_H = 0 \longrightarrow 128$

1

14

35

7

NOTA: En un código o todas las palabras son de P_H par o la mitad de peso par y la otra mitad de peso impar.

...es la probabilidad de detectar un error de transmisión?

$p(\text{detect}$...$\text{ar } 1 \text{ error}) = 1 - p(\text{no detectar el error}) = 1 - p(\vec{e} \in C) =$

$$= 1 - \left[21 \cdot p^4 (1-p)^{n-4} + 64 \cdot p^7 \cdot (1-p)^{n-7} + 35 \cdot p^8 (1-p)^{n-8} + \right.$$
$$\left. + \; 7 \cdot p^{12} (1-p)^{n-12} \right]$$

...ilidad de decodificar incorrectamente.

...pesos de los errores corregibles serán:

$\vec{s}_{1 \times n-k}$ 1×7	0	1	2	3	4	5	6	7
nº	1	7	$\binom{7}{2} = 21$	$\binom{7}{3} = 35$	$\binom{7}{4} = 35$	$\binom{7}{5} = 21$	$\binom{7}{6} = 7$	1
$p_H(\vec{e})$	0	1	2	3	3	2	1	2

en I_7 — en P_7 — 1 de P_7 otra de I_7 — están en columnas de H (en P_7) — 1 una de P_7 otra de I_7.

...os de los errores corregibles son:

$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = 14$

$\alpha_2 = 43$

$\alpha_3 = 70$

$\Sigma \quad 128 = 2^{n-k} = 2^7$

$p(\text{decod}$...$\text{ificar incorrectamente}) = 1 - p(\vec{e} \text{ esté en la tabla de síndromes}) =$

$$= 1 - \left[(1-p)^n + 14(1-p)^{n-1} + 43 \cdot p^2 (1-p)^{n-2} + 70 p^3 (1-p)^{n-3} \right]$$

$$\vec{x}_{1\times n} \longrightarrow \boxed{\text{Canal}} \longrightarrow \qquad \vec{y}_{1\times 14} = 11111111000000$$

$$\uparrow \; \vec{e}_{1\times n}$$

…$_{14} \in C$? No pertenece al código porque la única forma de
… una palabra código con los primeros 7 bits no nulos es la
…ón lineal de todos las columnas de G y esto no da lugar
…ecuencia recibida.

La secuencia recibida está a distancia 1 de la palabra código
…1 0000000. Por tanto el error estimado será:

$$\vec{e}_{1\times 14} = 00000001000000$$

$$\boxed{\vec{x}_{est\,1\times 14} = \vec{y}_{1\times 14} \oplus \vec{e}_{est\,1\times 14} = 11111110000000}$$

…viembre 2012.

$$\underset{r-1\times 2^r}{H_r} = \begin{pmatrix} 1 1 & \cdots & 1 \\ & & 0 \\ & \underset{r\times 2^n-1}{H_r} & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad r \geq 2$$

código Hamming $\Rightarrow r = n-k$

… es la matriz de código Hamming 10 r bits de redundancia.

$$\boxed{\begin{aligned} &: n = 2^r \\ &: k = n-(n-k) = 2^r-(r+1) \end{aligned}}$$

Prop. Códigos Hamming:

- $n = 2^{n-k} - 1$
- $d_c = 3$
- 1-perfectos: solo corrigen los errores simples y ninguno más.

H_r

$r = n-k$

$H_{r\times 2^r-1}$

prop. cod. Ham.

$= 2^r - 1$

$S_{1\times n-k}$	$P_H(\vec{e})$
	0
	1

2^{n-k} (filas)

1

$n = 2^{n-k} - 1$

... las filas de $\bar{H}$ son linealmente independientes (lo son las ... por su propia construcción y la nueva fila es independiente

... porque no existen 2 columnas iguales de $\vec{H}_r$.

...iene una fila de 1 $\Rightarrow$ dc es par

$\boxed{\ldots = 4}$ En el primer bloque de la matriz $\vec{H}_r$ existen 3 columnas cuya combinación lineal es:

resultado suma 3 colum de H. $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ + última columna = $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

... no detectables son los que coinciden con las p.c.

... corregibles son los que están en la tabla de síndromes.

Errores corregibles $\rightarrow$ tabla síndromes. $P_H(e) \le \left[\frac{dc-1}{2} \right] = 1$

$S_{1 \times n-k}$ $1 \times r+1$	$P_H(\vec{e})$	nº
0 0	0	1
	1 todos	$n = 2^r$
	2	$2^{r+1} - (2^r+1) = 2^r - 1$

errores simples.

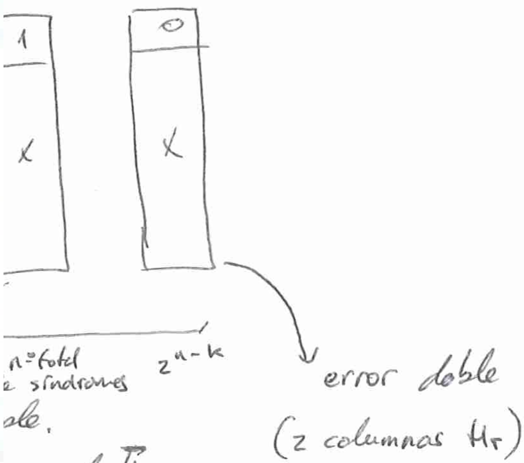
$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = 2^r$

$\alpha_2 = 2^r - 1$

... probar que solo corrige errores simples y dobles.

... probar que solo se corrigen errores simples y dobles.



...nos de $\bar{H}_r$

...ecto es así porque los síndromes con la primera componente ... coinciden con columnas de H, tienen por tanto asociado error ... El resto de síndromes se obtienen como la combinación ... dos columnas de H, tienen por tanto asociado error ... Esto es así por $\bar{H}_r$ tiene en sus columnas todas las ...ones binarios no nulas con r bits.

...uestre que $1 \in \bar{H}_r$.

...o H_r tiene un número impar de columnas (tiene todas las ...ones binarias), $\bar{H}_r$ tiene un número par por tanto el síndrome ... puesto que la 1º componente del síndrome es nula y el resto ...onentes del síndrome también son nulas porque H_r tiene todas ...s de P_H par.

$$\underset{4\times 8}{\bar{H}_3} = \begin{pmatrix} 1\,1 \; \cdots\cdots & 1 \\ & 0 \\ H_3 & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{H}_3 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

...1100000. Buscamos la $\underset{1\times 8}{X_{est}}$

$$\vec{S}_{1\times n-k} = \vec{S}_{1\times 4} = \vec{Y}_{1\times 8} \cdot H^T_{8\times 4} = 1110$$

$$\vec{Y}_{1\times 8} \notin C \Rightarrow \exists\ \vec{e}_{1\times 8}$$

…síndrome coincide con una columna de H_3 entonces

…ciado un error simple:

$$\vec{e}_{est\ 1\times 8} = 00000100$$

$$\boxed{\ldots t_{8} = \vec{Y}_{1\times 8} \oplus \vec{e}_{1\times 8} = 11100100}$$

4-nov-2014

…des detectoras de ráfagas.

… ráfaga: Se denomina ráfaga a un determinado patrón … . Su longitud se calcula como:

$$l = n - k$$

k: nº máximo de "0" consecutivos.

↑ long. del código

…digos cíclicos:

$$X(x) = 1\cdot x^5 + 1\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 1\cdot x + 1\cdot x^0 = x^5 + x^4 + x + 1$$

…n las siguientes propiedades detectoras de ráfagas:

…) Se detectan todas las ráfagas de $l \leq n-k$.

…ustificación:

$l \leq n-k \Rightarrow$ grado $\leq n-k-1 \Rightarrow \notin C$ ya que el menor grado en el código es el $g(x) = n-k$.

...a única ráfaga que no se detecta de $l = n-k+1$ es $g(x)$.

Justificación:

$l = n-k+1 \Rightarrow$ grado $= n-k$. La única que pertenece al
...o con este grado es $g(x)$.

La fracción de ráfagas no detectables de
$l > n-k+1$ es $2^{-(n-k)}$

Prop: La longitud máxima de una ráfaga de $P_H = w$ es

$$l_{max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil$$

Boletín 5

Problema 3. C código binario $[15,4]$ de polinomio generador.

$...) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)$

$dc = 6$ A partir de las propiedades detectoras:

- $dc \geq 2$
- Como $g(x)$ tiene P_H par (tiene a $(x-1)$ como factor)
  $\Rightarrow$ todos los p.c son de P_H par $\Rightarrow$ es par.

...) tiene como factor a un polinomio primitivo de grado $r=4$.

$n \leq 2^r - 1$

$15 \leq 2^4 - 1 = 15 \Rightarrow$ Detecta todos los errores dobles

$dc \geq 4$

Códigos cíclicos

...cción

...Código cíclico. Es un código lineal que cumple la ...e que cada una palabra código $\vec{X}_{1xn}$, cualquier ...o cíclico de esa palabra sigue siendo del código.

...n polinómica:

...$_6$: 100111

...n

$$= 1x^5+0\cdot x^4+0x^3+1x^2+1x+1x^0 = \boxed{x^5+x^2+x+1}$$

...n un código cíclico $C(n,k)$ el mayor grado de ... polinomio del código es $n-1$.

...mientos cíclicos

$x^5 * x^2+x+1$

1 0 0 1 1 1

...$)\ mod(x^n+1) = \cancel{\ldots} \quad x^3+x^2+x+1 \Leftrightarrow 1$ desplazamiento cíclico a la izquierda

x^3+x^2+x+1 $\quad$ $\underline{|\,x^6+1}$ $\quad 1$

... $mod(x^n+1)$ equivale a realizar i desplazamientos a la izquierda.

el síndrome este es nulo, puesto que; $\bar{H}_r$ tienen un

columnas, ya que H_r tien un n° impar. Entonces la

nte del síndrome es nula y el resto de componentes del

son nulas porque H_r tiene todas sus filas de P_H par.

$$\bar{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C(8,4)

00000

$\vec{x}_{estimado\ 1x8}$. Para eso:

$= \vec{S}_{1x4} = \vec{r}_{1x8} \cdot H^T_{8x4} =$ 1111 $\Rightarrow \vec{r}_{1x8} \notin C \Rightarrow \exists\, \vec{e}_{1x8}$

...ocado es simple, puesto que el síndrome coincide con una columna de

00000010

$\boxed{\vec{x}_{1x8} + \vec{e}_{est\ 1x8} = 11100010}$

un código cíclico $c(n,k)$, i desplazamientos cíclicos
quierda equivalen a $n-i$ a la derecha.

mio generador

palabra código $X(x)$ en un código cíclico cumple:

$$\boxed{) = a(x) \cdot g(x)}$$

polinomio generador

s de $g(x)$:

(x) es el polinomio de menor grado que pertenece al

grado de $g(x)$ es $(n-K)$

$x)$ es el único polinomio de grado $(n-K)$.

término independiente (grado 0) en $g(x)$ siempre es no nulo.

$g(x)$ genera un código cíclico entonces $g(x)$ es
de x^n+1, siendo n la longitud del código.

lo:

el código de menor longitud generado por $g(x) = x^3+x+1$

$= 3$

$g(x)$ debe ser factor de x^n+1:

$= h(x) \cdot g(x)$

1011 : $g(x)$
011 : $x\,g(x)$
1101
11 : $x^3 g(x)$
0001
$x^4 g(x)$
0001 $\Rightarrow x^7+1$

$$(x^7+1) = (1+x+x^2+x^4) \cdot g(x)$$

$$\boxed{n=7}$$

$K=4$

...edades detectoras

... de las propiedades de códigos lineales los cíclicos cumplen:

...empre detectan los errores simples. $\Rightarrow d_c \geq 2$

... $g(x)$ tiene número par de términos (P_H par), todas ...labras código van a tener P_H par $\Rightarrow$ se detectan todos los ...de P_H impar.

$\boxed{d_c \text{ es par}}$

...d. Polinomio primitivo: Sea $p(x)$ un polinomio primitivo ... cumple:

- Es irreducible
- Es factor de $x^{n'}+1$; $n'=2^r-1$; $r \equiv$ grado $(p(x))$

... $g(x)$ tiene un polinomio primitivo como factor y la n ...igo es $\Rightarrow n \leq 2^r-1$, entonces detecta todos los ...dobles.

... Obtén la d_c del código cíclico $C(7,4)$ generador por ... x^3+x+1. Nota: x^3+x+1 es primitivo.

...tir de propiedades detectoras.

$d_c \geq 2$

$g(x)$ tiene un primitivo como factor

$n \leq 2^r-1$? $7 \leq 2^3+1 \Rightarrow$ sí que se cumple $\Rightarrow$

...ecta todos los errores dobles $\Rightarrow d_c \geq 3$

$\boxed{d_c = 3}$, porque $g(x)$ pertenece al código y tiene $P_H = 3$

...atriz generadora en códigos cíclicos.

$(n,k) = C(7,4) \qquad g(x) = x^3+x+1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x^3 g(x) \\ \leftarrow x^2 g(x) \\ \leftarrow x g(x) \\ \leftarrow g(x) \end{matrix}$$

que $G_{K\times n}$ sea sistemática

$$G_{K\times n} = \left(I_K \;\middle|\; \quad \right) \begin{matrix} \leftarrow i=n-1 \\ \\ \rightarrow i=n-k \end{matrix}$$

$\uparrow x^i \bmod$ [scribbled out] $g(x)$, $i: n-K, \ldots, n-1$.

...4

$\ldots^2(x^3+x+1)) = (x^2+1)(x^3+x+1)$

$= x^2-2x+1 = x^2+1$

$2x = x+x = 0$

grado $(g(x)) = n-K = 5$

Calculamos n

(x^3+x+1): por ser primitivo es factor de $x^{n'}+1 = x^7+1$

$n' = 2^r-1 = 2^3-1 = 7$

$\cdot (x^2+1)$ es factor de todo $x^n+1 \,/\, n=2$...

x^n+1 es factor de todo x^n+1, $n=$ (múltiplo de 2)

...menor par múltiplo de 7 $\Rightarrow$ $\boxed{n=14}$ $\boxed{K=9}$ $\qquad n-K=5$

$C(14,9)$

...as propiedades detectoras:

≥ 2

...(x) p_H par $\Rightarrow$ dc par , todas las p.c son de p_H par.

...(x) tiene un primitivo como factor.

$n \leq 2^3 - 1 \Rightarrow \cancel{14 \leq 7} \Rightarrow$ No podemos asegurar que detecte todos los dobles con esta propiedad.

...que se cumple es que se detectan todos aquellos errores cuyos bits no nulos estén en las primeras 7 posiciones de palabra, y sus desplazamientos cíclicos. El único polinomio que cumple lo anterior es $x^7 + 1$

...e comprobar si x^7+1 pertenece o no al código. Si no será detectable. Para que pertenezca debe ser divisible por ... y no lo es. (Hemos comprobado que $n=14$). Todos los dobles son detectables $\Rightarrow dc > 2$.

$\boxed{=4}$ $g(x) \in C$, tiene $p_H = 4$

6

$\ldots 1)\underbrace{(x^7+x^3+1)}_{\text{primitivo}}$

$\ldots +x^4+x-x^7-x^3-1 = x^8-x^7+x^4 \ldots -x^3+x-1$

$\ldots) = n-k = 8$

factor x^n+1.

x^7+x^3+1 : por ser primitivo es factor de $x^{n'}+1 = x^{127}+1$

$n' = 2^m-1 = \ldots = 2^7-1 = 127$

$\ldots 1$ es factor de x^n+1

$\ldots = 127$, $n-k=8$, $k = 127-8$, $\boxed{k=119}$

$\boxed{(127, 119)}$

las propiedades detectoras:

2

$P_H(g(x))$ es par $\Rightarrow$ d_c par, todas las p.c. son de P_H par.

tiene un primitivo como factor

$n \leq 2^7-1 \Rightarrow 127 \leq 127 \Rightarrow$ detecta todos los errores dobles.

$d_c \geq 3 \Rightarrow d_c \geq 4$

011 : $g(x)$
11 : $xg(x)$

101
1 : $x^2 g(x)$

001 : $g \Rightarrow g(x)(1+x+x^2)$

...apaz de corregir todos los [redacted] errores tales que:

$P_H(\vec{e}_{ixn}) \le \left[\frac{d_c-1}{2}\right] \Rightarrow$ corrige todos los errores simples.

Como $d_c \ge 4$

$P_H(\vec{e})$	nº
0	1
1	$n=127$

$\}$ 128

$2^8 = 256$

no se pueden corregir todos los errores dobles porque no caben en la tabla de síndromes.

dobles en total: $\binom{n}{2} = \binom{127}{2} = \frac{127!}{2!\,125!} = \frac{127 \cdot 126}{2}$

$\Downarrow$

$\underline{d_c = 4}$

no puede ser 6, ya que si no debería corregir todos los errores dobles

$P_H(\vec{e}_{ixn}) \le \left[\frac{d_c-1}{2}\right]$

detectoras de ráfagas.

... denomina ráfaga a un determinado patrón de errores. Su ... calcula como

$l = n - R$

$n \equiv$ longitud código

$R \equiv$ nº máximo de bit cero consecutivos.

...00010001 $\rightarrow l = n - R = 15 - 5 = \underline{10}$

...do de una ráfaga de longitud l es $l-1$.

...s siguientes propiedades detectoras de ráfagas.

... detectan todas las ráfagas de $l \leq n-K$

...tificación:

...$n-K \Rightarrow$ grado $\leq n-K-1 \Rightarrow \notin G$ ya que el menor grado

... código es el de $g(x) = n-K$

... única ráfaga que no se detecta de $l = n-K+1$ es $g(x)$.

...tificación:

...$n-K+1 \Rightarrow$ grado $= n-K$ La única que pertenece al código con este grado es $g(x)$.

... fracción de ráfagas no detectables de longitud $> n-K+1$ es

función techo

l máxima de una ráfaga de $P_H = w$ es $l_{max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil$

3

$-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)$

de las propiedades detectoras:

$d_c \geq 2$

omo $g(x)$ tiene P_H par (tiene a $(x-1)$ como factor) $\Rightarrow$

. palabras código tienen P_H par $\Rightarrow$ d_c par

F_{11}

$g(x)$ tiene como factor a un polinomio primitivo de grado 4.

; $15 \leq 2^4-1$ ✓

$\Downarrow$

Detecta todos los errores dobles.

$\Downarrow$

$d_c \geq 4$

$\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x}+1)(x^8+x^7+x^4+x^5+x^4+x+x^4+x^2+1) = x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x+1$

probar que no $\exists$ palabras código de $P_H=4$ en el código.

probar que todas las ráfagas de $P_H=4$ son detectables.

ud máxima de una ráfaga de $P_H=w$ cumple:

$x = n - \lceil \frac{n-w}{w} \rceil$. En este caso

$15 - \lceil \frac{15-4}{4} \rceil = 12$; Por propiedades de ráfagas sabemos:

$n-k = 11$. , son todas detectables

$n-k+1 = 12$, la única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x)$ no tiene

no hay palabras de $P_H=4$ en el código.

$x^2+x+1)(x^7+x^4+x+x^3+1) \Rightarrow \boxed{g(x) = x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x+1}$

$$x^{11}+\cancel{x^7}+x^5+\cancel{x^4}$$
$$x^{10}+x^6+\cancel{x^4}+\cancel{x^3}$$
$$\cancel{x^7}+x+1$$

probar que no existen p.c de $P_H = 4$ en el código $\Rightarrow$

suficiente probar que todas las ráfagas de $P_H = 4$ son detectables.

ngitud máxima de una ráfaga de $P_H = w$ cumple:

$l_{max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil$. En este caso:

$$l_{max} = 15 - \left\lceil \frac{15-4}{4} \right\rceil = 12$$

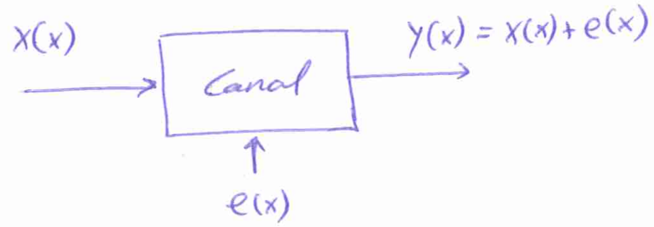
opiedades de ráfagas sabemos:

- $l \leq n-k = 11$ son todas detectable.
- $l = n-k+1 = 12$ La única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x)$ no tiene $P_H = 4$.

anto no existen en el código p.c de $P_H = 4$.

$dc \geq 6$. Como $g(x) \in$ al código y $g(x)$ tiene $P_H = 6 \Rightarrow \boxed{dc = 6}$

…rección de errores



…. síndrome:

$$\boxed{S(x) = y(x) \bmod g(x)}$$

$$s(x) = 0 \Rightarrow y(x) \in C.$$

… calcular $X_{est}(x)$:

a) Calculamos $s(x)$.

si $s(x) = 0 \Rightarrow y(x) = X_{est}(x)$.

b) si $s(x) \neq 0 \Rightarrow y(x) \notin C. \Rightarrow \exists\, e(x)$.

$e_{est}(x) = s(x)$ siempre que este sea un error corregible.

$$\boxed{X_{est}(x) = y(x) + e_{est}(x)}$$

...a 2. $g(x) = x^{11}+x^{9}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x+1$

...códigos lineales, por tanto también los códigos, corrigen ...quellos errores tales que:

$$P_H(\vec{e}) \le \left[\frac{d_c-1}{2}\right] = \left[\frac{7-1}{2}\right] = 3$$

$\vec{S}_{1\times n-k}$ (1×11)	$P_H(\vec{e})$	nº
	0	1
	1	$n=23$
	2	$\binom{23}{2}$
	3	$\binom{23}{3}$

$n-k = \text{grado}(g(x)) = 11$

...x) ?

$$y(x) = \cancel{x^{13}} + \cancel{x^{8}} + x^{6} + x^{5} + \cancel{x^{3}} + \cancel{x^{2}} + x + 1 \quad \Big| \; x^{11}+x^{9}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x+1$$

$$\cancel{x^{11}} + \cancel{x^{9}} + \cancel{x^{7}} + \cancel{x^{6}} + \cancel{x^{5}} + \cancel{x} + \cancel{1} \qquad x^{2}+1$$

$$0$$

...lcular $S(x)$

$S(x) = y(x) \bmod g(x)$ $\qquad S(x)=0$

$y(x) \in C$: $\boxed{x_{est}(x) = y(x)}$

$$\ldots^{16} + \cancel{x^{14}} + x^{13} + \cancel{x^{12}} + x^{11} + x^{3} + x + 1 \quad \Big| \; x^{11}+x^{9}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x+1$$

$$\cancel{x^{13}} + \cancel{x^{10}} + x^{8} + \cancel{x^{6}} + \cancel{x^{5}} + \cancel{x^{3}} + \cancel{x} + \cancel{1} \qquad x^{5}+x^{2}+1$$

$$\cancel{x^{9}} + \cancel{x^{7}} + x^{2} + \cancel{x^{11}} + \cancel{x^{6}} + \cancel{x^{5}}$$

$$S(x) = x^{10}+x^{8}+x^{2}$$

...estro código corrige todos los errores triples $e_{est}(x) = S(x)$

$$\ldots) + e_{est}(x) = x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^{8}+x^{3}+x^{2}+x+1$$

$+ \cancel{x^{16}} + \cancel{x^{14}} + \cancel{x^{13}} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^2 + x \quad \Big| \; x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$

$\cancel{x^{12}} + x^{11} + \cancel{x^{10}} + \cancel{x^8} + \cancel{x^7} + \cancel{x^6} + \cancel{x^2} + \cancel{x} \qquad x^7 + x + 1$

$\cancel{x^{11}}$

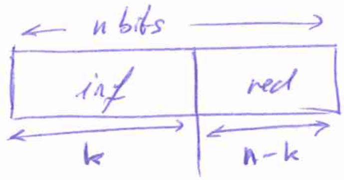
$(x^9+x^7+x^6+x^5+x+1)$

$x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$

$e_{est}(x) = x^{11}$ lo cumple. (divisor - resto)

$\boxed{= y(x) + x^{11} = x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{10}+x^6+x^2+x}$

Codificación sistemática.



