VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

- *VALORES Y VECTORES PROPIOS*
- *MATRICES CUADRADAS DIAGONALIZABLES*
- *DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL DE MATRICES CUADRADAS SIMÉTRICAS*

Los valores y vectores propios pertenecen a los temas de mayor utilidad del álgebra lineal. Se usan en varias áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica,etc. De hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado.

Puede parecer muy extraño, pero los valores propios de las matrices aparecieron publicados antes que las matrices. Esto se debe al hecho insólito de que, parafraseando a Cailey, la teoría de las matrices estaba bien desarrollada (a través de la teoría de los determinantes) antes de que siquiera se definieran las matrices. Según Morris Kline, los valores propios se originaron en el contexto de formas cuadráticas y en la mecánica celeste (el movimiento de los planetas), conociéndose como *raíces características de la ecuación escalar*. Desde aproximadamente 1740, **Euler** usaba de manera implícita los valores propios para describir geométricamente las formas cuadráticas en tres variables.

En la década de 1760, **Lagrange** estudió un sistema de seis ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas (sólo se conocían seis) y de ahí dedujo una ecuación polinomial de sexto grado, cuyas raíces eran los valores propios de una matriz 6×6. En 1820, **Cauchy** se dio cuenta de la importancia de los valores propios para determinar los “ejes principales” de una forma cuadrática con n variables. También aplicó sus descubrimientos a la teoría del movimiento planetario. Fue **Cauchy** quien, en 1840, usó por primera vez los términos *valores característicos* y *ecuación característica* para indicar los valores propios y la ecuación polinomial básica que satisfacen.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nació en París. Fue educado en casa por su padre y no ingresó en la escuela hasta los trece años, aunque pronto empezó a ganar premios académicos. A los dieciséis entró en la École Polytechnique parisina y a los dieciocho asistía a una escuela de ingeniería civil, donde se graduó tres años después. Su primer trabajo fue como ingeniero militar para Napoleón, ayudando a construir las defensas en Cherburgo. A los veinticuatro años volvió a París y dos más tarde demostró una conjetura de Fermat que había superado a Euler y Gauss. Con veintisiete años ya era uno de los matemáticos de mayor prestigio y empezó a trabajar en las funciones de variable compleja, publicando las 300 páginas de esa investigación once años después. En esta época publicó sus trabajos sobre límites, continuidad y sobre la convergencia de las series infinitas.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Matemático y físico francés. En un libro de 1797 él enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Trabajó en el sistema métrico y defendió la base decimal.

Leonhard Euler (1707-1783) Matemático suizo. Los trabajos científicos de