$\boxed{X(x) = x^{n-k}\cdot \mu(x) + r(x)}$

$= x^{n-k}\cdot \mu(x) \cdot \bmod g(x).$

$\mu(x)$: polinomio de información.

$r(x)$: polinomio de redundancia.

28 noviembre 2012.

$C(15,4)$ cíclico.

$g(x) = x^{11}+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1$

$g(x)$ tiene P_H par todas las palabras código van a tener

porque se obtienen como sumas de versiones desplazadas de

$X(x) = a(x)\cdot g(x)$

primer lugar calculamos el síndrome de la secuencia recibida:

$(x) = y(x) \bmod g(x)$.

$$\cancel{x^{14}} + x^{12} + \cancel{x^{11}} + \cancel{x^{10}} + x^9 + \cancel{x^8} + \cancel{x^4} + x + 1 \quad \big/ \; x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\cancel{x^{12}} + \cancel{x^9} + \cancel{x^8} + \cancel{x^6} + \cancel{x^3} + \cancel{x} + 1 \qquad x^3 + x$$

$$x^4 + x^2 + 1$$

$$S(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) \notin C$$

en todos aquellos $e(x)$ tales que

$$(\vec{e}) \leq \left[\frac{d_C - 1}{2}\right] = \left[\frac{8-1}{2}\right] = 3$$

$) = s(x)$ puesto que se corrigen todos los errores triples.

$$= y(x) + e_{est}(x)$$

$\vec{S}_{1\times n-k}$ 1×11	$P_H(\vec{e})$	nº
2^{11}	0	1
	1	$n = 15$
	2	$\binom{n}{2} = \binom{15}{2} = 105$
	3	$\binom{15}{3} = 455$
	⋮	máx.

$(x) = x^{n-k} \cdot \mu(x) + r(x)$

código $[15, 4] \rightarrow$ 4 bits de información.

polinomio de información no puede ser mayor que grado 3.

$\mu(x) = x^3 + 1$

$$x^5 + x^3 + 1$$

$$0010\,1001$$

$$n - k = 11$$

$$x^{n-k} \cdot \mu(x) = x^{11} \cdot (x^3 + 1) = x^{14} + x^{11}$$

$$r(x) = x^{n-k} \cdot \mu(x) \bmod g(x) = x^{14} + x^{11} \bmod g(x)$$

$$\cancel{x^{14}} + \cancel{x^{11}} \quad \big/ \; x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\underbrace{x^{10} + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3}_{r(x)} \qquad x^3$$

$$\boxed{= x^{14} + x^{11} + x^{10} + x^{8} + x^{6} + x^{5} + x^{4} + x^{3}}$$

N 5 NOVIEMBRE.

ema 5.

$C(15,10) \quad g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$

$\to$ C(n,k) $\xrightarrow{X(x)}$ Canal

x)

$X(x) = x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$

$r(x) = x^{n-k} \cdot u(x) \mod g(x)$

$) = x^5 \cdot x = x^6$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^6} & x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\ \hline \cancel{x^5} + x^3 + x & x + 1 \\ x^4 + x^3 + x + x^2 + x + 1 & \end{array}$$

$^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$$\boxed{^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$

$_1(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ $\quad$ $g(x)$ es la p.c de menor grado. (grado 5)

no pertenece al código porque todas las p.c tienen P_H par.

porque $g(x)$ tiene P_H par y todas las p.c se obtienen como suma

s desplazadas de $g(x)$: $X(x) = u(x) \cdot g(x)$

$x^9 + x^8 + x^7 + x^5.$ $\xrightarrow[\text{cíclicamente}]{\text{desplazándolo}}$ $x^4 + x^3 + x^2 + 1.$

no pertenece al código porque existe un desplaz. cíclico de

menor que el de $g(x)$.

$P_2(x)$

$^{15} + x^8 + x^7 + x^5$.

pertenece al código porque el mayor grado posible en el código

amen 24 de mayo 2011.

1. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico [17, 9].

Mostrar que no existen p.c. de $P_H = 2$.

Hay que probar que todas las ráfagas de $P_H = 2$ son detectables.

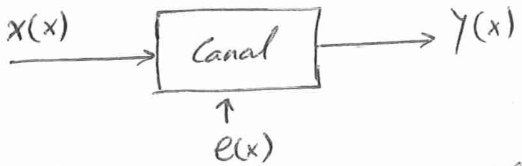
$$l_{max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil = 17 - \left\lceil \frac{17-2}{2} \right\rceil = 17 - 8 = 9$$

zando las prop. detectoras de ráfagas:

a) $l \le n - k = 8$ son detectables.

b) $l = n - k + 1 = 9$ la única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x)$ no tiene $P_H = 2$

anto, no existen p.c de $P_H = 2$.



¿ $X_{est}(x)$?

$S(x) = Y(x) \bmod g(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^9 + \cancel{x^7} + x^5 + \cancel{x} + 1 & x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \\ \hline + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^3} + \cancel{x} + \cancel{x} & x^3 + x + 1 \\ \cancel{x^4} + & \\ x^5 & \end{array}$$

$S(x) = x^5 \Rightarrow Y(x)$ no pertenece al código, existe error.

> 3 (enunciado) $\Leftrightarrow d_c \ge 4$

$P_H(e) \le \left\lfloor \frac{d_c - 1}{2} \right\rfloor$

$e(x) = x^5$ es corregible porque el código corrige todos los simples.

$$\boxed{X_{est}(x) = Y(x) + x^5}$$

:

...ema 4: $g(x) = (x-1)^2\,(x^7+x^3+1)$ $\quad C(254, 245)$

NOTA: x^7+x^3+1 es $p(x)$.

a) Justifíquelo

$(x-1)^2 = x^2+1$

$(x-1)^2$ divide a todo x^n+1, $n=\dot{2}$

x^7+x^3+1 : por ser primitivo divide a todo

$x^{n'}+1 = x^{127}+1$ a todo x^n+1 $\quad n=\dot{127}$

$n' = 2^r-1 = 2^7-1 = 127$

$\boxed{n=254}$

$n-k = $ grado $g(x) = 9 \Rightarrow \boxed{k = 254-9 = 245}$

Enero 2012.

...lema 8. Una familia de código lineales queda definida por ...z de comprobación de paridad con la siguiente estructura:

$\begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ V_{m-1} \end{pmatrix}$. Siendo V_{m-1} una matriz por bloque cuyas columnas ...s los vectores binarios de longitud $m-1$. Calcula longitud, ... y distancia.

$$V_{m-1 \times 2^{m-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{matrix}} & \cdots & \boxed{} \end{pmatrix}}_{2^3} \qquad \underset{n-k \times n}{H_{m \times 2^{m-1}}} = \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \\ V_{m-1} \end{pmatrix}$$

...s de H son todas linealmente independientes por la propia ...ión de la matriz V_{m-1}.

Problema 4 (2 puntos). Considere el código lineal de matriz de comprobación de paridad

$$H = (P_{m/2} \quad I_m)$$

en donde I_m denota la matrix identidad de orden m y $P_{m/2}$ es la matriz que tiene por columnas todos los vectores binarios de peso $m/2$. Para $m = 6$ obtenga:

a) La longitud, dimensión y distancia del código.

b) La probabilidad de decodificar incorrectamente al transmitir sobre un canal binario simétrico con $p = 0{,}05$.

a Puesto que existen $\binom{m}{m/2}$ vectores binarios de longitud m y peso $m/2$, la matriz H tiene dimensiones $m \times m + \binom{m}{m/2}$, que para $m = 6$ es igual a 26. En consecuencia, se trata de un código lineal $[26, 20]$. Para encontrar la distancia, observe que, como $m/2$ es impar, todas las columnas de H son de peso impar, por lo que la distancia del código es necesariamente par. Y como todas esas columnas son distintas, $d_C \neq 2$. Pero es trivial encontrar 4 columnas de H linealmente independientes, por ejemplo

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

lo que demuestra que la distancia es 4.

b) Para calcular esta probabilidad es preciso conocer la distribución de pesos de los errores corregibles. Pues bien, a la vista de H, cualquier síndrome de peso 1 —hay m distintos— estará asociado a un vector de error de peso 1; idem para los síndromes de peso $m/2 = 3$, de los que existen $\binom{m}{m/2}$; los síndromes de peso 2 se corresponden todos —son $\binom{m}{2}$— con errores de peso 2; el único síndrome de peso m, también; los síndromes de peso $m/2 + 1 = 4$, también se asocian con errores de peso 2; y, por último, los síndromes de peso $m - 1 = 5$ permiten corregir errores de peso 3, habiendo m de tales síndromes. En consecuencia, la distribución es

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = m + \binom{m}{m/2} = 26, \alpha_2 = 1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{m/2+1} = 31, \alpha_3 = m = 6$$

y la probabilidad pedida vale

$$1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i} = 1 - q^{26} - 26pq^{25} - 31p^2q^{24} - 6p^3q^{23} \approx 0{,}353.$$

Problema 5 (3 puntos).

a) El polinomio $(x-1)(x^7+x+1)$, donde x^7+x+1 es primitivo, genera un código cíclico $[127, 119]$. Se nos dice que la distancia es 4. ¿Es esto cierto? ¿Por qué?

b) Obtenga la salida del decodificador si se reciben los siguientes vectores

$$x^{21}+x^{20}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1, \qquad x^7+x^2+1.$$

c) Codifique en forma sistemática el mensaje $x^8+x^7+x^2+1$.

a) Como $x-1$ es un divisor de $g(x)$, el código consta únicamente de palabras de peso par, y no contiene palabras de peso 2 porque el factor primitivo x^7+x+1 garantiza la detección de todos los errores dobles. Pero $g(x) = x^8+x^7+x^2+1$ es una palabra de peso 4, y se concluye así que la distancia es 4.

b)

$$x^7+x^2+1 \mod g(x) = x^7+x^2+1,$$

pero el vector recibido x^7+x^2+1 está a distancia 1 de $g(x)$. Dado que el código corige errores de peso 1 (porque $d_c = 4$), la salida del decodificador es $g(x)$. De modo similar

$$x^{21}+x^{20}+x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \mod g(x) = x^6$$

con lo que el vector $y(x) + x^6$ es una palabra del código. Por estar a distancia $y(x)$ a distancia 1 de ella y poder el código corregir errores simples, se decodifica como $y(x) + x^6$.

c) $m(x)$ es el propio polinomio generador. Así pues, su codificación sistemática es $x^8 m(x)$.

TÍN 5 NOVIEMBRE.

ema 5 (1.5 punto).
ere el código cíclico (15, 10) generado por $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$.

codificación es sistemática, ¿qué secuencia produce el codificador para la entrada 0000000010?

ne, sin hacer cálculos, cuál o cuáles de los siguientes polinomios no pueden pertenecer al
o: $p_1(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$, $p_2(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^5$, $p_3(x) = x^{15} + x^8 + x^7 + x^5$.

ón

x) y $v(x)$ representan, respectivamente, la entrada y la salida elementales del codificador:

$$v(x) = x^{n-k}u(x) + x^{n-k}u(x)\mathrm{mod}g(x)$$

ste caso, como $u(x) = x$, $n - k = 5$ y $x^6\mathrm{mod}g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, se tiene que

$$v(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

epresenta la siguiente secuencia: 000000001011111.

uno de los polinomios dados pertenece al código:

$p_1(x)$, porque tiene peso impar (cuando $g(x)$ tiene peso par);

$p_2(x)$, porque es el resultado de desplazar 5 veces el polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + 1$, que no puede ser del código porque tiene un grado menor que el de $g(x)$;

$p_3(x)$, porque el código (de longitud 15) no contiene polinomios de grado mayor que 14.

:rsida de Vigo

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TELEMÁTICA

Examen de Fundamentos de Telemática

24 de mayo de 2011

ɔre: ______________________ D.N.I.: ______________

la la fuente X, de rango $\mathcal{X} = \{i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq 4\}$ y función de masa de probabilidad $p_i = \mathbb{P}(X =$ ^{i} para $i < 4$, y un canal cuaternario con borrado con probabilidad de error p en la transmisión . símbolo

etermine la información media transmitida por cada símbolo de la fuente cuando se usa direc- mente el canal (es decir, sin ninguna codificación). **(1 punto)**

el coste de transmisión de un símbolo por el canal dado es unitario, ¿cuánto estaríamos dis- ıestos a pagar por un canal cuaternario fiable si queremos transmitir fielmente un mensaje bitrariamente largo y no importa el tiempo de transmisión? **(1 punto)**

el régimen de transmisión de ambos canales es idéntico y los costes son los del apartado anterior, uánto costaría transmitir un mensaje de la fuente de n (arbitrariamente grande) símbolos si se asen simultáneamente los dos canales? **(1 punto)**

ınto) La secuencia

$$A, N, U, L, (1, 2, L), (5, 3, U), Z, (7, 2, Z), (3, 8, N), (1, 2, \emptyset)$$

ıta la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado , `longitud de la frase`, `sufijo`), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el ılo. Averigüe el mensaje.

ıatriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

tenga la distribución de pesos de los errores corregibles. **(1 punto)**

nsidere el subconjunto de palabras del código que comienzan por 0. Obtenga la distribución de sos de este subcódigo. **(1 punto)**

$= x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.

ıestre que no existen palabras del código de peso 2. **(1 punto)**

npoco las hay de peso 3. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se ibe el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? **(1 punto)**

nto) Dos equipos están conectados mediante M enlaces paralelos idénticos con tasa de trans- bits/s. ¿Cuál sería la cadencia eficaz agregada si se utiliza una estrategia de envío continuo ızo simple para transmitir por cada uno de ellos? Compárela con la cadencia eficaz de un único tasa de transmisión MC bits/s que usase la misma estrategia y tuviera iguales los restantes ros.

ınto) En un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a ıa, las transmisiones son exitosas si en cada ranura hay uno o dos intentos de transmisión. aciones transmiten independientemente con probabilidad $p = 1/n$ en cada ranura ¿cuál será cia (para $n \to \infty$) del sistema? ¿Aumenta la eficiencia si $p = 1/(2n)$? Suponga que ninguna transmite dos tramas en una misma ranura.

parámetros de $\mathcal{H}_r$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 1, 4]$. $\mathcal{H}_{r,e}$ tiene la misma longitud y dimensión una ad mayor (consta de la mitad de las palabras de $\mathcal{H}_r$). Tiene distancia 4 porque $\mathcal{H}_r$ contiene ɔra de peso 4, pero no de peso 2.

ige todos los errores simples, $2^r - 1$. El resto de los $2^{r+1} - 1$ errores corregibles son dobles, ɛcir, 2^r.

6 (1,5 puntos). Para el código $[63, 57]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^5 + x^2 + 1)$,

fique sistemáticamente el mensaje x.

el polinomio $x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ el decodificador estima la palabra del código $(x^2 + x + 1)g(x)$. correcto? El código tiene distancia 4.

odificación sistemática es

$$x^7 - x^7 \quad \text{mód } g(x) = x^7 + x^5 + x^4 + 1.$$

$x^2 + x + 1)g(x) = x^8 + x^3 + x^2 + 1$ que sólo dista en un término (x^7) del vector recibido.

7 (1 punto). Calcule la expresión de la cadencia eficaz para una estrategia convencional de spera si en el canal de retorno los asentimientos se pierden con probabilidad q.

ema es estocásticamente idéntico a uno en donde no hay errores ni pérdidas en el canal de as tramas de datos se se transmiten correctamente con probabilidad

$$1 - p_t' = (1 - p_t)(1 - q)$$

s la probabilidad de error o pérdida de una trama de datos en el sistema original. En estas s, la cadencia eficaz es

$$C_{\text{ef}} = (1 - p_t)(1 - q)\frac{n}{n + m + T_{\text{as}}C}C$$

ación habitual.

8 (1 punto). ¿Por qué existe un tamaño mínimo para la longitud de las tramas en Ethernet?

isores sólo escuchan el canal mientras dura la transmisión. Si las tramas son muy cortas, ejar de escuchar antes de que la señal de colisión les llegue.

i el código cíclico de generador $g(x)$ detecta el error $\vec{e}$, entonces también detecta todos los vectores e error que son desplazamientos cíclicos de $\vec{e}$.

i $\mathcal{C}$ es un código lineal $[n, k]$, con n impar, y $x^2 v(x) \mod x^n - 1 \in \mathcal{C}$ para todo $v(x) \in \mathcal{C}$, entonces ' es un código cíclico.

blema 6

abiendo que $x^7 + x^3 + 1$ es un polinomio primitivo, enuncie las propiedades de detección de errores el código cíclico generado por $g(x) = (x-1)(x^7 + x^3 + 1)$.

Es capaz este código de corregir los errores simples? ¿Y los errores dobles?

blema 7. Sea $\mathcal{C}$ el código cíclico binario de longitud 15 engendrado por $g(x) = (x^5+1)(x^4+x+1)$. ere además el código

$$\hat{\mathcal{C}} = \{(c_0 \dots c_{14}) : (c_{14} \dots c_0) \in \mathcal{C}\}.$$

Es $\hat{\mathcal{C}}$ un código cíclico?

Cuál es la dimensión de $\mathcal{C}$?

ncuentre la dimensión y la distancia de $\mathcal{C} \cap \hat{\mathcal{C}}$.

ompruebe que 110110110110110 pertenece a $\mathcal{C} \cap \hat{\mathcal{C}}$.

blema 8.

ea el menor código cíclico engendrado por el polinomio $(x-1)(x^7+x+1)$, donde x^7+x+1 es rimitivo. Se nos dice que la distancia es 4. ¿Es esto cierto? ¿Por qué?

)btenga la salida del decodificador si se reciben los siguientes vectores

$$x^{21} + x^{20} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1, \qquad x^7 + x^2 + 1.$$

numere las propiedades de detección de errores que conozca para este código.

blema 9. Escriba una matriz generadora sistemática y una matriz de comprobación de paridad ligo cíclico $[17, 8]$ generado por $(x-1)(x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$.

blema 10. Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^4 + x + 1$ son primitivos.

Cuál es el código de menor longitud generado por

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)?$$

i se sabe además que todas las palabras del código no nulas tienen peso múltiplo de 4, encuentre os maneras distintas de deducir que la distancia es 8.

blema 11.

)emuestre que si un polinomio es irreducible entonces su recíproco también lo es.

)emuestre que el recíproco de un polinomio primitivo es otro polinomio primitivo.

)emuestre que el polinomio recíproco de un producto de polinomios es el producto de los recíprocos e los factores. Si, además, los factores no tienen raíces comunes ¿qué significado tiene esta propiedad ara los códigos cíclicos que engendran?

Boletín 5

oblema 1

Los bloques de un sistema de transmisión de datos pueden llevar hasta 50 caracteres de 8 bits, más 0 bits de redundancia. Considerando que el canal tiene errores estadísticamente independientes, y abiendo que los polinomios

$$x^5+x^2+1 \quad x^6+x+1 \quad x^7+x^3+1$$
$$x^8+x^4+x^3+x^2+1 \quad x^9+x^4+1 \quad x^{10}+x^3+1$$
$$x^{11}+x^2+1$$

on polinomios primitivos, diseñe un código cíclico con óptimas propiedades detectoras, indicándo-as.

Valdría el código anterior si los mensajes pueden llevar hasta 100 caracteres? De no ser así, pro-onga otro código cíclico e indique los errores que puede detectar.

oblema 2. El polinomio $g(x) = x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$ genera un código cíclico $[23, 12]$ o de distancia 7.

Estime el vector código transmitido si se reciben los siguientes vectores:

$$x^{13}+x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1$$
$$x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^3+x+1$$
$$x^{18}+x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{11}+x^{10}+x^6+x^2+x$$

Cuál es la probabilidad de error de decodificación en un canal binario simétrico con $p = 0{,}01$? Cuál sería, en el mismo canal, la de un sistema sin codificación?

oblema 3. Sea $\mathcal{C}$ el código cíclico binario $[15, 4]$ de polinomio generador

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1).$$

Utilice el hecho de que los factores x^2+x+1, x^4+x^3+1 y x^4+x+1 son polinomios primitivos y as propiedades de detección de ráfagas de error para deducir que la distancia de $\mathcal{C}$ es 6.

e recibe el vector $x^{13}+x^{11}+x^8+x^6+x^3+x+1$. Si el decodificador realiza corrección de errores, qué palabra código estima?

Dé el polinomio generador de $\mathcal{C}^{\perp}$.

oblema 4. Para el menor código cíclico generado por $g(x) = (x-1)^2(x^3+x+1)$

scriba una matriz generadora sistemática

Obtenga la distancia

numere las propiedades de detección de errores

$^3+x+1$ es un polinomio primitivo.

oblema 5. Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

n código equivalente a un código cíclico es cíclico.

i $\mathcal{C}$ es un código cíclico, el código $\mathcal{C} \cup (\bar{1}+\mathcal{C})$ es también cíclico.

Problema 3 (3 puntos).
Considere el código lineal de matriz generadora

$$G = (I_7 \mid P_7)$$

en donde P_7 es la matriz 7×7 cuyas columnas son vectores binarios distintos de peso 6.

1. ¿Cuál es la probabilidad de detectar un error de transmisión?
2. ¿Cuál es la probabilidad de decodificar incorrectamente?
3. Razone, sin hacer ningún cálculo, cómo se decodificaría el vector $\mathbf{y} = (1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$.

Solución

1. $\Pr(\text{detectar error}) = 1 - \Pr(\text{transmisión correcta}) - P_{ed} = 1 - \sum_{i=0}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}$

   donde $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es la distribución de pesos del código (para su obtención véase el problema 6 del capítulo 4 del libro de problemas).

2. $\Pr(\text{error de decodificación}) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}$

   donde $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es la distribución de pesos de los errores corregibles (para su obtención véase el problema 6 del capítulo 4 del libro de problemas).

3. Por la definición de G, el vector $(1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$, que difiere de $\mathbf{y}$ únicamente en la octava componente, pertenece al código y sería el resultado de la decodificación, puesto que todos los errores simples se corrigen (véase $\{A_i\}$ o $\{\alpha_i\}$).

Problema 4 (2 puntos).
Considere un protocolo de retransmisión de parada y espera. Considere que no se pierden ni las tramas de datos ni los asentimientos (que sólo son positivos), aunque la probabilidad de error en ambos casos no es despreciable, siendo éstas p_f y p_a respectivamente. Suponga que el emisor ignora los asentimientos erróneos.

1. Calcule el número medio de veces que se transmite una trama.
2. Calcule la cadencia eficaz si la espera para retransmitir es Tout.

Solución

1. Es condición necesaria para que no se retransmita una trama (éxito), que no se produzca ningún error ni en la trama de datos ni en el asentimiento correspondiente, que son eventos que podemos suponer independientes. Así,

$$\Pr(\text{éxito}) = (1 - p_f)(1 - p_a) = 1 - p$$

Si las sucesivas transmisiones de una misma trama se suponen independientes, entonces el número de transmisiones de la misma, n_t, es una variable aleatoria geométrica de media

$$E(n_t) = 1/(1-p)$$

2. El tiempo de ocupación de una trama está dado por

Universidad de Vigo

Comunicación de Datos

28 de noviembre de 2012

Nombre: ______________________ D.N.I.: ______________

1. El código Hamming binario extendido $\overline{\mathcal{H}}_r$ es el de matriz de comprobación de paridad

$$\overline{H}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & H_r & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad r \geq 2$$

en donde H_r denota la matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario con r símbolos de redudancia. $\overline{\mathcal{H}}_r$ se obtiene añadiendo a las palabras un símbolo de paridad par.

a) ¿Qué longitud, dimensión y distancia tiene $\overline{\mathcal{H}}_r$? **(1 punto)**

b) Deduzca que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2^r$ y $\alpha_2 = 2^r - 1$ es la distribución de pesos de los errores corregibles. **(1 punto)**

c) Muestre que $\mathbf{1} \in \overline{\mathcal{H}}_r$. **(1 punto)**

d) Escriba explícitamente la matriz $\overline{H}_3$ y úsela para decodificar el vector $1110\ldots0$. **(1 punto)**

2. (1 punto) Sea C un código lineal y sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ dos vectores de error corregibles. Pruebe que $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ no puede ser una palabra de C.

3. Hay únicamente tres códigos cíclicos binarios $[15, 4]$, y uno de ellos es el generado por

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^{11}+x^8+x^7+x^5+x^3+x^2+x+1.$$

a) El código no posee palabras de peso impar. Explique cómo se llega a esta conclusión. **(1 punto)**

b) $g(x)$ genera un código de distancia 8. Decodifique el vector recibido $x^{14}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^5+x^4+x+1$. **(1 punto)**

c) Dé la codificación sistemática del mensaje x^3+1. **(1 punto)**

4. (Multiplexación asíncrona) (1 punto) La estrategia de parada y espera puede ser pobre para un solo par emisor-receptor, pero no tiene por qué serlo para un enlace compartido. Tenemos un enlace punto a punto sobre el que se multiplexan de manera oportunista las tramas de S flujos distintos: cada trama se etiqueta con un identificador del flujo al que pertenece más un número de secuencia módulo 2, y se transmite en cuanto el canal está libre y las reglas de parada y espera *para cada flujo* lo permitan. Si el número de flujos es suficientemente grande, ¿cuál es la cadencia eficaz del enlace? ¿Y cuál es la cadencia eficaz de cada flujo? No necesita cálculos para responder.

5. (1 punto) Determine la región de parámetros en la que la estrategia de envío continuo con rechazo simple tiene una cadencia eficaz al menos un 25 % mejor que la que se obtendría con parada y espera en las mismas condiciones, en el caso particular de que $T_{as}C$ sea igual a la longitud de k tramas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/10 & 9/10 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

se transmiten símbolos con una distribución de probabilidad $(3/5, 1/5, 1/5)$.

a) Determine $I(X;Y)$. **(1 punto)**

b) Ídem si se sabe que no se recibe y_2. **(1 punto)**

2. Dados un canal cuaternario de capacidad un tercio la del ideal y una fuente simétrica con alfabeto de 27 elementos

a) ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir un mensaje de la fuente de n símbolos (n arbitrariamente grande) si el régimen de transmisión del canal es unitario? **(1 punto)**

b) El mensaje anterior se puede transmitir por otro canal cuaternario con régimen de transmisión también unitario en la mitad de tiempo. ¿Cuál es la capacidad de este canal? **(1 punto)**

3. **(1 punto)** Muestre que la longitud de un código binario compacto para una fuente ternaria está acotada superiormente por 5/3.

4. **(1 punto)** La secuencia

$$A, N, U, L, (1,2,L), (5,3,U), Z, (7,2,Z), (3,8,N), (1,2,\emptyset)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado `(índice, longitud de la frase, sufijo)`, la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

5. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles. **(1 punto)**

b) Obtenga la distribución de pesos de las palabras del código **(1 punto)**

6. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.

a) $x^{17} - 1 = (x-1)(x^{16} + \cdots + x + 1)$. Demuestre, sin realizar ninguno división, que el vector $1 \ldots 1$ es una palabra del código. **(1 punto)**

b) El código no contiene palabras de peso 2. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se recibe el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? **(1 punto)**

contiene vectores de peso 2.

2. Si se sabe que pertenece al código el vector de peso 8, razone, sin hacer ningún cálculo, que con excepción del vector nulo, todos los demás vectores del código son de peso 4.
3. Razone, sin hacer ningún cálculo, cómo se decodificaría el vector $y = (0,1,1,1,1,1,1,1)$.
4. Razone, sin hacer ningún cálculo, que ningún error doble puede tener el mismo síndrome que un error simple y deduzca de ese hecho el número de errores dobles que se pueden corregir.

Solución

1. Como las filas de la matriz G tienen todas peso 4, la distancia del código sólo puede ser 2 o 4. Y la distancia será 4 sólo si el código no tiene ninguna palabra de peso 2, en cuyo caso la distancia sería 2.
2. El código, por tener distancia 4, no incluye palabras de peso menor que 4 (con excepción del vector nulo); y, por tener una distribución de pesos simétrica (por la pertenencia al código del vector de peso 8), no incluye tampoco palabras de peso mayor que 4 (con excepción del mencionado vector de peso 8, que es el complementario del vector nulo).
3. El vector y no pertenece al código porque tiene un peso impar; y la decodificación del vector y será la palabra del código más cercana (en distancia Hamming) a y: el vector de peso 8, que es la única palabra del código que está a una distancia de 1.
4. Los errores simples (en realidad todos los de peso impar) provocan la recepción de vectores de peso impar, en tanto que los errores dobles (en realidad todos los de peso par), la recepción de vectores de peso par. En consecuencia, sus síndromes no pueden ser iguales.

   Como todos los errores simples, que son 8, se pueden corregir, el número máximo de errores dobles corregibles será 7 (todos los síndromes no nulos excepto 8). Y será, efectivamente 7, porque cualquier vector de peso par está a una distancia no superior a 2 de una palabra del código.

Problema 1. Por un canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 2/7 & 2/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix}$$

se transmiten símbolos con una distribución de probabilidad $(1/2, 1/4, 1/4)$.

a) Determine $I(X;Y)$.

b) Ídem si se sabe que no se transmite x_1 y no se recibe y_4.

a) La matriz de probabilidades conjuntas de la entrada y la salida de este canal es

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 2/7 & 2/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/12 & 1/12 \\ 3/20 & 0 & 1/20 & 1/20 \\ 1/14 & 1/14 & 0 & 3/28 \end{pmatrix}.$$

La distribución marginal de Y es $(3/20 + 1/14, 1/3 + 1/14, 1/12 + 1/20, 1/12 + 1/20 + 3/28) = (31/140, 17/42, 2/15, 101/420)$, de modo que $H(Y) \approx 1{,}89$ bits.

La entropía de cada una de las filas de Q es

$$\begin{aligned} H(Y \mid X = x_1) &= H(2/3, 1/6, 1/6) \approx 1{,}25 \text{ bits} \\ H(Y \mid X = x_2) &= H(3/5, 1/5, 1/5) \approx 1{,}37 \text{ bits} \\ H(Y \mid X = x_3) &= H(2/7, 2/7, 3/7) \approx 1{,}55 \text{ bits} \end{aligned}$$

con lo que la entropía condicional vale

$$\begin{aligned} H(Y \mid X) &= p(x_1)H(Y \mid X = x_1) + p(x_2)H(Y \mid X = x_2) + p(x_2)H(Y \mid X = x_3) \\ &= \frac{1}{2}H(Y \mid X = x_1) + \frac{1}{4}H(Y \mid X = x_2) + \frac{1}{4}H(Y \mid X = x_3) \approx 1{,}35 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Finalmente, la información mutua en este canal valdrá $I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) \approx 0{,}54$ bits.

b) Si no se transmite x_1 ni se recibe y_4, la distribución de probabilidad conjunta de las entradas y salidas del canal es

$$P' = \kappa \begin{pmatrix} 3/20 & 0 & 1/20 \\ 1/14 & 1/14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/16 & 0 & 7/48 \\ 5/24 & 5/24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da una entropía para los símbolos de salida del canal igual a $H(Y) = H(7/16 + 5/24, 5/24, 7/48) = H(31/48, 5/24, 7/48) \approx 1{,}284$ bits.

Puesto que el número de entradas al canal se reduce, la matriz de probabilidades de transición varía. La que corresponde a la situación en que $X \neq x_1$ e $Y \neq y_4$ es P' con las filas reescaladas para que sumen la unidad, esto es,

$$Q' = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que la entrpía condicional vale

$$H(Y' \mid X') = P(X' = x_2)H(Y' \mid X' = x_2) + P(X' = x_3)H(Y' \mid X' = x_3) = \frac{7}{12}H(1/4) + \frac{5}{12}\log 2 \approx 0{,}89 \text{ bits.}$$

Así pues, $I(X';Y') = H(Y') - H(Y' \mid X') \approx 0{,}39$ bits.

b) En ese caso, ¿qué fracción de esos símbolos es redundante?

c) Y si el régimen del canal es de 100 símbolos por unidad de tiempo, ¿qué cantidad de información (expresada en bits) se transmite por unidad de tiempo?

a) $v_e/v_f = H(X)/C = \log_2 48/(1 - H_2(0{,}2)) \approx 20{,}08$ bits/símbolo.

b) La fracción de símbolos redundante es $1 - C = H_2(p) \approx 72{,}2\,\%$.

c) La tasa de transmisión de información por el canal es de $v_e C \approx 2780$ bits por unidad de tiempo.

Problema 3 (2 puntos). Para el código con matriz generadora

$$G = \left(I_6 \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right)$$

se pide:

a) Muestre que la distribución de pesos es simétrica y que todas las palabras tienen peso par.

b) Todas las palabras del código con ortogonales entre sí. Explíquelo. (Observe antes que todas las *filas* de la matriz son ortogonales dos a dos).

c) El código tiene distancia 4. Use esto y el apartado *a*) para deducir que $A_6 + 2A_4 = 62$ y, por tanto, que A_6 es un número par.

d) La única forma de obtener palabras del código de peso 4 es sumar dos filas de G. ¿Cuánto vale A_4?

e) Escriba la distribución de pesos del código.

a) $\mathbf{1}$ es una palabra del código: para verlo, sume todas las filas de G. Y puesto que $\mathbf{1}$ pertenece al código, $A_{12-i} = |\{\mathbf{1} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in C, p_H(\mathbf{x}) = i\}| = A_i$. Sea $\mathbf{f}_i$, para $i = 1, \ldots, 6$, la i-ésima fila de G. $\mathbf{f}_i$ tiene peso par (6), así que cualquier combinación lineal de filas $\sum_{i=1}^{6} a_i \mathbf{f}_i$ es la suma de vectores de peso par, y tiene por ello peso par.

b) Se puede comprobar directamente que $\langle \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j \rangle = 0$, para cualesquiera i, j. En consecuencia

$$\langle \sum_{i=1}^{6} a_i \mathbf{f}_i, \sum_{j=1}^{6} b_j \mathbf{f}_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = 0,$$

de manera que todas las palabras del código son ortogonales entre sí.

c) Puesto que no hay palabras de peso impar ni de peso 2 (la distancia es 4) o de peso 8 (por simetría), tenemos la igualdad

$$A_0 + A_4 + A_6 + A_8 + A_{12} = 64.$$

Ahora bien, $A_0 = A_{12} = 1$ y $A_4 = A_8$ por simetría. Luego $A_6 + 2A_4 = 62$ y A_6, siendo la diferencia de dos números pares, es par.

...MEN CD. ENERO 2012.

...sidera un canal de matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...n X e Y las variables de entrada y salida del canal y sea
$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, \frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{4}\}$ el vector de probabilidades de la variable aleatoria Y.
...nto ha de valer p para que la información mutua sea de 7/4 bits?

...o un canal binario ideal de régimen de transmisión V_c bps y cuatro fuentes ...rias de entropías (en bits): 1, 0.5, 0.25, 0.125. ¿Cuál es el máximo régimen de ...smisión de las fuentes para transmisión fiable si han de compartir el canal a ...s iguales?

...a una fuente que genera n símbolos de forma equiprobable cuyos mensajes se ...odifican con un código compacto binario de eficiencia 0.9. Si se quieren ...smitir esos mensajes de manera fiable y eficiente a través de un canal binario de ...cidad C bits y régimen de transmisión V_c, ¿Cuántos símbolos de canal serán ...sarios por cada símbolo del mensaje precodificado?

...sidere una fuente que genera 128 símbolos con probabilidades, que ordenadas ...rma decreciente, verifican que: las dos últimas son iguales y cada una de las ...ás es el doble de la anterior. Si se codifican los símbolos uno a uno, ¿cuál es la ...itud de un código compacto binario? ¿Cuántos códigos distintos hay para esta ...te?

...a una fuente cuaternaria sin memoria que emite símbolos de 2 bits con ...abilidades p(A)=0.3, p(B)=0.25, p(C)=0.25, p(D)=0.2. Si se utiliza codificación ...nética ¿Cuál es la secuencia de símbolos de esta fuente más larga que se puede ...esentar con n bits?.

...o un código cíclico binario de longitud 63 y dimensión 56 engendrado por ...$) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$, siendo $x^6 + x + 1$ un polinomio primitivo, caracterice las ...iedades de detección y corrección de errores de este código. ¿Cuál es el menor ...go cíclico que contiene a $x^6 + x + 1$?

...óngase un vector corregible con un cierto código lineal en el que las posiciones ...neas son las **r** primeras: **e**=(e_1 … e_r 0 …0). Considérese otro patrón de errores, ...uyas posiciones erróneas son un conjunto de las del vector anterior ...(e_1 … e_{r-1} 0 …0). Demostrar que si **e** es corregible **e'** también lo es. Demuestre ...contradicción.

a) ¿Cuáles son la longitud, dimensión y distancia de C?

b) Escriba una matriz generadora de C.

c) ¿Cuál es el mayor entero t tal que el código es capaz de corregir cualquier patrón hasta t errores?

d) Si se recibe el vector 101010101 ¿cuál será la salida de un decodificador de máxima verosimilitud?

Problema 9. Considere el código lineal binario C con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}$$

en donde H_1 es matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario [15, 11].

a) Indique la longitud, la dimensión y la distancia de C.

b) Demuestre que C sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?

c) La distribución de pesos del código Hamming es $A_0 = A_{15} = 1$, $A_3 = A_4 = 35$, $A_4 = A_{11} = 105$, $A_5 = A_{10} = 168$, $A_6 = A_9 = 280$, $A_7 = A_8 = 435$. La distribución de pesos de C viene dada por la fórmula $B_i = \sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j}$. Calcule el número de palabras de peso mínimo de C.

No entra

d) Muestre que C no puede ser un código cíclico (†).

Problema 10. Considere la colección C_r de códigos lineales binarios definidos por matrices de comprobación de paridad de la forma

$$H_r = (I_r \quad B_{r\times m}) \qquad r \geq 2$$

en donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y $B_{r\times m}$ es una matriz que tiene por columnas vectores distintos de peso 2 de forma que ninguna de sus filas es nula.

a) ¿Cuáles son la longitud y la dimensión mínimas de un código de la familia C_r? ¿Cuáles la longitud y la dimensión máximas? Indique qué matrices corresponden a cada caso.

b) La distancia de cualquiera de los códigos de C_r es 3. Calcule el número de palabras de peso 3 del código de longitud máxima. Ídem para uno cualquiera de los de longitud mínima.

Problema 11. Para un entero $r > 1$, sea $\mathcal{H}_r$ el código Hamming binario $[n, n-r, 3]$

a) Muestre que para cualesquiera dos columnas $\mathbf{h}_1$ y $\mathbf{h}_2$ de una matriz de comprobación de paridad de $\mathcal{H}_r$ existe una tercera columna única igual a $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$.

b) Use el apartado anterior para probar que el número de palabras de peso 3 en $\mathcal{H}_r$ es $n(n-1)/6$.

c) Muestre que $\mathcal{H}_r$ contiene una palabra de peso n. ¿Cuántas existen de peso $n-3$?

d) Como aplicación, escriba la distribución de pesos de las palabras de $\mathcal{H}_3$.

Problema 12. Obtenga, para el código descrito en el problema 8, la distribución de pesos de los

BOLETÍN CÓDIGOS

Problema 2. La matriz de comprobación de paridad de un código lineal binario es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la distancia del código.

b) Construya una tabla de decodificación por síndrome.

c) Obtenga una matriz generadora en forma sistemática del código dual. ¿Qué observa?

Problema 3. Sea H la matriz de comprobación de paridad de un código Hamming binario $[15, 11]$. Considérese el código lineal C cuya matriz de comprobación de paridad es la obtenida al eliminar de H todas las columnas con un número par de unos. Sin escribir las palabras de C:

a) Indique los parámetros del código y muestre que su distancia es 4.

b) Demuestre que todas las palabras del código no nulas tienen un número par de unos.

c) ¿Cuántos errores de peso Hamming 1 son detectables? ¿Cuál es la probabilidad de no detectar un error cuando C se utiliza para transmitir sobre un canal binario simétrico con probabilidad de error de bit p?

d) Si de toda palabra del código se borra un bit de paridad, ¿qué código se obtiene?

Problema 4. Sea G_1 una matriz generadora de un código lineal $[n_1, k_1]$ con distancia d_1 y sea G_2 una matriz generadora de un código lineal $[n_2, k_2]$ con distancia d_2. Encuentre los parámetros (longitud, dimensión y distancia), caracterice si es posible los vectores del código y dé una matriz generadora del dual, para los códigos cuyas matrices generadoras son las siguientes:

a)

$$\begin{pmatrix} & G_1 & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

c) Suponiendo que $n_1 = n_2 = n$

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_1 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Esta construcción de un código a partir de dos códigos componentes se conoce como construcción $|\mathbf{u}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$.

d) Si $n_1 = n_2$

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Problema 5. Para el código C que tiene por matriz generadora a

$$G = \left(I_6 \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right)$$

se pide:

a) Probar que la distribución de pesos es simétrica, $A_i = A_{12-i}$.

b) Hallar la distribución de pesos.

c) Hallar la distribución de pesos de los errores corregibles.

d) Probar que $C = C^{\perp}$.

Problema 6. La matriz

$$G = \left(I_4 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

es generadora de un código lineal binario $[10, 4]$.

a) ¿Cuál es la distancia del código?

b) Calcule el número de palabras del código de peso $i = 1, 2, \dots, 10$ que se pueden corregir si se aplica el método de decodificación por síndrome.

c) Suponga que el canal de transmisión no tiene memoria y que se produce un error de transmisión. A la vista de las ecuaciones de comprobación de paridad, deduzca un método de decodificación capaz de corregir los errores simples *sin construir la tabla de síndromes*.

Problema 7. Considere el código de matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&&&&&&&&&&&& \\ &&&&1&1&1&1&&&&&&&& \\ &&&&&&&&1&1&1&1&&&& \\ &&&&&&&&&&&&1&1&1&1 \\ 1&&&&1&&&&1&&&&1&&& \\ &1&&&&1&&&&1&&&&1&& \\ &&1&&&&1&&&&1&&&&1& \\ &&&1&&&&1&&&&1&&&&1 \end{pmatrix}$$

a) Sume las filas de H. Escriba la longitud, dimensión y la distancia de este código.

b) Muestre que el código sólo contiene palabras de peso par y que el vector $11\dots1$ pertenece al código.

Problema 8. Sea C el código binario definido por la matriz de comprobación de paridad

Examen de Fundamentos de Telemática

23 de mayo de 2014

: ______________________________ D.N.I.: ______________

1 **(2 puntos)**. Sea la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada a (Y) de un canal

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

mine $I(X;Y)$.

mine la capacidad del canal.

marginales de X e Y son $(2/3, 1/3)$ y $(1/2, 1/4, 1/4)$, respectivamente. Por lo tanto

$H(X)+H(Y)-H(X,Y) = H(1/3)+H(1/2,1/4,1/4)-H(1/2,1/4,1/6,1/12) = 3/4H(1/3)$.

de probabilidades conjuntas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

que el canal es un canal binario con borrado $1/4$. Su capacidad es $3/4$ bits/símbolo.

2 **(1 punto)**. Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se nsmitir fielmente a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 0{,}2$. las longitudes de los códigos ideales de fuente y de canal?

$_2(X) = \log_2 48 = 3\log_2 3$. $L_c = 1/C = 1/(1 - H_2(0{,}2))$.

3 **(1 punto)**. Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que a la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,6 bits, y el otro un canal ternario ad 0,9 unidades de información ternarias. Si el primero de los canales tiene un régimen de de 1000 símbolos por segundo y el segundo de 500 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo esario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente

$$T = \frac{nH(X)}{v_1C_1 + v_2C_2} = \frac{n}{1000 \cdot 0{,}6 + 500 \cdot \log_2 0{,}9} \text{ segundos.}$$

4 **(1 punto)**. El conjunto $\{0, 10, 110, 111\}$ es un código binario compacto para la fuente ilidades $\{1/2, 3/8, 1/16, 1/16\}$, con una eficiencia del 94,2 %. El codificador de fuente puede como una fuente binaria sin memoria. ¿Cuál es la probabilidad de que emita un 0? Tiene s de calcularlo.

erdo con la teoría, la salida del codificador de fuente tiene entropía $H_2(Y) = H(p) = \eta$, eficiencia del código. Así pues, $p = H^{-1}(\eta)$ de donde $p \approx 0{,}64$ (resuelva esta ecuación por ror). Observe que, en el código propuesto, la proporción de ceros es mayor que la de unos, 15/26 frente a 11/26. Sin embargo, $H_2(15/26) \neq \eta$. ¿Puede explicarlo?

5 **(1,5 puntos)**. El subcódigo par $\mathcal{H}_{r,e}$ de un código Hamming binario $\mathcal{H}_r$ es la colección de $\mathcal{H}_r$ que tienen peso par.

arámetros de $\mathcal{H}_{r,e}$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 2, 4]$. Explique estos números.

código corrige únicamente errores simples y dobles. ¿Cuántos de cada tipo?

Comunicación de Datos

21 de octubre de 2013

: ______________________ D.N.I.: ______________

ıtos) De un grupo de estudiantes, el 25 % no están convenientemente preparados para la ı. Sin embargo, el 25 % de estos son aceptados tras una prueba de selección, que es superada ; de los estudiantes.

r el resultado de la prueba, ¿cuánta información recibe un estudiante que está suficientemente ırado?

. si la selección se decide tirando una moneda al aire.

studiante preparado supera la prueba de selección con una probabilidad p tal que

$$\frac{3}{4}p + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

es, $p = 7/12$, de modo que obtiene una información igual a $H(7/12) \approx 0.98$ bits.

selección es completamente aleatoria hay igual probabilidad de ser aceptado o rechazado, ndependencia de la preparación. Así entonces, la información recibida es $H(1/2) = 1$ bit.

o). ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \ldots, 1/16)?$$

ıntificarla? Razónelo.

ıedida en que todo mensaje de una fuente discreta es una representación simbólica, una fuente codificador específico. En este caso el alfabeto es decimal y el código es una asignación uno no las probabilidades no son potencias decimales, esta fuente (o código) posee redundancia, ual a la diferencia entre la longitud $L = 1$ y la entropía decimal $H_{10}(X)$, que es la mínima osible.

$$L - H_{10}(X) \approx 0{,}097.$$

tos) Calcule la eficiencia de los códigos compactos cuaternarios de los conjuntos de símbolos ɔilidades dadas por los siguientes vectores:

(1/6, 1/6, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18)

1/512 para todo i.

ɔdificación Huffman de estos símbolos —una de ellas— tiene la estructura

$$\boxed{1/6, \boxed{1/6, 1/12, 1/12, 1/12}, \boxed{1/12, 1/18, 1/18, 1/18}, \boxed{1/18, 1/18, 1/18}}.$$

anto, el código compacto tiene todas sus palabras de longitud 2, excepto la correspondiente ɔ de los símbolos con probabilidad 1/6, que es de longitud 1. La longitud del código es 2 − 1/6 = 11/6 y la eficiencia

$$\eta = \frac{H_4(X)}{L} \approx 94\,\%.$$

ódigo compacto cuaternario para esta fuente uniforme consta de 170 palabras de longitud 4 2 palabras de longitud 5. Tiene una longitud de $L \approx 4{,}66$ y su eficiencia es $\eta = \log_4 512/L \approx$ %.

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

: ______________________ D.N.I.: ______________

to) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de es aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

ıtos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una ernario y codificadores de fuente y de canal ideales.

sabe que 1/3 de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes. ¿cuál es su capacidad ts?

coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n(\gg 1)$?

to) La secuencia

$$A, L, (1, 4, B), (1, 2, R), (1, 9, D), E, (8, 2, O), (4, 5, L), (1, 2, D), (A, 2, \emptyset)$$

la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado `ongitud de la frase, sufijo`), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el . Averigüe el mensaje.

riz

$$H = \left(I_5 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

probación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

nga la distribución de pesos del código **(1 punto)**

idere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

stre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen al código definido por H, entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una palabra del código ido por H'. Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto **(1 punto)**

$(x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico $[15, 12]$.

11 . . . 1 una palabra del código? **(1 punto)**

entre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? **(1 punto)**

ıto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de inuo con rechazo selectivo.

ıto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una sta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que probabilidad p. Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

no hay vectores de peso impar la distancia del código es al menos 4 y los errores simples se
eden corregir. Puesto que

$$x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{6} + x^{4} + x^{3} + x + 1 \quad \text{mód } g(x) = x^{8}$$

palabra del código más cercana a $v(x)$ es $v(x) + x^8$. Esa sería la salida del decodificador.

lema 5 (2 puntos) Considere el código con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

enga razonadamente la distancia.

nuestre que el código sólo contiene palabras de peso par.

endo que el código corrige el mismo número de errores de peso par que de peso impar, obtenga
istribución de pesos de los errores corregibles.

istancia es 4: no hay columnas nulas ni dos iguales, la suma de cualesquiera tres columnas pro-
un vector cuyo último bit nunca es nulo y es posible encontrar cuatro columnas linealmente
ndientes, por ejemplo las cuatro primeras.

sumando un número par de columnas se obtiene un síndrome nulo, ya que la última fila de
ontiene sólo unos. O bien, la última de las ecuaciones de comprobación de paridad $\mathbf{y}H^t = \mathbf{0}$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0$$

e se cumple si y sólo si $p_H(\mathbf{y})$ es par.

$d_c = 4$ se tiene de inmediato que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 11$. El código corrige, además, algunos
es dobles y triples. Echando mano del enunciado se tiene que $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_2$ y se sabe
$_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 32$. La solución de estas dos ecuaciones lineales es $\alpha_2 = 15$ y $\alpha_3 = 5$.

ma 6 (1 punto) Medidas realizadas en un enlace punto a punto que emplea la retransmisión
con rechazo selectivo han determinado que si se dobla la longitud del campo de datos de las
adencia eficaz no varía. Si las tramas portan 150 bits de control y pa probabilidad de error
0^{-5}. ¿qué longitud tienen las tramas y cuánto vale la eficiencia?

tamaño (desconocido) de las tramas. De acuerdo con el enunciado tiene que cumplirse que
$_e(x)$, siendo

$$C_e(x) = (1 - \kappa(x+m))\frac{x}{x+m}$$

^{5} y $m = 150$. Por tanto, igualando las expresiones

$$(1 - \kappa(2x+m))\frac{2x}{2x+m} = (1 - \kappa(x+m))\frac{x}{x+m}$$

x tiene que ser solución de

$$(1 - \kappa(2x+m))\frac{2}{2x+m} = (1 - \kappa(x+m))\frac{1}{x+m}$$

$$2(1 - \kappa(2x+m))(x+m) = (1 - \kappa(x+m))(2x+m)$$

cuación de segundo grado. Operando de modo sencillo, la ecuación anterior se escribe como

$$(x+m)(2x+m) = \frac{m}{\kappa}$$

olución positiva es $x_0 \approx 2626$ bits. La eficiencia valdrá entonces

$$\frac{C_e}{C}(x_0) \approx 94\,\%.$$

A.

ma 4. Sea $\mathcal{P}$ el código lineal binario engendrado por la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

azonadamente, la longitud, dimensión y distancia de $\mathcal{P}$. Las filas de G tienen peso 4 y son onales entre sí, y $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$. Calcule la distribución de pesos. **(1 punto)**

a el apartado anterior para el código generado por

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1 punto)}$$

atriz G posee 8 columnas y 4 filas *linealmente independientes*, de modo que genera un código Además

Dado que $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$, la distribución de pesos es simétrica, $A_i = A_{8-i}$

Como las filas tienen peso 4 y son ortogonales entre sí, el código sólo contiene palabras con peso múltiplo de 4

$$p_H(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p_H(\mathbf{x}) + p_H(\mathbf{y}) - 2p_H(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = \dot{4}.$$

rtud de todo lo anterior, $A_0 = A_8 = 1$, $A_4 = 14$ es la distribución de pesos, y 4 es obviamente tancia.

digo generado por $\hat{G}$ tiene por palabras a los vectores de la forma $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, en donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{P}$. cir, el código es la concatenación de dos palabras arbitrariamente elegidas de $\mathcal{P}$. Así pues, se de un código $[16, 8, 4]$ autodual ($\hat{G}$ tiene dimensiones 8×16 y rango 8) con una distribución sos que se deduce de

$$p_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = p_H(\mathbf{u}) + p_H(\mathbf{v}).$$

tanto,

$$\hat{A}_0 = \hat{A}_{16} = 1,$$
$$\hat{A}_4 = \hat{A}_{12} = 28$$
$$\hat{A}_8 = 256 - \sum_{i \neq 8} \hat{A}_i = 2 + 14 \times 14 = 198.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & V_{m-1} & \end{pmatrix}$$

$n = 2^m - 1$

$$\boxed{k = n - (n-k) = 2^m - 1 - m}$$

l tiene una fila de todo unos la distancia código tiene par. ~~$dc = 2$~~. $dc = 4$ porque existen 4 columnas linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma 6.

$\left.\begin{array}{l} n = 63 \\ k = 56 \end{array}\right\} \to n - k = 7$

$g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$

$x^6 + x + 1$ primitivo.

$\leq \left\lfloor \frac{dc-1}{2} \right\rfloor$

$g(x) = (x+1)(x^6 + x + 1)$

$x+1 \notin C$ puesto que tiene menor grado que $g(x)$

$x^6 + x + 1$ genera un código cíclico con $n' = 2^r - 1$

$n' = 2^6 - 1 = 63$

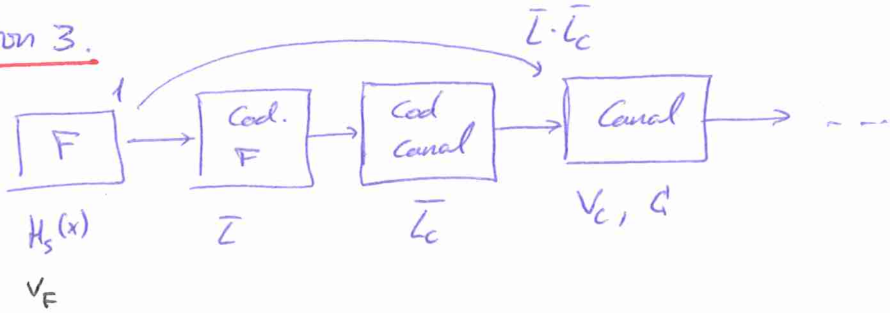
$k' = 63 - \underbrace{\text{grado}(g(n))}_{n'-k'} = 57$

$\boxed{\ldots 57)}$

$= x^6 + x + 1 = g'(x) \in C'$

, 23 mayo 2014

Cuestion 3.



$$\eta = \frac{H_s(\vec{p})}{\overline{L}} \qquad \overline{L}_{c\,min} = \frac{1}{C}$$

$$V_F \cdot \overline{L} \leq V_c \cdot \frac{1}{\overline{L}_c}$$

$$\cdot\ \overline{L}\cdot\overline{L}_c \leq V_c$$

$$N_F\left[V_F \cdot H_s(\vec{p})\right] \leq V_c \cdot C$$

...trico:

$\log s - H(\text{fila de } Q)$

↑ nº salidas

... borrado:

$C = (1-p)\log M$

↑ nº de entradas.

Cuestion 3.

$$T_{min} = \frac{n \cdot \overline{L}_{min} \cdot \overline{L}_{c\,min}}{V_c}$$

...nsmitir de manera fiable hay que cumplir el th. de Shannon de canal:

$$V_F \cdot \overline{L} \leq V_c \cdot \frac{1}{\overline{L}_c}$$

...tiliza dos canales de forma simultanea la velocidad de transmisión ...ación será: $C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}$

o, el tiempo necesario para trasmitir n símbolos:

$$T = \frac{n \cdot \bar{L}_{min}}{C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}} = \frac{n \cdot H(\vec{p})}{C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}} = \frac{n \cdot 1}{0{,}6 \cdot 1000 + \frac{0{,}9}{\log_3 2} \cdot 500} = \text{segundos}$$

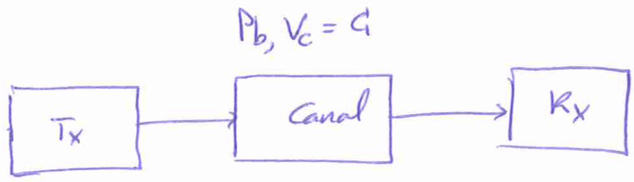
bits bits

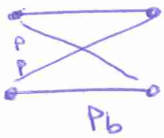
,6 bits

$$0{,}9 \text{ u. ternarias} = \frac{0{,}9}{\log_3 2} = \text{bits}$$

ESTRATEGIAS DE RETRANSMISIÓN.

Introducción.

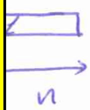




si la trama recibida tiene fallos ⇒ se descarta

↓

asentimientos: ACK $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right.$



$l = n + m$

Tiempo de asentimiento: $\boxed{T_{as} = 2t_p + t_{proc} + \frac{m}{c}}$

∅ ∅

velocidad real de transmisión de inf.

$$\boxed{C_e < C}$$

$$\frac{n}{t_{oc}}$$

Eficiencia: $\frac{C_e}{C} = S$

$S < 1$

Boletín num. 6.

. 2.

…tos :

cab	inf ≡ datos
	$\xleftrightarrow{\quad n \quad}$

$n = 48 \cdot 8 = 384$ bits $\qquad C = 1$ Mbps.

$m = 5 \cdot 8 = 40$ bits

10^{-4}

…ncia $= 100$ Km

$\frac{2}{3} \cdot c = 200\,000 \frac{km}{s}$

$t_p = \frac{\text{Distancia}}{V_p} = \frac{100 km}{200000 \frac{km}{s}} = 0{,}5 ms.$

(tiempo propagación)

…c $\simeq 0$

$= \frac{n}{t_{oc}} = \frac{384}{\quad} = \quad < 1$ Mbps

$\frac{1}{1-p} \cdot \frac{l}{c} + \frac{p}{1-p} \cdot Tas' = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{l}{c} + \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-p} \cdot \frac{l}{c} + Tas\right) (*) =$

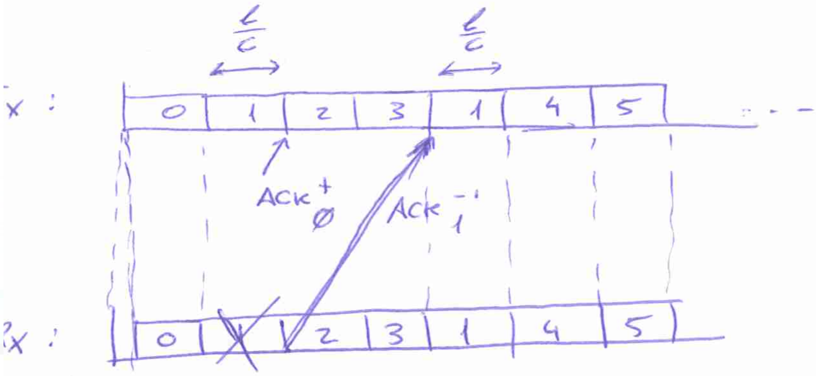
$P_b(n+m) = 10^{-4}(384+40)$

$+ m = 384 + 40$

$2 t_p + \cancel{t_{proc}} + \frac{m}{c} = 2 \cdot 0{,}5 ms + \frac{40}{c}$

0

Rechazo selectivo.



Solo retransmite las tramas fallidas.

El receptor tiene las tramas desordenadas
El receptor debe reordenar las tramas.

...encia eficaz: $C_e = \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$

...: $t_{oc_1} = \frac{l}{c}$

$t_{oc_2} = 2 \cdot \frac{l}{c}$

$$\boxed{\bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c}}$$

$$\frac{1}{P(\text{éxito})} = \frac{1}{P(\text{no falle la trama})} = \frac{1}{1-p}$$

prob. error canal

Velocidad canal

...hazo selectivo: $\boxed{C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m}}$

...ethazo simple: $\boxed{C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m+p \cdot t_{as} \cdot C}}$

...ada y espera: $\boxed{C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m+T_{as} \cdot C}}$

BOLETÍN 12 noviembre

Parada y espera.

$= \frac{10}{9} = 1,1$

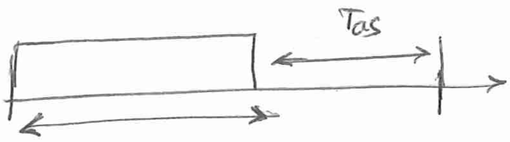
$= 0,4 \cdot C_i$

?

$= 0$

Parada y espera.

$$C_e = \frac{(1-p)\cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C_i}$$



$$\frac{p)\, n \cdot \cancel{C}}{m + T_{as} \cdot C} = 0,4 \cdot \cancel{C}$$

$$\frac{\ell}{c} = \frac{n+m}{c} = \frac{n}{c}$$

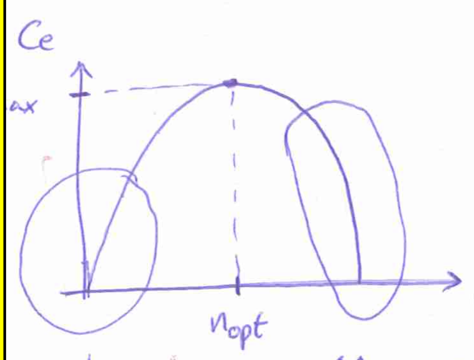
$m=0$

$$= \frac{n/c}{\frac{n}{c} + T_{as}} = \frac{c \cdot \frac{n}{c}}{c\left(\frac{n}{c} + T_{as}\right)} = \frac{n}{n + T_{as} \cdot C}$$

$$\frac{0,4}{1-p} = 0,4 \cdot \frac{1}{1-p} \Rightarrow \boxed{F_T = 0,4 \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}}$$

F_{TX}

lisis de Ce: Para todas las estrategias se cumple:



$$C_e = \frac{n}{t_{oc}}$$

$n\downarrow \Rightarrow Ce\downarrow$

$n\downarrow$ $n\uparrow\uparrow \Rightarrow Ce\downarrow$

• si n es pequeño se transmiten muchas cabeceras y $Ce\downarrow$

$\uparrow \Rightarrow Ce\downarrow$. Es cierto porque si $n\uparrow\uparrow \Rightarrow \ell\uparrow\uparrow$ y $p\uparrow$. Aparecen retransmisiones y baja la eficiencia.

nen 12 junio 2009.

lema 6.

$C = 1\,Mbps$

$P_b = k = BER = 5 \cdot 10^{-6}$

$T_{as} = 0$

Parada y espera

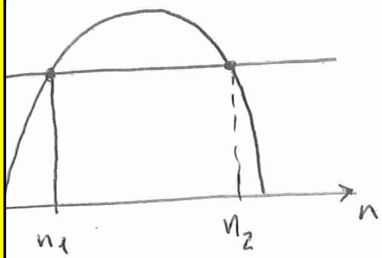
$m = 100$

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C}$$

$$\frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C} \underset{T_{as}=0}{=} \frac{[1 - P_b(n+m)] \cdot n \cdot C}{n+m}$$

C_e no supera los 500 kbps $n_2 \leq n \leq n_1$.

$C_e = 500$ kbps



$$\frac{(1 - P_b(n+m)) \cdot n \cdot \cancel{C}}{n+m} = 500 \text{ kbps} = \frac{\cancel{C}}{2}$$

$$(1 - P_b(n+m)) \cdot n = 0{,}5\,(n+m)$$

$$(1 - P_b \cdot n - P_b \cdot m)\,n = 0{,}5n + 0{,}5m$$

$$n - P_b \cdot n^2 - P_b \cdot m \cdot n = 0{,}5n + 0{,}5m$$

$$-P_b \cdot n^2 + n(1 - P_b \cdot m - 0{,}5) - 0{,}5m = 0$$

$$P_b n^2 - n(1 - P_b \cdot m - 0{,}5) + 0{,}5m = 0$$

$$n^2 - n \underbrace{\frac{(1 - P_b \cdot m - 0{,}5)}{P_b}}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{0{,}5m}{P_b}}_{\text{constante.}} = 0$$

$n_1 = 100{,}5$

$n_2 = 99799{,}5$

100

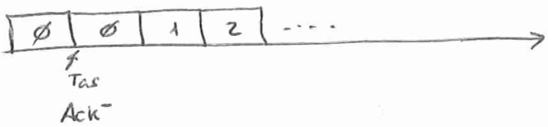
$5^7 = 99800$

...n: Para cualquiera de las estrategias que conoce ... tiene la cadencia eficaz máxima cuando el nº de retransmisiones ... ma es mínimo? Aclárelo.

...). $\bar{n}_T t_x$ min $\Rightarrow$ P$\downarrow$ $\Rightarrow$ n$\downarrow$ y esta situación la Ce no es ... a.

..., 2009.

...a.



Rechazo selectivo $= \bar{n}_{t_x} \cdot \frac{l}{c}$

$= \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$

Cálculo del $\bar{t}_{oc}$:

$t_{oc_1} = \frac{l}{c}$

$t_{oc_2} = 2l$

$\vdots$

$t_{oc_i} = i \cdot \frac{l}{c}$

$$\begin{cases} \bar{t}_{oc} = \bar{n}_{t_x} \cdot \frac{l}{c} \\ \bar{n}_{t_x} = \frac{1}{p(\text{éxito})} = \frac{1}{1-p} \end{cases}$$

↳ que no fallen las tramas

$$\boxed{\frac{(1-p)\cdot n \cdot c}{n+m}}$$

blema 1

Jn protocolo de parada y espera utiliza solamente asentimientos positivos y temporizadores para la ecuperación de los errores de transmisión. Así, tras la transmisión de una trama, o bien se recibe n asentimiento positivo en el emisor al cabo de T_{as} segundos o bien se genera una retransmisión na vez transcurridos T_{out} segundos ($T_{out} > T_{as}$). Calcule la cadencia eficaz de esta estrategia uponiendo que no se pierde ninguna trama y que la probabilidad de error en los asentimientos es espreciable.

)btenga la cadencia eficaz de la estrategia de parada y espera con asentimientos positivos y negatios si la transmisión de un asentimiento es errónea con probabilidad q. Suponga que no se pierden ramas y que la recepción de un asentimiento erróneo da lugar a una retransmisión inmediata.

blema 2. Considere una estrategia de envío continuo con rechazo simple en la que no hay asentis negativos ni temporizadores de retransmisión, de manera que los errores en las tramas de datos ierten en el emisor sólo cuando se recibe un asentimiento de una trama posterior a la errónea. la cadencia eficaz si la capacidad del enlace es 1 Mbps., las tramas transportan 48 octetos de nás 5 octetos de control y la probabilidad de error de bit es 10^{-4}. Suponga además que la longitud ace son 100 Km, que la velocidad de propagación de la señal es $\frac{2}{3}$ la velocidad de la luz y que el de procesamiento de una trama en el receptor es despreciable.

blema 3. Considere la técnica ARQ que se describe a continuación:
emisor realiza envío continuo hasta que recibe un asentimiento negativo de una trama. A partir momento, la transmisión de dicha trama se resuelve por parada y espera. Sólo cuando no exista a trama asentida negativamente se reanudará el envío continuo. El receptor asiente individualmente na de las tramas que le llegan. Suponiendo que no se pierden tramas y que no se producen errores asentimientos, se pide:

)btenga la cadencia eficaz.

i el emisor siempre dispone de tramas de información que enviar, calcule el número de tramas de nformación que se resuelven por parada y espera de manera consecutiva.

blema 4. Un enlace de datos punto a punto, de tasa nominal $C = 64$ Kbps., opera con una estrae envío continuo con rechazo simple. Las tramas transportan 48 bits de control; y la probabilidad r de bit en el enlace es $\kappa = 10^{-4}$. ¿Cuál es el valor máximo permisible del tiempo de asentimiento oder obtener una cadencia eficaz de al menos el 50 % de C?

blema 5. Se sabe que en una línea de transmisión de datos que opera con una estrategia ARQ en las tramas contienen 48 bits de control, la probabilidad de error de bit se distribuye uniformemente ntervalo $(10^{-6}, 10^{-3})$. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir que la cadencia eficaz de la línea sea os el 80 % de la capacidad nominal de transmisión?

blema 6. Obtenga una expresión para la cadencia eficaz de la estrategia de retransmisión de parada a cuando el emisor transmite tramas con distribución bimodal: una fracción η (respectivamente, de las tramas tienen longitud n_1 (respectivamente, n_2). Muestre que si $n_1 \approx n_2$ entonces las as se simplifican a las conocidas en clase. Dé además una explicación cualitativa de los resultados.

blema 7. Considere un enlace con una estrategia de retransmisión de parada y espera. Suponga receptor es capaz de corregir una fracción χ de las tramas erróneas. Deduzca la expresión de la ia eficaz.

blema 8. Caracterice los *loci* de los puntos (m, p_b) tales que la cadencia eficaz máxima de la gia de envío continuo con rechazo selectivo vale η, $0 < \eta < 1$.

blema 9. Compare el rendimiento de las tres estrategias de retransmisión cuando se utilizan sobre enlaces punto a punto conectados en serie, de dos formas:

la recuperación de tramas erróneas se efectúa nodo a nodo.

la recuperación de tramas erróneas se efectúa extremo a extremo, es decir, si el nodo intermedio
) solicita retransmisiones.

blema 10. Obtenga la expresión de la cadencia eficaz en un enlace punto a punto que opera con la
;ia de parada y espera si el canal se puede considerar como un canal binario con borrado BEC(ϵ)
ie el receptor es capaz de corregir todas las tramas con $m = n - k$ o menos símbolos borrados.

blema 11. Suponga que, en la estrategia de parada y espera, las tramas retransmitidas emplean un
de canal más sofisticado que las originales, con κm bits de redundancia ($\kappa > 1$), cuyo efecto puede
rse al de utilizar un canal binario con probabilidad de error por bit más reducida $p_b'(\kappa) < p_b$.
a la expresión de la cadencia eficaz en este sistema. Identifique en qué casos es mejor que el
lo original.

blema 12. Para cualquiera de las estrategias de retransmisión que conoce, ¿se obtiene la cadencia
náxima cuando el número de retransmisiones por trama es mínimo? Aclare esta cuestión.

$$(1-\kappa(n+m))\frac{n}{n+m}=\frac{1}{2}$$

Si la ecuación no tiene solución real o hay una sola, entonces para ningún valor de n supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s.

Pero si la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como es el caso: $n_1 \approx 100{,}5$ y $n_2 \approx 99799.5$, entonces la cadencia eficaz no supera los 500 Kbits/s para $\{n : n \leq 100 \quad \text{o} \quad n \geq 99800\}$.

BOLETÍN 12 noviembre.

Problema 5. El polinomio $g(x) = (x+1)(x^4+x^3+1)$ engendra un código cíclico binario $[15, 10]$ de distancia 4.

a) Decodifique el vector $x^{12}+x^{11}+x^9+x^6+x^5+x^4+x^2$. **(1 punto)**

b) ¿Sería posible que este polinomio engendrase un código de longitud 30? De ser así, ¿podrían detectarse los errores dobles con el nuevo código? **(1 punto)**

Solución

a) El síndrome del vector recibido es

$$x^{12}+x^{11}+x^9+x^6+x^5+x^4+x^2 \quad \bmod g(x) = x$$

o, lo que es igual, se puede escribir

$$x^{12}+x^{11}+x^9+x^6+x^5+x^4+x^2 = (x^7+x^6+x^5+x)g(x)+x$$

el vector recibido como la suma de una palabra del código más un vector de error de peso 1. Puesto que la distancia del código es 4, todos los errores simples son corregibles y la palabra del código más cercana al vector recibido es precisamente

$$c(x) = (x^7+x^6+x^5+x)g(x).$$

b) Sí es posible, porque $x^{30}-1 = (x^{15}-1)(x^{15}-1)$; $g(x)$ es un divisor mónico con término independiente no nulo de uno de los factores de $x^{30}-1$ y, por ello, del propio $x^{30}-1$. Sin embargo, el código $[30, 25]$ así construido no es capaz de detectar todos los errores dobles. Por ejemplo, $e(x) = x^{15}-1$ coincide con una palabra del código y es claramente indetectable.

Problema 6. Medidas sobre un enlace que utiliza la estrategia de retransmisión de parada y espera han determinado que el número medio de veces que se transmite una trama es de $10/9$ y que la cadencia eficaz es el 40 % del régimen nominal de transmisión. ¿Cuál es la fracción de tiempo durante la cual el emisor utiliza el canal? Desprecie la longitud del campo de control de las tramas. **(1 punto)**

Solución. La fracción de tiempo durante la cual el emisor utiliza el canal es, simplemente, el cociente entre el tiempo de transmisión de la trama y la suma de este tiempo más el de asentimiento, es decir

$$\frac{n}{n+T_{as}C}$$

si suponemos $m \approx 0$. Ahora bien, la cadencia eficaz de la estrategia de parada y espera vale

$$\frac{C_e}{C} = (1-p)\frac{n}{n+T_{as}C}$$

si $m \approx 0$. Pero del enunciado se tiene $C_e/C = 0{,}4$ y $1-p = 0{,}9$, puesto que $10/9 = 1/(1-p)$ es precisamente el número medio de transmisiones de una trama. Por lo tanto, la fracción de tiempo vale

$$\frac{n}{n+T_{as}C} = \frac{4}{9}.$$

Problema 1 (2 puntos).
En un instituto se han formado, en igual número, equipos de fútbol (11 jugadores) y de balonmano (7 jugadores).

1. Suponga que se sabe que, en un equipo elegido al azar, no hay dos alumnos que hayan nacido el mismo día de la semana. ¿Cuánta incertidumbre existe acerca del deporte que practica el equipo? Considere que el año tiene 52 semanas exactas.
2. Ídem si se sabe que en el equipo sí hay alumnos nacidos el mismo día.

Solución.

1. Ninguna. En el equipo de fútbol necesariamente debe haber jugadores que hayan nacido el mismo día de la semana.
2. Sea $\mathcal{E}$ el evento "alumnos nacidos el mismo día de la semana" y sea X el tipo de equipo. Entonces

$$H(X \mid \mathcal{E}) = H(\mathrm{P}(X = \text{fútbol} \mid \mathcal{E})).$$

Se calcula fácilmente que

$$\mathrm{P}(X = \text{fútbol} \mid \mathcal{E}) = \frac{1}{1 + 1 - \frac{7!}{7^7}} \approx 0{,}50 \text{ y } H(\mathrm{P}(X = \text{fútbol} \mid \mathcal{E})) \approx 1 \text{ bit}.$$

Problema 2 (2 puntos).
Suponga que el alfabeto de una fuente discreta sin memoria está formado por las 27 entradas del diccionario. Suponga que es uniforme la función de masa de probabilidad de dicha fuente y que se codifican los símbolos de la fuente uno a uno.

1. Determine la eficiencia de un codificador compacto binario.
2. Determine la eficiencia de un codificador compacto ternario.

Solución.

1. Un codificador compacto binario de una fuente uniforme produce palabras cuyas longitudes difieren a lo sumo una unidad (véase prob. 10 del boletín 2); en este caso, 5 palabras de longitud 4 y 22 palabras de longitud 5. Por tanto, la longitud del código es $L = 4 \times 5/27 + 5 \times 22/27 \approx 4{,}81$, y la eficiencia vale

$$\eta = \frac{H_2(X)}{L} \approx 98{,}7\,\%.$$

Observe que no es necesario construir el árbol de codificación Huffman.

2. La eficiencia es 1 puesto que las probabilidades de los símbolos de la fuente son potencias enteras de 3 (el número de elementos del alfabeto de codificación).

Solución.

1. En primer lugar, veamos que el código es lineal, lo que es cierto porque este código consta de todos los vectores de n bits y peso par, que contiene el vector nulo y es un conjunto cerrado para la suma. Para ver que es cíclico, es suficiente con notar que la rotación cíclica de cualquiera de las palabras del código preserva su peso (par) y da como resultado otra palabra del código. El polinomio generador es $x - 1$.
2. La probabilidad de no detectar un error es

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} p^{2i} (1-p)^{n-2i}$$

siendo $A_{2i} = \binom{n}{2i}$ el número de palabras del código de peso $2i$.

Problema 6 (1 punto).
Considere un enlace de las siguientes características: $C = 1$ Mbits/s, tasa de error de bit $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ y tiempo de asentimiento despreciable. Si se usa un protocolo ARQ de parada y espera con $m = 100$, ¿para qué rango de valores de n no supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s?

Solución. Conocida la forma de variación de la cadencia eficaz (o de la eficiencia) del protocolo con n, el problema plantea una cuestión geométrica simple: se trata de determinar las soluciones, si las hay, de la ecuación

$$(1 - \kappa(n+m))\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}$$

Si la ecuación no tiene solución real o hay una sola, entonces para ningún valor de n supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s.

Pero si la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como es el caso: $n_1 \approx 100{,}5$ y $n_2 \approx 99799{,}5$, entonces la cadencia eficaz no supera los 500 Kbits/s para $\{n : n \leq 100 \quad \text{o} \quad n \geq 99800\}$.

12 junio 2009 (parte de atrás)

8. Una familia de códigos lineales queda definida por la matriz de comprobación de paridad con la siguiente estructura:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & V_{m-1} & \end{pmatrix}$$, Siendo V_{m-1} una matriz por bloques cuyas columnas son todos los vectores binarios de longitud m-1. Calcula longitud, dimensión y distancia.

9. Imagine un enlace de datos punto a punto con un emisor que supiera al instante si las tramas que transmite han llegado bien. Sea p la probabilidad de error en la transmisión de una trama cualquiera. ¿Cuál es la cadencia eficaz del enlace?

10. Explique de forma clara y precisa en que condiciones la eficiencia de una red CSMA/CD resulta ser mejor que la de Aloha.

b) Considere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

Muestre que si u y v pertenecen al código definido por H, entonces (u, v) es una palabra del código definido por H'. Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto **(1 punto)**

La matriz H' define el código [20, 10, 4] $\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}\}$ en donde $\mathcal{C}$ denota el código que H da. En efecto

$$0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}^T = (\mathbf{a}H^T + \mathbf{b}H^T, \mathbf{b}H^T) \Leftrightarrow \mathbf{b}H^T = \mathbf{a}H^T = 0.$$

Puesto que $p_H((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = p_H(\mathbf{u}) + p_H(\mathbf{v})$, la distribución de pesos $\{B_i\}$ del código compuesto es

$$B_i = \sum_k A_k A_{i-k}.$$

Lo que significa $B_0 = B_{20} = 1$, $B_4 = B_6 = B_{14} = B_{16} = 30$, $B_8 = B_{12} = 225$, $B_{10} = 452$.

5. $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico [15, 12].

a) ¿Es 11 . . . 1 una palabra del código? **(1 punto)**

No, las palabras del código tienen todas peso par ($g(1) = 0$).

b) Encuentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? **(1 punto)**

Los 7 errores simples que este código corrige se pueden elegir libremente. Hay, claro está, 15 posibles errores simples, de manera que es imposible corregir todos ellos.

6. **(1 punto)** Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo.

Use el libro o sus propios cálculos para ver que el tamaño óptimo de las tramas es $n^* = -m + \sqrt{m/p_b}$. Sustituyendo este valor en la expresión de la cadencia eficaz, resulta un valor máximo

$$C_e = (1 - \sqrt{mp_b})^2 C.$$

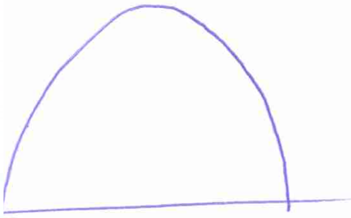
7. **(1 punto)** Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una trama, consta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que lo hace con probabilidad p. Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

Basta con calcular la probabilidad de transmisión con éxito en una ranura cualquiera, que es

$$p(1-1/n)^{n-1} + (1-p)(n-1)1/n(1-1/n)^{n-2} = (1-1/n)^{n-1}.$$

Curiosamente, **no depende de** p. Explíquelo.

...ncia eficaz máxima:



$$Ce_{max} = \frac{\partial Ce}{\partial n} = 0 \Rightarrow n_{opt}$$

Para envío continuo (rechazo simple o selectivo):

$$\boxed{n_{opt} = -m + \sqrt{\frac{m}{P_b}}}$$

...o 2009 (parte de atrás)

Calcula la Ce_{max} para rechazo selectivo:

$$Ce = \frac{(1-p)\cdot n \cdot C}{n+m} = \frac{(1-P_b(n+m))\cdot n \cdot C}{n+m}$$

$$p = P_b(n+m)$$

$$...ax = Ce\Big|_{n=opt} \cdots = \boxed{\left(1-\sqrt{m \cdot P_b}\right)^2 \cdot C}$$

...ocatoria Enero 2014 (Dictado)

...alcula la región de parámetros en la que la estrategia de ...inuo con rechazo simple tiene una cadencia eficaz de al ... 25% mejor que parada y espera en las mismas condiciones. $T_{as} \cdot C$ = longitud de trama. (1 pto)

...o simple: $$Ce = \frac{(1-p)\cdot n \cdot C}{n+m+p \cdot T_{as} \cdot C}$$

... y espera: $$Ce = \frac{(1-p)\cdot n \cdot C}{n+m+T_{as} \cdot C}$$

$$\boxed{C_{e_{r.s}} \geq 1{,}25 \cdot C_{e_{p.e}}} = C_{e_{pe}} + 0{,}25 \cdot C_{e_{pe}}$$

parada y espera

$$\frac{\cancel{(1-P)\cdot n \cdot C}}{n+m \cdot P \cdot T_{as} \cdot C} \geq 1{,}25 \cdot \frac{\cancel{(1-P)\cdot n \cdot C}}{n+m+T_{as}\cdot C}$$

$$T_{as}\cdot C = \ell = n+m$$

$$\frac{1}{n+m+P(n+m)} \geq 1{,}25 \frac{1}{n+m+n+m} \Rightarrow \frac{1}{n+m(1+P)} \geq 1{,}25 \frac{1}{2(n+m)}$$

$$P) \leq \frac{2}{1{,}25}$$

$$\boxed{P \leq \frac{2}{1{,}25} - 1}$$

n FT (2013)

. (parcial 2013)

El tamaño óptimo de trama es aquel con el que se consigue ...ncia eficaz máxima. Se calcula:

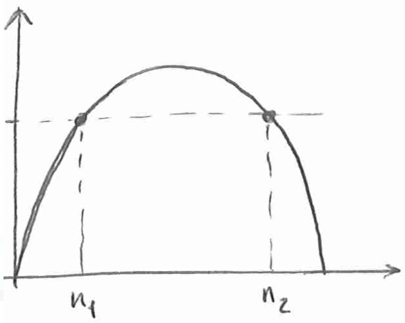
$$\frac{\partial C_e}{\partial n} = 0 \Rightarrow \boxed{n_{opt} = -m + \sqrt{\frac{m}{P_b}} \underset{\uparrow}{=} \frac{10^4}{\sqrt{5}}}$$

$m = 100$

$P_b = 5 \cdot 10^{-6}$

$$\boxed{\ldots_{pt} = n_{op} + m = \frac{10^4}{\sqrt{5}} + 100}$$

...portamiento de Ce frente a la longitud del campo de datos



$$\boxed{n_2 \le n \le n_1}$$

$= 500$ kbps.

$$= (1-p) \cdot \frac{n \cdot C}{n+m} = \frac{[1-k(n+m)] \cdot n \cdot C}{n+m} = 500 \text{ kbps} = \frac{C}{2}$$

$$n - k \cdot n^2 - k \cdot m \cdot n = 0{,}5\,(n+m)$$

$$n - k \cdot n^2 - k \cdot m \cdot n - 0{,}5n - 0{,}5m = 0$$

$$n^2 - \frac{n\,(1 - k \cdot m - 0{,}5)}{k} + \frac{0{,}5\,m}{k} = 0$$

$$n^2 - n\left(\frac{1 - 5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 - 0{,}5}{5 \cdot 10^{-6}}\right) + \frac{0{,}5 \cdot 100}{5 \cdot 10^{-6}} = 0$$

$$n^2 - n \cdot 999000 + 10^7 = 0 \quad \begin{cases} n_1 = 100 \\ n_2 = 10^5 \end{cases}$$

FT (2013)

...stion 7.

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{p(\text{exito})} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1 - P_b\,(n_{opt} + m)}$$

$$p = P_b(n+m)$$

$$= -m + \sqrt{\frac{m}{P_b}}$$

...amos que: $\frac{1}{1-P_b(n_{opt}+m)} = \sqrt{\frac{c}{c_{emax}}} \Rightarrow$

(*)

$...+m) = \sqrt{\frac{\cancel{c}}{(1-\sqrt{m\cdot P_b})^2\cdot\cancel{c}}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{1}{(1-\sqrt{m\cdot P_b})^2}} = \frac{1}{1-P_b(n_{opt}+m)}}$

$\frac{1}{...-P_b(n_{opt}+m)} = \frac{1}{1-P_b\left(-\cancel{m}+\sqrt{\frac{m}{P_b}}+\cancel{m}\right)} = \frac{1}{1-P_b\cdot\sqrt{\frac{m}{P_b}}} =$

$\frac{1}{...\sqrt{\frac{m\cdot P_b^2}{P_b}}} = \boxed{\frac{1}{1-\sqrt{m\cdot P_b}}}$

$...+m) = \frac{1}{1-\sqrt{m\cdot P_b}}$

...7/11/14

... 6.

...chazo selectivo: $c_{emax} = \phi\cdot c \qquad 0<\phi<1$

$\frac{c_{emax}}{c} = s = \phi$

$...x = (1-\sqrt{m\cdot P_b})^2\cdot\cancel{c} = \phi\cdot\cancel{c}$

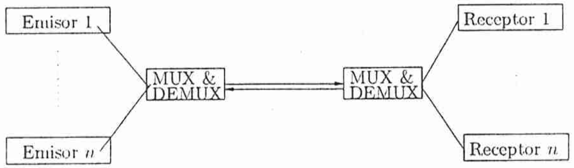
$P_b' = \frac{P_b}{2}$

$...x = (1-\sqrt{m\cdot P_b'})^2\cdot c \Rightarrow c_{emax}' = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{m\cdot\frac{P_b}{2}}\right)^2\cdot c \Rightarrow$

$\boxed{c_{emax}' = \left(1-\frac{1-\sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot c}$

Boletín 17/11/14

eficaz de este enlace. (**1 punto**)



a) La cadencia eficaz máxima de la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo vale

$$(1 - \sqrt{mp_b})^2 C$$

siendo m el número de bits de control en cada trama y p_b la probabilidad de error por bit. Así pues

$$(1 - \sqrt{mp_b})^2 = \phi$$

y, haciendo $p'_b = p_b/2$, la cadencia eficaz máxima pasaría a valer

$$\sqrt{mp'_b} = \frac{\sqrt{mp_b}}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1 - \sqrt{mp'_b})^2 C = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\right)^2 C.$$

b) Suponga que el multiplexor es capaz de intercalar de forma ideal (sin solapamientos y sin tiempos muertos) las tramas provenientes de cada emisor (ídem para los asentimientos), ya sean tramas nuevas o retransmisiones. En estas condiciones, el canal directo se utiliza todo el tiempo y cada trama se envía exactamente el número de veces necesario para que llegue a su receptor sin errores. Pero este es precisamente el funcionamiento idealizado de la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo y ventana de transmisión infinita, de modo que la cadencia eficaz de este enlace de comunicaciones coincide

$$C_v = (1 - p)\frac{n}{n + m} C \text{ bits/u.t.}$$

Observe que cada par emisor $\mapsto$ receptor puede entenderse, a conveniencia, como una pareja de entes de comunicaciones físicos o bien como una pareja *virtual*. En este último caso, se concluye algo muy simple: la división de tasa (*rate splitting*) en origen, combinada con multiplexores estadísticos optimiza el uso del enlace, no importa cuál sea la estrategia de retransmisión elegida.

Boletín 17/11/14

no hay vectores de peso impar la distancia del código es al menos 4 y los errores simples se eden corregir. Puesto que

$$x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 \quad \text{mód } g(x) = x^8$$

palabra del código más cercana a $v(x)$ es $v(x) + x^8$. Esa sería la salida del decodificador.

blema 5 (2 puntos) Considere el código con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenga razonadamente la distancia.

nuestre que el código sólo contiene palabras de peso par.

iendo que el código corrige el mismo número de errores de peso par que de peso impar, obtenga istribución de pesos de los errores corregibles.

listancia es 4: no hay columnas nulas ni dos iguales, la suma de cualesquiera tres columnas pro- e un vector cuyo último bit nunca es nulo y es posible encontrar cuatro columnas linealmente endientes, por ejemplo las cuatro primeras.

sumando un número par de columnas se obtiene un síndrome nulo, ya que la última fila de ontiene sólo unos. O bien, la última de las ecuaciones de comprobación de paridad $\mathbf{y}H^t = 0$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0$$

ie se cumple si y sólo si $p_H(\mathbf{y})$ es par.

o $d_c = 4$ se tiene de inmediato que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 11$. El código corrige, además, algunos res dobles y triples. Echando mano del enunciado se tiene que $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_2$ y se sabe $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 32$. La solución de estas dos ecuaciones lineales es $\alpha_2 = 15$ y $\alpha_3 = 5$.

ema 6 (1 punto) Medidas realizadas en un enlace punto a punto que emplea la retransmisión con rechazo selectivo han determinado que si se dobla la longitud del campo de datos de las cadencia eficaz no varía. Si las tramas portan 150 bits de control y pa probabilidad de error 10^{-5}, ¿qué longitud tienen las tramas y cuánto vale la eficiencia?

l tamaño (desconocido) de las tramas. De acuerdo con el enunciado tiene que cumplirse que $C_e(x)$, siendo

$$C_e(x) = (1 - \kappa(x+m))\frac{x}{x+m}$$

0^{-5} y $m = 150$. Por tanto, igualando las expresiones

$$(1 - \kappa(2x+m))\frac{2x}{2x+m} = (1 - \kappa(x+m))\frac{x}{x+m}$$

e x tiene que ser solución de

$$(1 - \kappa(2x+m))\frac{2}{2x+m} = (1 - \kappa(x+m))\frac{1}{x+m}$$

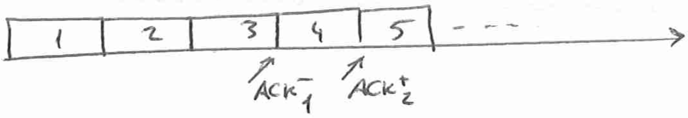
$$2(1 - \kappa(2x+m))(x+m) = (1 - \kappa(x+m))(2x+m)$$

ecuación de segundo grado. Operando de modo sencillo, la ecuación anterior se escribe como

$$(x+m)(2x+m) = \frac{m}{\kappa}$$

solución positiva es $x_0 \approx 2626$ bits. La eficiencia valdrá entonces

$$\frac{C_e}{C}(x_0) \approx 94\,\%.$$



plexar un número suficientemente grande de bx el comportamiento puede ver como un envío continuo. Puesto que los transmisores rendientes unos de otros, solo se retransmitirán las tramas. Se trata por tanto de un rechazo selectivo.

17/11/14

oblema 6.

Datos: $Ce|_n = Ce|_{2n}$

$m = 150$

$Pb = 10^{-5}$

¿ S ?

Rechazo selectivo:

$$Ce = \frac{(1-Pb(n+m))\cdot \cancel{n}\cdot \cancel{C}}{n+m} =$$

$$= \frac{(1-Pb(2n+m))\cdot 2\cancel{n}\cdot \cancel{C}}{2n+m}$$

$$(1-Pb(n+m))\cdot(2n+m) = (1-Pb(2n+m))\cdot(n+m)\cdot 2$$

$$Pb\cdot 2n^2 - Pb\cdot 2n\cdot m - Pb\cdot m\cdot 2n - Pb\cdot m^2 = 2n + 2m - Pb\cdot 2n\cdot 2n\ldots$$

n positivo $n \simeq 2626$ bits

$$\boxed{n+m = 2626 + 150 \text{ bits}}$$

$$e = \frac{(1-Pb(n+m))\cdot n}{n+m} = \boxed{0{,}94}$$

$Pb = 10^{-5}$

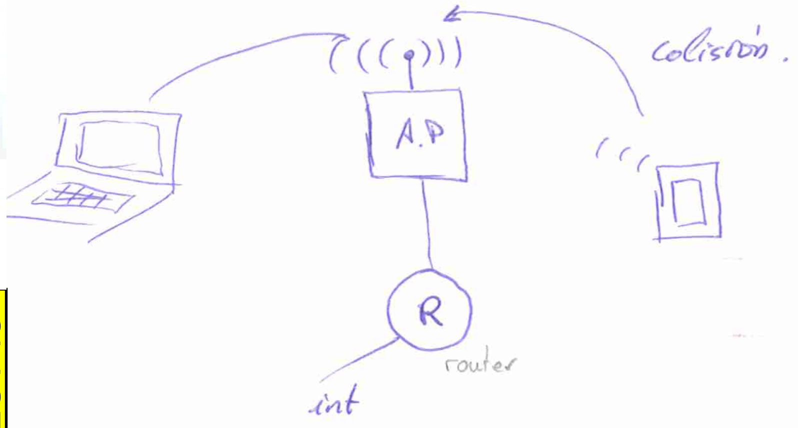
$n = 2626$

$m = 150$

A 6 : CANALES DE ACCESO MÚLTIPLE.

roducción.

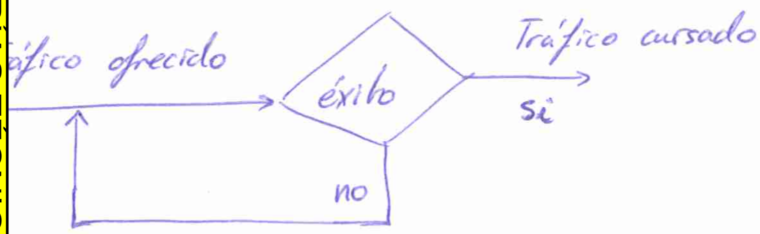
Se estudian sistemas de transmisión donde el medio es compartido



ón del problema: Protocolos MAC (Control de Acceso al Medio)

- → Aloha
- → CSMA, CSMA/CD, CSMA/CA

sistema es el siguiente:



tráf
en la

ámetros:

· Suponemos que todas las estaciones transmiten tramas de la misma
d.

tipos de transmisión:

$$\tau = \frac{L}{C}$$

L → longitud de la trama (bits)

C → bps.

$\tau \equiv$ u. tiempo

...o ofrecido:

• Intensidad de tráfico ofrecido. G

: tráfico ofrecido por todas las estaciones en la u. de tiempo

cada estación transmite $\lambda_i = 500$ kbps y hay $n = 100$ estaciones

sabiendo que el canal tiene $C = 10$ kbps y $L = 1000$ bits.

= tráfico total ofrecido.

$= n \cdot \lambda_i = 100 \cdot 500 \, bps = 50 \, Mbps$.

$\boxed{\underset{bit/s}{\lambda_T} \cdot \underset{s/u.t}{\tau}}$

$$\tau = \frac{L}{C} = \frac{1000 \, bit}{10^7 \, bps} = 10^{-4} \frac{s}{u.t}$$

$$50 \, Mbps \times 10^{-4} \frac{s}{u.t} = 5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4} = \boxed{5000 \frac{bit}{u.t}}$$

$$= \underset{pketes/s}{\lambda_T} \cdot \underset{s/pkt}{\tau} = 50 \, k \, pkt/s \cdot 10^{-4} \frac{s}{pkt} = \boxed{5}$$ paquetes cada τ

...o cursado:

• Intensidad de tráfico cursado: S

$S \equiv$ tráfico cursado en la u.t (cada τ_s) $\quad 0 < S \leq 1$

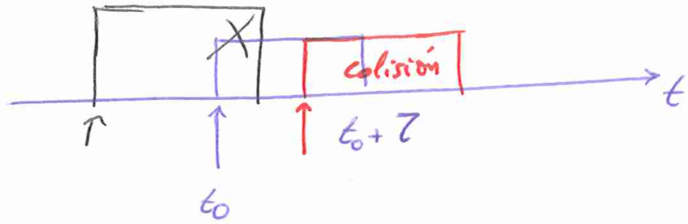
indica el nº medio de tramas que se pueden cursar en la u.t (cada τ_s)

Eficiencia de los protocolos MAC

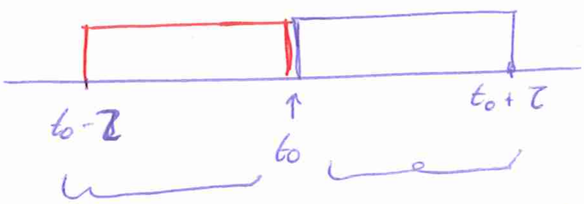
Protocolo Aloha. Aloha puro y Aloha ranurado.

- Aloha puro: Se aplica en redes de transmisión vía radio.

Idea: Cada uno (estación) transmite cuando quiere.



que no existiese colisión: (Nadie transmita entre $t_0 - \tau$, $t_0 + \tau$)

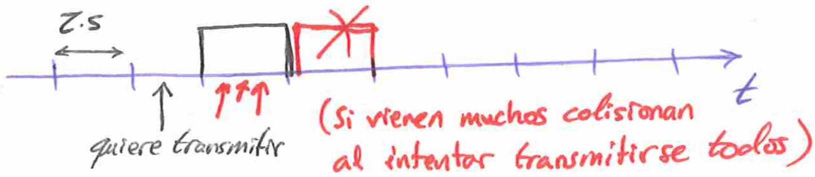


Para que no exista colisión no puede haber mas llegada entre $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$

$= p \cdot G$ $\boxed{S_{max} \simeq 0,18}$ 18%

Aloha ranurado: Consiste en sincronizar todas las estaciones

o el tiempo:



se puede transmitir al principio de una ranura.

...raciones :

· Suponemos que existen n estaciones

· Cada estación transmite una trama cada τ s con probabilidad p.

Intensidad de tráfico cursado = nº medio de tramas que se pueden cursar en la u.t.

1, si solo transmite 1 de las n estaciones.

↓

$$S = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

...mos la eficiencia máxima :

$$p \simeq \frac{1}{n}$$

$$= \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

...ideramos $n \longrightarrow \infty$

$$\boxed{S_{max}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{n-1} =$$

$-n \qquad n \to \infty ,\ x \to \infty$

... e : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+a} = e^{-1}$

$$...m_{\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x-1} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}}_{e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}}_{1} = \boxed{e^{-1}}$$

$$\boxed{S_{max} = e^{-1} = 0,37}$$

Calcula: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{an}\right)^{n-1}$

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{a}-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}_{e^{-1}}\right]^{\frac{1}{a}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}}_{\to 1} = e^{-\frac{1}{a}}$$

12 julio 2012

na 7.

estaciones

S = intensidad de tráfico cursado = nº medio de tramas cursadas en una ranura.

$S = 1\cdot$ probabilidad (solo transmite una estación) $+ \underbrace{0\cdot p\,(\text{~~tx más de 1~~})}_{0} =$

= prob (solo transmite 1 estación) =

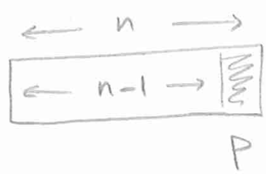
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}}\cdot\underbrace{(1-p)}\,\overline{(n-1)}$$

multiplicado por el nº de n menos la que se transmite

transmite una y el resto no

no transmiten el resto de $\frac{1}{n}$

no transmite la p



buscamos la eficiencia máxima:

$$\lim_{n\to\infty}\left(p\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{(n-1)}{n}\cdot(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}\right) =$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}_{e^{-1}} + (1-p)\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}}_{e^{-1}} =$$

$$e^{-1} + (1-p)\cdot e^{-1} = \boxed{e^{-1}}$$

24 mayo 2011.

...lema 6.

S = nº medio de tramos que se pueden cursar en una ranura

$= 2\, p$ (transmiten solo 2 estaciones) $+ 1 \cdot p$ (transmite solo 1 estación) $+$

otro caso $\to 0$

$$= 2 \cdot \left[\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \right] + 1 \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\cancel{2} \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{n^2}}_{1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}}_{e^{-1}} \right] + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}_{e^{-1}} =$$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n \cdot n-1 \cdot \cancel{(n-2)!}}{2\, \cancel{(n-2)!}} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\boxed{e^{-1} = 2 \cdot e^{-1}}$$

...nta la eficiencia si $p = \frac{1}{2n}$?

$= 1\, p$ (transmite solo 1) $+ 2 \cdot p$(transmite 2)

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)!\cdot(n-2)!}{2\,(n-2)!}$$

...solo 1) $= n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$

...os) $= \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$

$$\ldots \cdot (1-p)^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$\ldots \cdot \frac{1}{2\cancel{n}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-2} \cdot \cancel{2}$$

$$\ldots - \frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n-2}\right)=$$

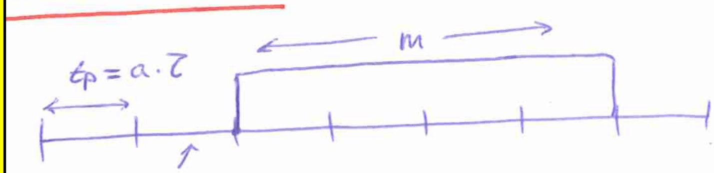
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}+\frac{1}{4}\,\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}-2}\right)=$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}\qquad\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}}\qquad\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e^{-1}}$$

$$\lim\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right]}_{e^{-1}}^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{1}{4}\cdot 1\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/2}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2}\right)=$$

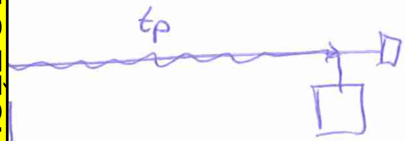
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}}}$$

...TOCOLO CSMA.



...ardo máximo de propagación.

ETHERNET: limitado por cuestiones de retardo a 1500 m.



$$a=\frac{t_p}{\tau}\qquad m=\frac{\tau}{a\tau}=\frac{1}{a}\text{ ranuras.}$$

$$a \ll 1 \rightarrow m > 1$$

...ción para poder transmitir:

...e transmite al principio de una ranura si el canal está libre.

...ansmitir se "escucha" el medio.

Eficiencia (acceso aleatorio)

- **Tráfico ofrecido.** G: número medio de intentos de transmisión en un intervalo de duración igual al tiempo de transmisión de una trama
- **Tráfico cursado.** S: número medio de tramas recibidas sin error durante un intervalo de duración igual al tiempo de transmisión de una trama
- En general, S es función de G y de otros parámetros del sistema (número de estaciones, retardo, etc.)
- La **eficiencia** de un algoritmo de acceso múltiple es el valor máximo posible de S

- Aloha ranurado con n estaciones y probabilidad p de intentar la transmisión en una ranura

$$S = \mathbb{P}(\text{transmisión con éxito}) = np(1-p)^{n-1}$$

- Eficiencia. S es máxima si $p = 1/n$. En ese caso

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \frac{1}{e} \approx 37\,\% \quad \text{si } n \to \infty$$

Eficiencia de CSMA

- CSMA:

$$S|_{\text{CSMA}} = \frac{aGe^{-aG}}{1 + (a-1)e^{-aG}}$$

Obsérvese que:

$$S|_{\text{CSMA}} \to \frac{G}{1+G}, \quad \text{si } a \to 0$$

$$\frac{G}{1+G} \to 1, \quad \text{si } G \to \infty$$

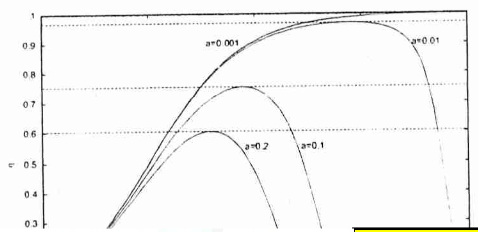
- CSMA/CD:

$$S|_{\text{CSMA/CD}} = \frac{aGe^{-aG}}{a + aGe^{-aG} + a\left(1 - (1+aG)e^{-aG}\right)}.$$

Eficiencia:

$$\eta|_{\text{CSMA/CD,max}} \approx \frac{1}{1 + 3{,}31a}.$$

Gráficas
CSMA/CD



sidadeVigo

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TELEMÁTICA

Examen de Fundamentos de Telemática

24 de mayo de 2011

e: ______________________________ D.N.I.: ______________

la fuente X, de rango $\mathcal{X} = \{i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq 4\}$ y función de masa de probabilidad $p_i = \mathbb{P}(X =$ para $i < 4$, y un canal cuaternario con borrado con probabilidad de error p en la transmisión ímbolo

ermine la información media transmitida por cada símbolo de la fuente cuando se usa directente el canal (es decir, sin ninguna codificación). **(1 punto)**

l coste de transmisión de un símbolo por el canal dado es unitario, ¿cuánto estaríamos disstos a pagar por un canal cuaternario fiable si queremos transmitir fielmente un mensaje trariamente largo y no importa el tiempo de transmisión? **(1 punto)**

régimen de transmisión de ambos canales es idéntico y los costes son los del apartado anterior, nto costaría transmitir un mensaje de la fuente de n (arbitrariamente grande) símbolos si se en simultáneamente los dos canales? **(1 punto)**

nto) La secuencia

$$A, N, U, L, (1, 2, L), (5, 3, U), Z, (7, 2, Z), (3, 8, N), (1, 2, \emptyset)$$

la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado `longitud de la frase, sufijo`), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el . Averigüe el mensaje.

triz

$$H = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

probación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

enga la distribución de pesos de los errores corregibles. **(1 punto)**

sidere el subconjunto de palabras del código que comienzan por 0. Obtenga la distribución de s de este subcódigo. **(1 punto)**

$x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.

estre que no existen palabras del código de peso 2. **(1 punto)**

poco las hay de peso 3. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se be el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? **(1 punto)**

nto) Dos equipos están conectados mediante M enlaces paralelos idénticos con tasa de transbits/s. ¿Cuál sería la cadencia eficaz agregada si se utiliza una estrategia de envío continuo zo simple para transmitir por cada uno de ellos? Compárela con la cadencia eficaz de un único tasa de transmisión MC bits/s que usase la misma estrategia y tuviera iguales los restantes s.

nto) En un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a a, las transmisiones son exitosas si en cada ranura hay uno o dos intentos de transmisión. aciones transmiten independientemente con probabilidad $p = 1/n$ en cada ranura ¿cuál será ia (para $n \to \infty$) del sistema? ¿Aumenta la eficiencia si $p = 1/(2n)$? Suponga que ninguna ransmite dos tramas en una misma ranura.

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

e: ______________________ D.N.I.: ______________

ıto) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de les aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

ntos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una ternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

sabe que $1/3$ de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad its?

coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el e de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n(\gg 1)$?

ıto) La secuencia

$$A, L, (1, 4, B), (1, 2, R), (1, 9, D), E, (8, 2, O), (4, 5, L), (1, 2, D), (A, 2, \emptyset)$$

la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado `longitud de la frase, sufijo`), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el . Averigüe el mensaje.

ıtriz

$$H = \left(I_5 \;\; \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

probación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

enga la distribución de pesos del código **(1 punto)**

sidere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

estre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen al código definido por H, entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una palabra del código ıido por H'. Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto **(1 punto)**

$(x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico $[15, 12]$.

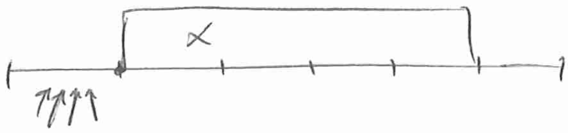
$11\ldots1$ una palabra del código? **(1 punto)**

ıentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los despla- ıientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? **(1 punto)**

nto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de tinuo con rechazo selectivo.

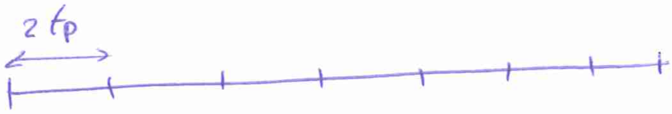
nto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una nsta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que n probabilidad p. Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

de haber colisión en CSMA?



ROTOCOLO CSMA/CD

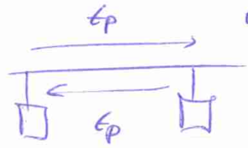
A con Detección de Colisión.



s de transmitir se "escucha" el medio. Si está libre se transmite.

rada la transmisión se sigue "escuchando" el medio para detectar

Esto se hace durante $2t_p$ (1 ranura).



$t_p + t_p = 2t_p$.

se detecta colisión se corta la transmisión y

queda libre.

PO MÍNIMO DE TRANSMISIÓN?

$$\tau_{min} = 2 \cdot t_p$$

$$\tau_{min} = \frac{L_{min}}{C}$$

longitud mínima de trama: $\boxed{L_{min} = \tau_{min} \cdot C}$

ficiencia máxima en CSMA/CD: $\boxed{S_{max} = \frac{1}{1+3{,}31 \cdot a}}$ $\quad a = \frac{t_p}{\tau}$

T. ENERO 2012.

plique de forma clara en que condiciones la eficiencia de CSMA/CD es mejor que la de Aloha.

oha ranurado: CSMA/CD:

$$= e^{-1} \simeq 0,37 \quad < \quad S_{max} = \frac{1}{1 + 3,31 \cdot a}$$

será mejor que Aloha cuando $\frac{1}{1+3,31\cdot a} > 0,37$. Para

de $a >$ ______ despejar a.

FT 2013

8. ¿Es cierto que si a una red CSMA/CD se añaden nuevas el rendimiento empeora? Apoye o refute esta idea.

o. Lo que le afecta al rendimiento de CSMA/CD es el retardo ración (t_p)

ios CSMA/CD.

ema 8.1.

Datos: $C = 1$ Gbps
Distancia $= 1$ km
$V_p = 200\,000$ km/s

$$L_{min} = \tau_{min} \cdot C \qquad t_p = \frac{\text{Distancia}}{V_p} = \frac{1\text{km}}{2\cdot 10^5 \text{ km/s}} = 5\ \mu s.$$

$$\tau_{min} = 2 \cdot t_p$$

$$\boxed{L_{min} = 10^{-5}\text{ s} \cdot 10^{9}\ \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 10^4 \text{ bits}}$$

$$\boxed{\tau_{min} = 2 \cdot t_p = 10\ \mu s = 10^{-5}\text{ s}}$$

EJERCICIOS CSMA/CD

2. Determine la fracción de ranuras exitosas y la fracción de ranuras vacías.

Problema 7.

1. Si el número medio de intentos necesarios para la transmisión de un mismo paquete en un canal Aloha ranurado con tráfico poissoniano es 2, calcule la fracción de las ranuras en las que se produce una colisión.

2. Ídem en una red CSMA no persistente con un retardo máximo de propagación igual a la décima parte del tiempo de transmisión de una trama.

Problema 8.

1. Suponga que considera construir una red CSMA/CD de 1 Gbps sobre un cable de 1 Km sin repetidores. La velocidad de propagación de la señal en el cable es de 200000 Km/s. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de trama?

2. Una red token-ring de fibra óptica tiene 200 Km de longitud y su velocidad de transmisión es de 100 Mbps. La velocidad de propagación de la señal en la fibra es de 200000 Km/s y el tamaño máximo de trama es de 8000 bits. ¿Cuál es la máxima eficiencia del anillo?

3. Medidas realizadas en un canal Aloha ranurado con un número infinito de usuarios muestran que el 10 % de las ranuras están vacías. ¿Cuál es la eficiencia? ¿Cuál es el porcentaje de ranuras en las que hay colisión?

Problema 9. Suponga que se tiene una red CSMA/CD de 10 Mbps sobre un cable de 1 Km sin repetidores. Considere que la velocidad de propagación de la señal en el cable es de 200000 Km/s. ¿Cuántas estaciones podrían conectarse, en el mejor de los casos, a esta red si cada una de ellas genera de forma aleatoria datos a razón de 100 Kbps en tramas de longitud constante igual a 10 veces el tamaño mínimo? Explicite las hipótesis que permitirían alcanzar tal número de estaciones.

Problema 10. Suponga que se modifica el método de acceso de token-ring de forma que ahora es la estación destino la que elimina la trama de datos del anillo, enviando una trama de confirmación corta en lugar de dejar que la trama original vuelva al emisor. Calcule la eficiencia con este método.

Problema 11. Dada una red CSMA/CD en la que todas las estaciones transmiten tramas de igual longitud, 10 veces mayor que la longitud mínima, ¿cuál es el número máximo de estaciones que pueden conectarse si cada una genera tráfico (nuevo) con una intensidad de 0.01?

Problema 12. Dada una red CSMA/CD ranurada, determine la longitud media de los intervalos de ranuras en las que hay colisión si:

1. El tráfico ofrecido es poissoniano.

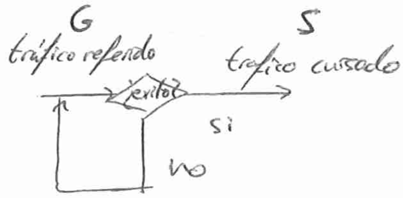
2. La red tiene N estaciones que, cuando el medio está libre, transmiten independientemente unas de las otras con probabilidad p.

Canal: C bps

tasa de entrada de inf. al canal $\leq$ tasa de infor. por el canal.

$N_{i_{max}} \cdot \lambda_{i_{max}} \leq C \cdot S_{max}$

velocidad de tx de cada estación. — eficiencia



$L = 10\, L_{min} \Leftrightarrow \tau = 10 \cdot \tau_{min} = 10 \cdot 2t_p = 20\, t_p$

= 10 Mbps

ancia = 1 km

= 200 000 km/s

= 100 kbps.

$\frac{t_p}{20 t_p} = \frac{1}{20}$

$N \cdot \lambda_i \leq C \cdot S_{max}$

$$N \leq \frac{C \cdot S_{max}}{\lambda_i} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0{,}862}{100 \cdot 10^3} = 86{,}2$$

$$S_{max} = \frac{1}{1 + 3{,}31 \cdot a} = \frac{1}{1 + 3{,}31 \cdot \frac{1}{20}} = 0{,}862$$

Por tanto: $\boxed{N_{max} = 86}$

11.

= 10 τ_{min}

?

idad de tráfico ofrecido: $0{,}01 = G_i$

$G = \sum_i G_i = N_{max} \cdot G_i$

$G_i = \frac{\lambda_i}{C}$

$N_{max} \cdot \underset{bps}{\lambda_i} \leq \underset{bps}{C} \cdot S_{max}$

$a = \frac{t_p}{\tau} = \frac{t_p}{20 t_p} = \frac{1}{20}$

$$\leq \frac{C \cdot S_{max}}{\lambda_i} = \frac{S_{max}}{G_i} = \frac{0{,}862}{0{,}01} = 86{,}2$$

$$= \frac{1}{1 + 3{,}31 a} = 0{,}862$$

$\boxed{N_{max} = 86}$

2014.

El rendimiento del sistema aloha es: $S(p) = n \cdot p\,(1-p)^{n-1}$

$\frac{2}{n}$ y $n \to \infty$ calcula la eficiencia.

$$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = \cancel{n} \cdot \frac{2}{\cancel{n}} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} = $$

$p = \frac{2}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1}$$

$-n$

$$\left(1 - \frac{1}{n/2}\right)^{n-1} =$$

$$\lim_{n \to \infty} 2\left(1 - \frac{1}{n/2}\right)^{n-1} = \lim_{x \to \infty} 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x-1} = \lim_{x \to \infty} 2\Bigg[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}_{e^{-1}}\Bigg]^2 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}}_{1}$$

$$\boxed{\ldots x = 2 \cdot e^{-1}}$$

2012.

$$Q_{4\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

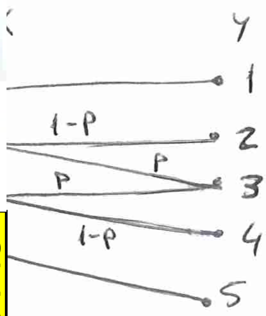
entradas salidas

¿p? $I(x;Y) = \frac{7}{4}$ bits?

$$I(x;y) = H(x) - H(x/y) = H(y) - \underbrace{H(Y/x)}_{p(Y/x)}$$

Vamos por este camino puesto que parece que podremos sacar $p(Y/x)$

das



P_Y: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$, ε, $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$, $\frac{1}{4}$

$$\ldots 1) = \overbrace{p(y=1/x=1)}^{1} \cdot p(x=1)$$

$\Downarrow$

$$p(x=1) = \frac{1}{4}$$

$$= p(y=2/x=2) \cdot p(x=2) =$$

$$(1-p) \cdot \frac{1}{4} = p(y=4)$$

* Como el canal se comporta igual para el 2 y para el 3 con las mismas probabilidades. Esto solo puede ser si sus probabilidades son equiprobables.

Hecho al principio de los apuntes.

$$P_{128} = \left\{ \overbrace{\frac{1}{2}}^{x_1}, \overbrace{\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}}^{x_2} \right\}$$

$m = 128$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\rightarrow \frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{32}$ $\rightarrow \frac{1}{2^5}$

$$\frac{1}{p_i} = \text{entero } \forall i \Rightarrow L = H_s(\vec{p})$$

código óptimo: $\bar{L} = H_2(\vec{p})$

$\cancel{H(p) + p\cdot H(x_1) + (1-p)H(x_2)}$ $\qquad \cancel{p = \frac{1}{2}}$

$\cancel{\underbrace{H_2\left(\frac{1}{2}\right)}_{1} + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{H(x_1)}_{0} + \frac{1}{2}\, H(x_2) =}$

3 la entropía: $H_2(\vec{p}) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i} =$

$+ \frac{1}{4}\cdot \log_2 4 + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}}\cdot \log_2 2^{m-1}\right)\cdot 2 =$ $\qquad$ mal porque:

$+ \dots + \frac{m-1}{2^{m-1}}\cdot 2$ $\qquad \dots \frac{1}{4}\cdot\log_2 4 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \dots$

126

$= 126\cdot\frac{1}{2} + \frac{m-1}{2^{m-2}} = \boxed{63 + \frac{m-1}{2^{m-2}}}$

ACABAMOS. ANULADO EN EL EXAMEN

T. 2013

1.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nga que X es uniforme. Calcule $H(X,Y)$ y determine el valor de p que

za.

$$H(X,Y) = \sum_{ij} P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}$$

$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{3} & (1-p)\frac{1}{3} & \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ p/6 & \frac{1-p}{3} & \frac{p}{6} \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{p}{6}, \frac{1-p}{3}, \frac{p}{6}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow H(X,Y) = \Big(\underbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}_{Z_1}, \underbrace{\frac{p}{6}, \frac{p}{6}, \frac{1-p}{3}}_{Z_2}\Big)$$

...ición :

$$= H(p) + p \cdot H(z_1) + (1-p) \cdot H(z_2)$$

$p = \frac{2}{3}$

$1-p = \frac{1}{3}$

$$\underbrace{\underbrace{H\left(\frac{2}{3}\right)}_{cte} + \frac{2}{3} \underbrace{H_2(z_1)}_{1}}_{constante} + \frac{1}{3} \cdot H(z_2) \; (*) =$$

$P_{z_1} = \left\{ \frac{1/3}{2/3}, \frac{1/3}{2/3} \right\}$

$P_{z_2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

$$\ldots) = \max \left\{ H_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} H_2(z_2) \right\} =$$

$P_{z_2} = \left\{ \frac{P/6}{1/3}, \frac{P/6}{1/3}, \frac{(1-p)/3}{1/3} \right\}$

$$H_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \max \left\{ H_2(z_2) \right\}$$

$P_{z_2} = \left\{ \underbrace{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}}_{z_3}, \underbrace{1-p}_{z_4} \right\}$

...o

$$H(p) + p \cdot \underbrace{H(z_2)}_{1} + (1-p) \cdot \underbrace{H(z_4)}_{0} = H(p) + p$$

De aquí por razonamiento sacamos el máximo.

...o.

Porque: $\frac{p}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3}$

$(1-p) = \frac{1}{3}$

Son equiprobables

$P_{z_2} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

...máximo si son equiprobables. Esto se cumple para: $\boxed{p = \frac{2}{3}}$

$$\ldots \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 \text{ bits}$$

ga que $p=1$ y que los símbolos de X que se transmiten
n equiprobables. Calcule el máximo de $I(X;Y)$ y determine
stribución de X se alcanza.

hará más adelante.

$2^{-i} = (\frac{1}{2})^i$ $\quad \sum (\frac{1}{2})^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

Cu...) Considere el canal discreto sin memoria con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sum 2^{-i} \leq 1$ $\quad N \cdot V_j \cdot H = ...$ $\quad N \cdot V_j = 1.$

X e... ...pectivamente, la entrada y la salida de este canal.
... que X es uniforme. Calcule H (X, Y) y determine el valor de p que la maximiza
... que p= 1 y que los símbolos de X que se transmiten fielmente son equiprobables.
...l máximo de I(X; Y) y determine para qué distribución de X se alcanza.

Cu... Se quiere transmitir los símbolos de una fuente cuaternaria por un canal binario ideal.
Pa... ...n primero con un codificador binario de eficiencia 0,9 y, a continuación salida de éste
se ... ...ódigo binario ideal de longitud L. ¿Cuánto vale L?

Cue... Considere infinitas fuentes independientes de igual entropía H(X) y $v_i = 2^{-i}$, para i= 0,
1, 2... ...s transmitir sobre un canal de tasa unitaria y C= H(X) mensajes del mayor número
pos... ...cuál es la mayor de las tasas de transmisión fuentes que transmiten sobre el canal?

Cue... Determine la eficiencia de un código compacto cuaternario con una fuente de 9
síml... ...e probabilidad p= (0, 15, 0, 15, 0, 15, 0, 15, 0, 1, 0,075 , 0,075, 0,075, 0,075). Dejarla
expr... ...ción de la entropía de la fuente.

Cue... ...tos). Sean H_r y H_s los códigos Hamming binarios de r y s bits de redundancia
resp... ...ean H_r y H_s sus matrices de comprobación de paridad. Recuerde que los Hamming
tiene... ...orrigen únicamente los errores simples.
... ...a distancia del código que tiene por matriz de comprobación de paridad
... 0)
... s).
... ...ambién su distribución de pesos de errores corregibles.

Cue... s) Para el código [1023, 1012] generado por g(s)= (x – 1) (x^{10} +X^3 +1)
... sistemáticamente el mensaje x. .
... ...e el polinomio x^{12}+ x^{10}+ x^5+ x^3 + x^2. El factor x^{10}+ x^3 + 1 es primitiva

$x(x) = x^{n-k}$ ... $\quad r(x) = R_{g(s)}\, x^{n-k}$ ...

Cue... Calcule el número medio de transmisiones de una trama en un enlace donde se
emp... ...a de envío continuo con rechazo selectivo con el tamaño óptimo de tramas.
Com... ...ual a $a\sqrt{C/\text{máx}_n C_e}$, donde C denota la capacidad nominal.

Cue... ¿Es cierto que si a una red CSMA/CD se añaden nuevas estaciones el rendimiento
emp... ...efute esta idea.

$\frac{1}{1-P}$ $\quad n_{opt} = ...$

$P_B(1+n)$ $\quad n_{opt} = n - \sqrt{\frac{n}{P_B}}$

$n = n_{opt}.$ $\quad C_e\, ...$

ifica que $r(x)$ sería una palabra del código —todos los múltiplos de $g(x)$ lo son— con grado $g(x)$, lo que es imposible a menos que $r(x) = 0$.

nomio

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$$

código cíclico binario $[15, 8]$ y todos sus factores son primitivos.

as propiedades que conozca para determinar la distancia del código **(0.75 puntos)**

difique el vector recibido $x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^7$. **(0.75 puntos)**

linomio generador tiene peso par ($g(1) = 0$), así que la distancia es par. Como $x^4 + x^3 + 1$ imitivo, los errores dobles de distancia menor que 15, que son todos, son detectables; y como tiene peso 4, la distancia es 4.

$x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^7 = x^7 g(x) + x^{10}$. Puesto que los errores simples son corregibles con este o, el decodificador estima la palabra $x^7 g(x)$.

ere un enlace con las siguientes características: $C = 1$ Mb/s, $T_{\text{as}} = 100$ ms y $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ (κ bilidad de error por bit). Suponga que se usa un protocolo ARQ de envío continuo y rechazo n $m = 100$.

nto vale el tamaño óptimo de trama? **(0.5 puntos)**

a qué rango de valores de longitud de trama no supera la cadencia eficaz los 500 kb/s? **(1 o)**

xpresión para la cadencia eficaz (normalizada) en la estrategia de rechazo selectivo es

$$\frac{C_e}{C} = (1 - \kappa(n+m))\frac{n}{n+m} = \frac{n}{n+m} - \kappa n.$$

supone continua la variable n, el tamaño óptimo de trama es la solución de la condición de er orden

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{C_e}{C}\right) = \frac{m}{(n+m)^2} - \kappa = 0,$$

cir $n^* = -m + \sqrt{m/\kappa}$. Para los datos del enunciado

$$n^* = -100 + \sqrt{\frac{100}{5 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{\sqrt{5}} - 100 \approx \frac{10^4}{\sqrt{5}}.$$

puntos de corte son la solución de la ecuación cuadrática

$$(1 - \kappa(n+m))\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2},$$

n

$$\kappa n^2 - n\left(\frac{1}{2} - \kappa m\right) + \frac{m}{2} = 0$$

s raíces son

$$n^* = \frac{(1/2 - \kappa m) \pm \sqrt{(1/2 - \kappa m)^2 - 2m\kappa}}{2\kappa} \approx \frac{(1/2 - \kappa m) \pm (1/2 - 3\kappa m)}{2\kappa}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - 2m \approx 10^5 \text{ bits} \\ m = 100 \text{ bits.} \end{cases}$$

ota de 500 kb/s no se supera si $n < 100$ bits o si $n > 10^5$ bits.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean X e Y las variables de entrada y salida del canal y sea

$\vec{P} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{4}\}$ el vector de probabilidades de la variable aleatoria Y.

¿Cuanto ha de valer p para que la información mutua sea de 7/4 bits?

2. Dado un canal binario ideal de régimen de transmisión V_c bps y cuatro fuentes binarias de entropías (en bits): 1, 0.5, 0.25, 0.125. ¿Cuál es el máximo régimen de transmisión de las fuentes para transmisión fiable si han de compartir el canal a partes iguales?

3. Dada una fuente que genera n símbolos de forma equiprobable cuyos mensajes se precodifican con un código compacto binario de eficiencia 0.9. Si se quieren transmitir esos mensajes de manera fiable y eficiente a través de un canal binario de capacidad C bits y régimen de transmisión V_c, ¿Cuántos símbolos de canal serán necesarios por cada símbolo del mensaje precodificado?

Anulado

4. Considere una fuente que genera 128 símbolos con probabilidades, que ordenadas de forma decreciente, verifican que: las dos últimas son iguales y cada una de las demás es el doble de la anterior. Si se codifican los símbolos uno a uno, ¿cuál es la longitud de un código compacto binario? ¿Cuántos códigos distintos hay para esta fuente?

No entra cod. aritmética

5. Dada una fuente cuaternaria sin memoria que emite símbolos de 2 bits con probabilidades p(A)=0.3, p(B)=0.25, p(C)=0.25, p(D)=0.2. Si se utiliza codificación aritmética ¿Cuál es la secuencia de símbolos de esta fuente más larga que se puede representar con n bits?.

6. Dado un código cíclico binario de longitud 63 y dimensión 56 engendrado por $g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$, siendo $x^6 + x + 1$ un polinomio primitivo, caracterice las propiedades de detección y corrección de errores de este código. ¿Cuál es el menor código cíclico que contiene a $x^6 + x + 1$?

Anulado

7. Supóngase un vector corregible con un cierto código lineal en el que las posiciones erróneas son las **r** primeras: **e**=(e_1 … e_r 0 …0). Considérese otro patrón de errores, **e'**, cuyas posiciones erróneas son un conjunto de las del vector anterior **e'**=(e_1 … e_{r-1} 0 …0). Demostrar que si **e** es corregible **e'** también lo es. Demuestre por contradicción.

9. Imagine un enlace de datos punto a punto con un emisor que supiera al instante si las tramas que transmite han llegado bien. Sea p la probabilidad de error en la transmisión de una trama cualquiera. ¿Cuál es la cadencia eficaz del enlace?

10. Explique de forma clara y precisa en que condiciones la eficiencia de una red CSMA/CD resulta ser mejor que la de Aloha.

Para el código $[1023, 1012]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^{10}+x^3+1)$

...ique sistemáticamente el mensaje x.

$x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$ $\qquad$ $u(x) = x$

información $\qquad$ $n-k = \text{grado}(g(x)) = 11$

$x^{n-k} \cdot u(x) \cdot \text{mod } g(x)$ $\qquad$ $X(x) = x^{11} \cdot u(x) + r(x)$

$x^{11} \cdot \text{mod } g(x) = x^{12} \cdot \text{mod } g(x)$

$$\begin{array}{l|l} & x^{11}+x^{10}+x^4+x^3+x+1 \\ \hline & x+1 \end{array}$$

$\cancel{\;}+x+\cancel{1}$

$x^3+\cancel{x}$

$r(x) = x^{10}+x^5+x^3+x^2+1$

$$\boxed{X(x) = x^{12}+x^{10}+x^5+x^3+x^2+1}$$

...ique el polinomio $x^{12}+x^{10}+x^5+x^3+x^2$. El factor $x^{10}+x^3+1$ es primitiva.

...el código puesto que si lo desplazas el polinomio es de grado 10, menor

... del polinomio (grado 11) y no puede ser del código siendo menor de 11.

$\cancel{x^{10}}+\cancel{x^5}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x^{11}+x^{10}+x^4+x^3+x+1 \\ \hline x+1 \end{array}$

$+\cancel{x^4}+\cancel{x}$

$+1$

... d $g(x)$.

$S(x) = Y(x) \text{ mod } g(x) = 1$

$\notin C \Rightarrow \exists \; e(x)$ $\qquad$ Este detecta los simple pero no los corrige.

$E(x) = g(x)$ $\qquad$ $P_H(e) \leq \left[\dfrac{dc-1}{2}\right] \geq 1$

... comprobar si corrige los errores simples. Los corregirá si $\dfrac{dc-1}{2} \geq 1$.

...os calcular la dc.

dc:

/c ≥ 2

(x) tiene P_H par ⇒ todas las palabras código son P_H par ⇒ **dc es par**

(x) tiene un p(x) como factor: ⇒ Detecta dobles

$n \leq 2^r - 1$

$1023 \leq 2^{10} - 1 = 1023$

dc ≥ 4 ⇒ Esto garantiza que corrige todos los errores simples.

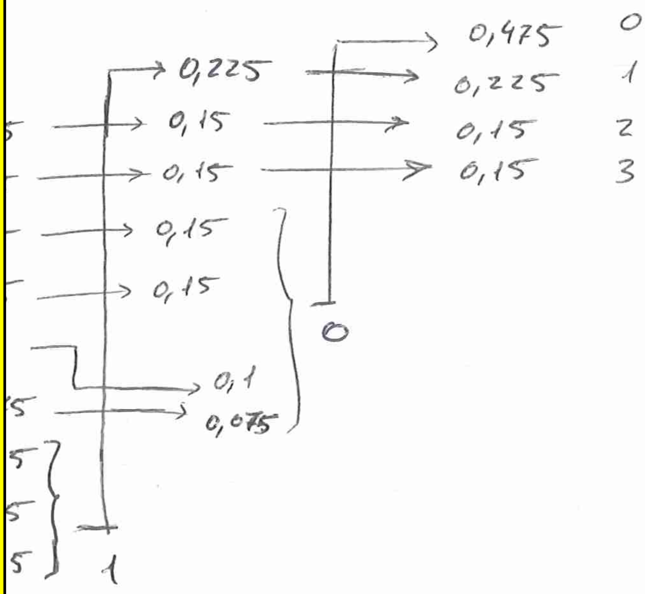
) = 1

$\boxed{\text{est}) = \gamma(x) + 1}$

¿1? código cuaternario.

$$\frac{H_4(\vec{p})}{\overline{L}} = \boxed{\frac{H_4(\vec{p})}{1,7}}$$

$\frac{1}{p_i} \equiv$ entero $\forall i \Rightarrow \overline{L} = H_4(\vec{p}) \longrightarrow \log_4 \frac{1}{0,15} \equiv$ no es entero.



$s = 4$

$n = 9$

$2 + (n-2) \bmod (s-1)$

$2 + \underset{\uparrow \, \text{resto}}{7 \bmod 3} = 2 + 1 = 3$

$\sum l_i \cdot p_i = \underbrace{(1 \cdot 0{,}15) \cdot 2}_{0{,}3} + \underbrace{(2 \cdot 0{,}15) \cdot 2}_{0{,}6} + \underbrace{2 \cdot 0{,}1}_{0{,}2} + \underbrace{(2 \cdot 0{,}075)}_{0{,}6}$

$\boxed{1{,}7}$

Lunes 1, diciembre 2014.

↓

NET

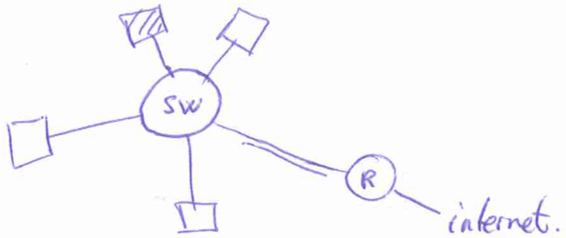
. LANS CONMUTADAS

. VLANS

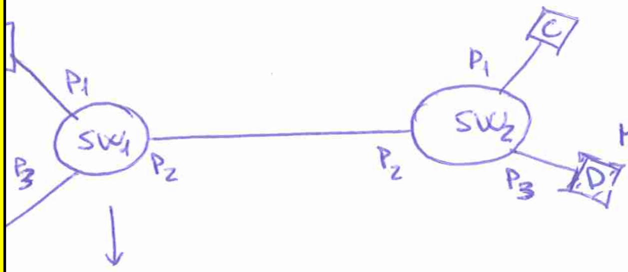
3. STP Protocol.

CONMUTADAS

N: Red de Área Local.



rendizaje hacia atrás (Paso de información de un ordenador A a B)



Host (terminal final (ordenador))

* tabla de reenvío

→ D

el destino no está en la tabla de reenvío hace flooding (enviar por líneas de salida posibles).

hacer esto "descubre" el host A y lo guarda. Este es alcanzable por Pi.

reenvío

Destino	Puerto
A	P1
C	P2
B	P3

Destino	Puerto (salida)
A	P2
C	P1

e flooding del paquete recibido SW_1 descubre que A es
é por P_2.

→ A:

no hace flooding. Conoce el destino A y "descubre" donde está
"descubre" donde esta C.

→ B:

e flooding
flooding

→ A:

SW_1 reenvio (ya sabe donde está A).
SW_1 descubre a B.

→ D:

SW_2 flooding
SW_1 flooding

e inicializa la tabla del SW_2.

→ C

SW_2 flooding
SW_1 descarta el paquete recibido (porque llega por el camino que lo
)

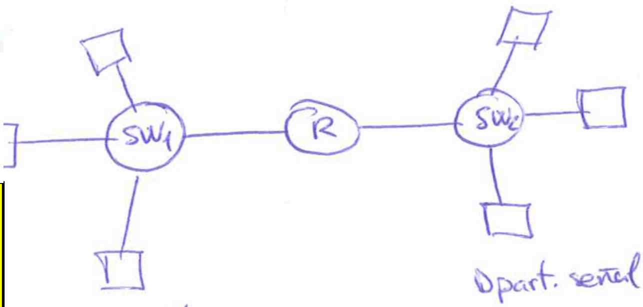
esta acción se le llama filtrado.

Destino desconocido.

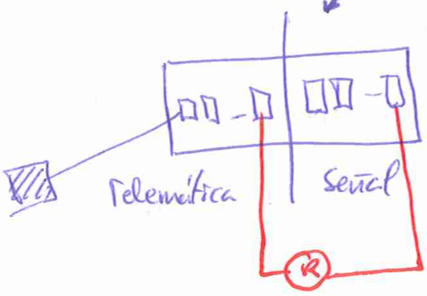
Destino conocido.

Si se recibe un paquete por el puerto usado para hacer reenvío.

s (Virtual LAN)



Separados por switch (programable por software)



TRUNKING

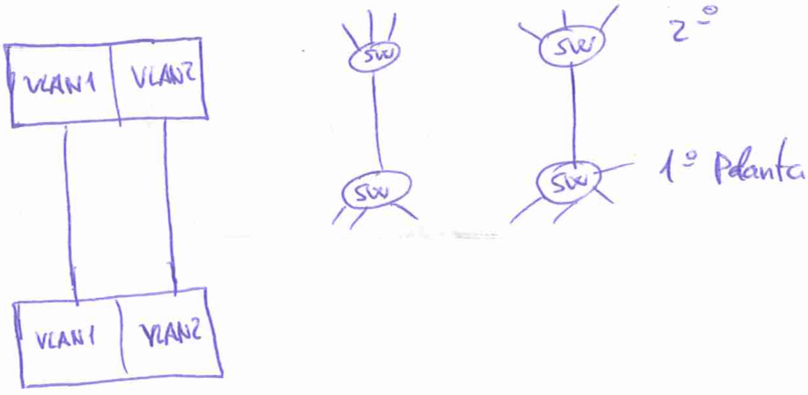
trunking

VLAN2

Enlace trunk.

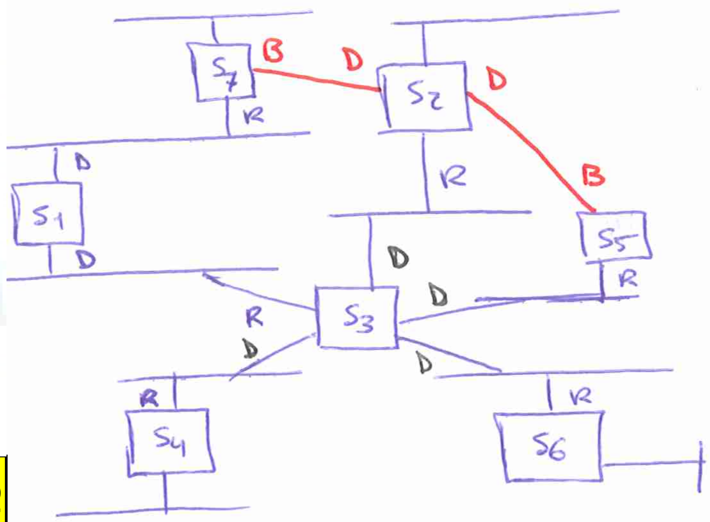
Las tramas van "etiquetadas"

VLAN2



ediante trunking nunca se pueden comunicar distintas Vlans.

TP.



nmamiento entre SWs tiene que ser único. STP no busca

óptimo (de menor coste), busca un camino único.

timo STP. (Spanning Tree Protocol)

camos el sw raíz. Es el sw de menor ID. (SW1)

s los puertos del sw raíz son designados (D) (pueden utilizarse

mitir datos)

el resto de sw se busca el puerto raíz. (El de camino

hacia el sw raíz)

puerto de un switch conectado con un puerto raíz de otro es

puerto de un sw conectado con otro que no es raíz será

si pertenece al sw de mayor ID. Si no será designado.

Examen de Fundamentos de Telemática

23 de mayo de 2014

…: ______________________ D.N.I.: ____________

… 1 (2 puntos). Sea la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada …la (Y) de un canal

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

…rmine $I(X;Y)$.

…rmine la capacidad del canal.

…p marginales de X e Y son $(2/3, 1/3)$ y $(1/2, 1/4, 1/4)$, respectivamente. Por lo tanto

… $H(X)+H(Y)-H(X,Y) = H(1/3)+H(1/2,1/4,1/4)-H(1/2,1/4,1/6,1/12) = 3/4H(1/3)$.

…de probabilidades conjuntas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

… que el canal es un canal binario con borrado 1/4. Su capacidad es 3/4 bits/símbolo.

… 2 (1 punto). Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se …ansmitir fielmente a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 0{,}2$. …n las longitudes de los códigos ideales de fuente y de canal?

…$_2(X) = \log_2 48 = 3\log_2 3$. $L_c = 1/C = 1/(1 - H_2(0{,}2))$.

… 3 (1 punto). Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que …a la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente …r tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,6 bits, y el otro un canal ternario …ad 0,9 unidades de información ternarias. Si el primero de los canales tiene un régimen de …n de 1000 símbolos por segundo y el segundo de 500 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo …cesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente …

$$T = \frac{nH(X)}{v_1C_1 + v_2C_2} = \frac{n}{1000 \cdot 0{,}6 + 500 \cdot \log_2 0{,}9} \text{ segundos.}$$

… 4 (1 punto). El conjunto $\{0, 10, 110, 111\}$ es un código binario compacto para la fuente …bilidades $\{1/2, 3/8, 1/16, 1/16\}$, con una eficiencia del 94,2 %. El codificador de fuente puede … como una fuente binaria sin memoria. ¿Cuál es la probabilidad de que emita un 0? Tiene …as de calcularlo.

…erdo con la teoría, la salida del codificador de fuente tiene entropía $H_2(Y) = H(p) = \eta$, … eficiencia del código. Así pues, $p = H^{-1}(\eta)$ de donde $p \approx 0{,}64$ (resuelva esta ecuación por …rror). Observe que, en el código propuesto, la proporción de ceros es mayor que la de unos, …o 15/26 frente a 11/26. Sin embargo, $H_2(15/26) \neq \eta$. ¿Puede explicarlo?

… 5 (1,5 puntos). El subcódigo par $\mathcal{H}_{r,e}$ de un código Hamming binario $\mathcal{H}_r$ es la colección …s de $\mathcal{H}_r$ que tienen peso par.

…parámetros de $\mathcal{H}_{r,e}$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 2, 4]$. Explique estos números.

…código corrige únicamente errores simples y dobles. ¿Cuántos de cada tipo?

parámetros de $\mathcal{H}_r$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 1, 4]$. $\mathcal{H}_{r,c}$ tiene la misma longitud y dimensión una lad mayor (consta de la mitad de las palabras de $\mathcal{H}_r$). Tiene distancia 4 porque $\mathcal{H}_r$ contiene .bra de peso 4, pero no de peso 2.

rige todos los errores simples, $2^r - 1$. El resto de los $2^{r+1} - 1$ errores corregibles son dobles, ecir, 2^r.

ı **6 (1,5 puntos)**. Para el código $[63, 57]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^5 + x^2 + 1)$,

ifique sistemáticamente el mensaje x.

e el polinomio $x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ el decodificador estima la palabra del código $(x^2 + x + 1)g(x)$. correcto? El código tiene distancia 4.

codificación sistemática es

$$x^7 - x^7 \mod g(x) = x^7 + x^5 + x^4 + 1.$$

$x^2 + x + 1)g(x) = x^8 + x^3 + x^2 + 1$ que sólo dista en un término (x^7) del vector recibido.

7 (1 punto). Calcule la expresión de la cadencia eficaz para una estrategia convencional de espera si en el canal de retorno los asentimientos se pierden con probabilidad q.

ema es estocásticamente idéntico a uno en donde no hay errores ni pérdidas en el canal de las tramas de datos se se transmiten correctamente con probabilidad

$$1 - p'_t = (1 - p_t)(1 - q)$$

es la probabilidad de error o pérdida de una trama de datos en el sistema original. En estas es, la cadencia eficaz es

$$C_{\text{ef}} = (1 - p_t)(1 - q)\frac{n}{n + m + T_{\text{as}}C}C$$

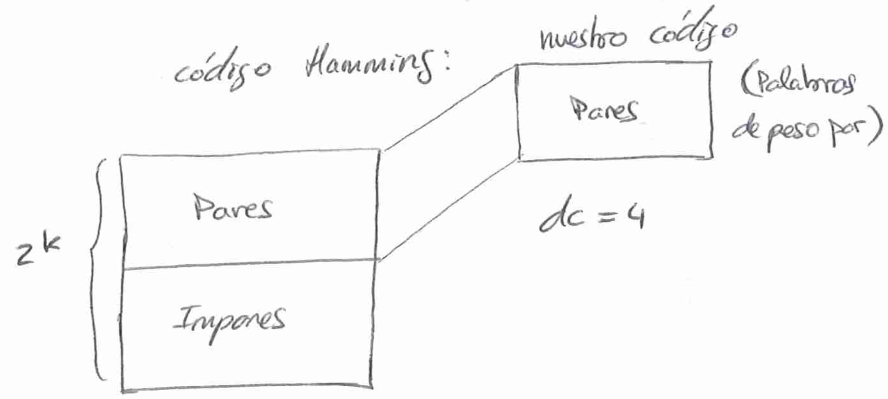
ación habitual.

8 (1 punto). ¿Por qué existe un tamaño mínimo para la longitud de las tramas en Ethernet?

nisores sólo escuchan el canal mientras dura la transmisión. Si las tramas son muy cortas, ejar de escuchar antes de que la señal de colisión les llegue.

n 23 de mayo de 2014

n 5 $\quad H_r, e$



código era 3 pero al coger las palabras código pares $dc \geq 4$.

n nuestro código es $dc = 4$. Por ejemplo:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$) \leq \left[\frac{dc-1}{2} \right] = \left[\frac{4-1}{2} \right] = 1$$

$dc = 4 \Rightarrow$ los errores simples son todos corregibles.

$$\boxed{= n = 2^r - 1}$$

$$n = 2^r - 1$$

$$k = 2^r - r - 2$$

síndromes:

$$n - k = \cancel{2^r} - 1 - \cancel{2^r} + r + 2 = r + 1$$

	nº
$n-k$	1
	n
	$2^{n-k} - n - 1$

dobles: $2^{n-k} - n - 1 = 2^{r+1} - 2^r + 1 - 1$

$$= 2^{r+1} - 2^6 = 2^r \cdot 2 - 2^r =$$

$$= 2^r(2-1) = 2^r$$

6.

$C(63,57)$

$g(x) = (x-1)(x^5+x^2+1)$

$u(x) = x$ $\qquad$ $x(x) = x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$

6 (grado $g(x)$) $\qquad$ $r(x) = x^{n-k} \cdot u(x) \bmod g(x)$

$x^6 \cdot x + r(x) = ⊛$

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 & x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \\
\hline
x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+x & x+1 \\
-x^6-x^4-x^3-x^2-x & \\
-x^6-x^5-x^3-x^2-x-1 & \\
\hline
+x^5-x^4+1 &
\end{array}
$$

o . redundancia.

$\boxed{\ldots +x^4+1}$

$r(x) = x^5+x^4+1$

(da igual positivo o negativo)

$\ldots + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ $\qquad$ pc: $(x^2+x+1)\, g(x)$ ¿Es correcto?

$\ldots(x) \rightarrow \boxed{\text{Canal}} \rightarrow y(x) = x^8+x^7+x^3+x^2+1$

$\uparrow$ $e(x)$

$= (x^2+x+1) \cdot g(x)$

$y(x) \cdot \bmod g(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^8+x^7+x^3+x^2+1 & x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \\
\hline
x^8+x^7+x^5+x^4+x^3+x^2 & x^2 \\
\hline
-x^5-x^4+1 &
\end{array}
$$

$s(x) = x^5+x^4+1$

... no es un error corregible por lo tanto el error estimado no ...e. Tenemos que buscar la palabra código obtenida como sumas ... desplazadas de $g(x)$ lo más parecidas posibles a $y(x)$.

...001101 : $y(x)$

...101111 : $g(x)$

$0\,1\,1\,1\,1 : g(x)$

$1\,1\,1\,1 \quad : x \cdot g(x)$

$1\,0\,0\,0\,1$

$1\,1\,1 \quad : x^2 g(x)$

$0\,1\,1\,0\,1 = (1+x+x^2)\cdot g(x)$

$(1+x+x^2)\, g(x) = y(x) + x^7$

utilizando versiones desplazadas de g(x) pretendemos que la p.c solo se diferencie en un bit. Ese será el error. (Busco la que más se parece a la recibida)

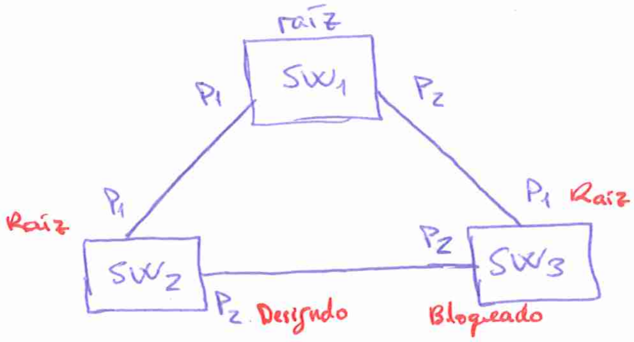
$P_H(e) \leq \left[\frac{dc-1}{2} \right] = 1$

$est(x) = x^7$. Sí que es corregible.

Está bien. Puesto que el error estimado es uno simple y los simples los corrige todos.

esquema de la figura:

...ona el estado de los puertos una vez ejecutado STP.



...raíz (menor ID)

...tos del sw raíz son designados

...ir en los otros sw el puerto raíz.

...a el resto de puertos estarán bloqueados en el sw de mayor ID.

...busca el camino único, no el más corto

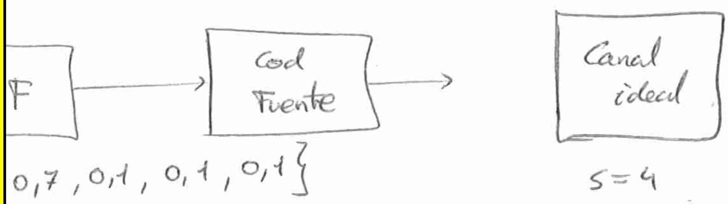
Examen 7 noviembre 2014

...go óptimo si $\log_s \frac{1}{p_i}$ = entero

...mpactan los símbolos fuente con un codificador fuente, la ... por defecto será compacta. Si la eficiencia = 1 será óptimo. ...e se cumpla $\log_s \frac{1}{p_i}$ = entero el código será óptimo.

... que meter un codificador de canal porque el canal no es ...troduce errores.

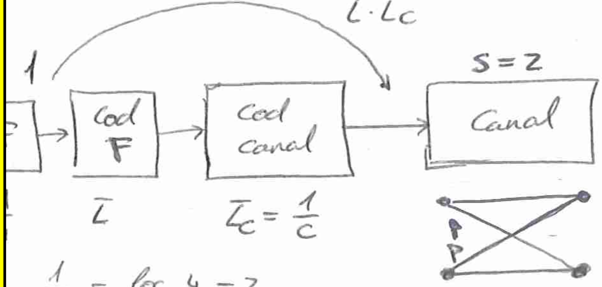
... hay que compactar y se puede compactar hay que meter un ... de fuente.



...al es ideal no hace falta codificador de canal.

...o 1

Este canal no es ideal



$\frac{1}{p_i} = \log_2 4 = 2$

$= H_2(\vec{p}) = \log_2 4 = 2$ bits

$s - H(\text{fila de } Q) = \log_2 2 - H(p) = 1 - H(\frac{1}{4}) = \boxed{0,19 \text{ bits}}$

Porción de símbolos de canal que son de información.

$$\bar{I}\cdot \bar{I}_c = \bar{I}\cdot \frac{1}{c}$$

$\downarrow$

$$\frac{\text{.de inf.}}{\text{fuente}} \times \frac{\text{símbolos de canal}}{\text{símb. de inf.}}$$

2.

...idero los codificadores de fuente y canal ideales para obtener ... máximo de fuentes.

canal

Tasa de entrada de inf $\le$ tasa de tx de inf.

$$N\cdot V_f\cdot H(x) \le C_1 V_{c1} + C_2 V_{c2} + \dots$$

$\uparrow$ bits $\quad \uparrow$ bits $\quad \uparrow$ bits

$$\boxed{\cdot H(x_i) \le C_1\cdot V_{c1} + C\cdot V_{c2}}$$

$\rightarrow$ Cuando tenemos varias fuentes y varios canales el th. de Shannon se convierte en esto.

$$\frac{1}{i}\cdot i \le C_1\cdot V_{c1} + C_2\cdot V_{c2}$$

$$n \le 0{,}5\cdot 100 + 1{,}5\cdot 50$$

$$\boxed{n \le 125}$$

$$C_2 = \frac{3}{4}\, C_{ideal} = \frac{3}{4}\ \text{u. cuaternarias} = \frac{3/4}{\log_4 2} = 1{,}5 \text{ bits}$$

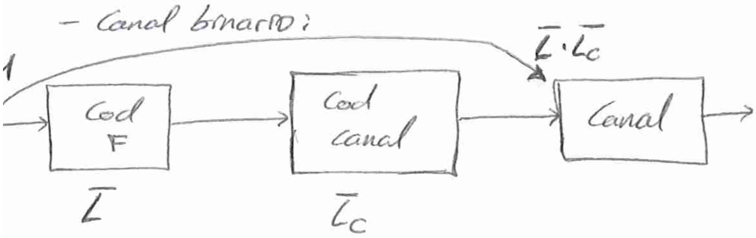
$\Downarrow$

Este dato no me dice nada

De cada 4 bits del canal 3 son de información

...te de transmisión:

- Canal binario:



$\bar{I} = H(x)$

$$k \cdot \frac{H_2(x)}{c} = k \cdot \frac{H_2(x)}{0,5} = 2 \cdot k \cdot H_2(x)$$

- Canal cuaternario:

$$= 2k \cdot \frac{H_2(x)}{C_2} = 2k \frac{H_2(x)}{1,5}$$

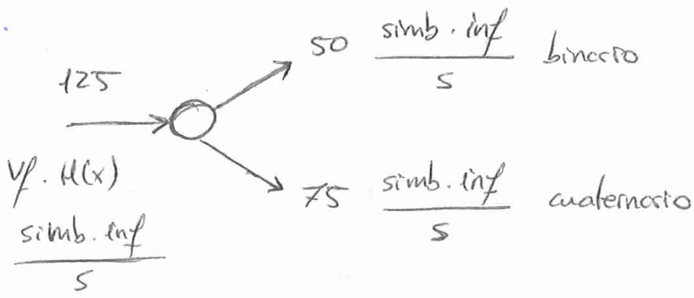
Por tanto la opción más barata es el canal cuaternario

$$\boxed{2k\, H_2(x) > 2k \frac{H_2(x)}{1,5}}$$

...se usan los dos canales simultaneamente calcula el coste medio
...ón de cada símbolo fuente.

$C_2 = 1,5$

$V_2 = 50$



G.V

...e transmisión:

El coste medio: $coste_b \cdot P_b + coste_c \cdot P_c$

$$P_b = \frac{50}{125}$$

$$P_c = \frac{75}{125}$$

parámetros de canal

...d

...ad de canal

idadeVigo

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA TELEMÁTICA

Examen de Comunicación de Datos

7 de noviembre de 2014

ore: ______________________________ DNI: ______________

1. (2 puntos). Los mensajes de una fuente cuaternaria uniforme se transmiten a través
l binario simétrico con probabilidad de error $p = 1/4$. Si se desea una transmisión fiable y
esponda razonadamente a las siguientes cuestiones:

den comprimir los mensajes de la fuente?

esario un codificador de fuente? ¿Y un codificador de canal?

acción de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes?

os bits serán necesarios, en media, para transmitir un símbolo de la fuente?

fuente es uniforme.

de que la fuente es incompresible, es necesario un codificador de fuente para representar sus
s utilizando los símbolos del alfabeto de canal. También es necesario un codificador de canal
rantizar la fiabilidad puesto que el canal no es ideal e introduce errores.

$1 - (\log_2(2) - H_2(1/4)) = 1 - 0{,}19 = 0{,}81.$

$H(X)/C = \log_2(4)/0{,}19 = 10{,}5$ bits/símbolo.

2. (2 puntos). Se tienen n fuentes discretas independientes X_i, $i = 1, \ldots, n$, con entropía
bits y regímenes de emisión $v_i = 1/i$ símbolos por unidad de tiempo. Sus símbolos se deben
de forma fiable y eficiente usando simultáneamente dos canales. Uno de ellos es un canal
capacidad 0, 5 bits y régimen de transmisión 100 símbolos por unidad de tiempo. El otro es
aternario de capacidad 3/4 la del ideal y régimen de transmisión 50 símbolos por unidad de

s fuentes podrían multiplexarse como máximo?

ndo que la transmisión de un símbolo por el canal cuaternario cuesta el doble que por el canal
¿cuál de las siguientes opciones de transmisión nos resultaría más rentable económicamente si
diferente el tiempo de transmisión: usar exclusivamente el canal binario, usar exclusivamente
cuaternario o usar simultáneamente ambos canales?

$H(X_i) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot 1/i = n \leq v_{c1}C_1 + v_{c2}C_2 = 100 \cdot 1/2 + 50 \cdot 3/4 \cdot \log_2(4) = 125.$

enviar un símbolo de fuente por el canal binario: $k \cdot H(X)/C_1 = 2kH_2(X)$.
enviar un símbolo de fuente por el canal cuaternario: $2k \cdot H(X)/C_2 = 4/3kH_2(X)$.
an ambos canales, el coste medio será un valor comprendido entre los dos anteriores. Por
opción más económica es la de usar exclusivamente el canal cuaternario.

3. (2 puntos). Se denomina código t-perfecto aquél capaz de corregir errores de peso
$_H(\vec{e}) \leq t$ y únicamente estos. Asumimos que tenemos un código $C(23, k)$ 3-perfecto.

rá el valor de la redundancia?

la probabilidad de recibir un mensaje con errores si se transmite sobre un canal binario
cuya probabilidad de error de bit es de 10^{-4}? ¿Cuál es la probabilidad de no poder corregir
je (es suficiente obtener un valor numérico aproximado)?

de redundancia.

bir un mensaje con errores] $= 2,3 \cdot 10^{-3}$.
›oder corregir un error] $\approx 8.84 \cdot 10^{-13}$.

4. (0,5 puntos). Dado un código Hamming H_4, especifique su matriz de comprobación de . ¿Cuántos errores de peso Hamming 2 son corregibles? Justifique la respuesta.

riz estará formada por 15 columnas de vectores de dimensión 4 (todos los posibles menos el ı cualquier orden). No corrige ningún error de peso 2.

5. (1,5 puntos). Considere el código lineal binario $\mathcal{C}$ con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix}$$

I_4 es la matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario $[15, 11]$.

la longitud, la dimensión y la distancia de $\mathcal{C}$.

tre que $\mathcal{C}$ sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?

ibución de pesos del código Hamming es $A_0 = A_{15} = 1$, $A_3 = A_{12} = 35$, $A_4 = A_{11} = 105$, $_{10} = 168$, $A_6 = A_9 = 280$, $A_7 = A_8 = 435$. La distribución de pesos de $\mathcal{C}$ viene dada por la $B_i = \sum_{j=0}^{i} A_j A_{i-j}$. Calcule el número de palabras de peso mínimo de $\mathcal{C}$.

, 3).

›res dobles.

).

6. (1 punto). La factorización en polinomios irreducibles de $x^7 - 1$ es

$$x^7 - 1 = f_0(x) f_1(x) f_2(x)$$

$= (x-1)$, $f_1(x) = (x^3+x+1)$, $f_2(x) = (x^3+x^2+1)$ y $f_1(x)$ primitivo. Indique razonadamente de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

$f_0(x)f_1(x)$ genera un código cíclico $\mathcal{C}_1[7,3]$ de distancia 4.

otro código cíclico generado por $g_2(x) = f_1(x)$ de la misma longitud que $\mathcal{C}_1$, se cumple que

rdadera.

$g_1(x)$ es un polinomio mónico de grado 4 que divide a $x^7 - 1$. Luego es generador de un código cíclico con $n = 7$, $k = 3$ y $n - k = 4$.

$d \geq 2$ por ser un código cíclico. d par porque $(x-1)|g_1(x)$ y $d \neq 2$ porque $n \leq 2^s - 1$ $(n = 7 = 2^3 - 1)$, con $s = 3$ el grado del polinomio primitivo $f_1(x)$ que es factor de $g_1(x)$. Como el peso de $g_1(x)$ es 4, se concluye que $d = 4$.

lsa. $g_2(x)$ tiene peso 3 y $\mathcal{C}_1$ sólo contiene palabras de peso par. Luego $\mathcal{C}_2 \not\subset \mathcal{C}_1$.

7. (1 punto). El polinomio $g(x) = (x-1)(x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ código cíclico $[32767, 32751]$ y todos sus factores son primitivos.

e las propiedades de detección de errores que conozca para este código. **(0,5 puntos)**

ie sistemáticamente el mensaje x. **(0,25 puntos)**

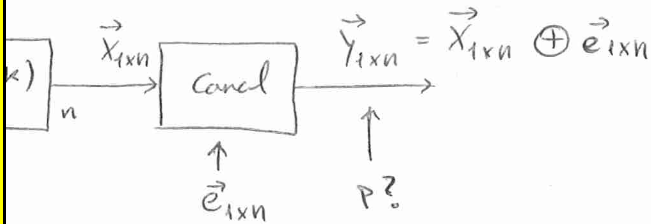
3. $C(23,k)$, 3-perfecto

¿Cuál será el valor de la redundancia?

$= \log_2 2^{n-k} = \log_2 2048 = 11$ bits de redundancia

$P_H(\vec{e})$	
0	1
1	$n = 23$
2	$\binom{n}{2} = \binom{23}{2} = 230 + 23 = 251$
3	$\binom{n}{3} = \binom{23}{3} = 1771$

...babilidad de recibir mensaje con fallos:



Si $Y_{1\times n} = X_{1\times n} \Rightarrow$ Mensaje llega sin fallos y esto es posible si no falla ninguno de los bits.

... el mensaje) $= 1 - p$ (no tenga fallos) $= 1 - p$ (no falle ninguno de sus bits) $=$

$)^n = 1-(1-p)^{23} = 1-(1-10^{-4})^{23}$

...idad de no poder corregir el mensaje?

... corregir el mensaje) $= 1 - p$ (poder corregir el mensaje) $=$

$n°$ $= 1 - p$(error producido esté en la tabla de síndromes) $=$

$n = 23$ $= 1 - \left[23 \cdot (1-p)^{n-1} + \binom{23}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \binom{23}{3} p^3 (1-p)^{n-3}\right] =$

$\simeq 23 = n$

$$H = \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix}$$

...ero de palabras de peso mínimo de C. $\quad d_C = 3$

$$\sum_{j=0}^{i} A_j \cdot A_{i-j}$$

$$B_3 = A_0 \cdot A_{3-0} + \cancel{A_1 \cdot A_{3-1}}^{0} + \cancel{A_2 \cdot A_{3-2}}^{0} + A_3 \cdot A_{3-3} =$$

$$= A_0 \cdot A_3 + A_3 \cdot A_0 = 1 \cdot 35 + 35 \cdot 1 = 70$$

$g(x) = f_0(x) \cdot f_1(x) = (x-1)(x^3+x+1) \qquad C(7,3) \qquad d_C = 4$

$g(x)$ es factor de x^n+1

- $(x-1)$: debe dividir a x^7+1 → Sí, $(x+1)$ divide a todo x^n+1
- x^3+x+1: idem → Por se primitivo es factor de

$$x^{n'}+1 = x^7+1$$
$$n' = 2^r - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

...$(x)) = n - k = 4 \qquad \boxed{k = 3}$

...opiedades detectoras:

...≥ 2 Porque los detectan. No los corrigen.

...$x)$ P_H par ⇒ todas las p.c son de P_H par.

⇓

d_C es par.

⇒ $d_C \geq 4$

...$x) = f(x)$

... $= n \leq 2^r - 1 = 2^3 - 1 = 7$

detecta dobles

...$)(x^3+x+1) = \boxed{x^4+x^3+x^2+1}$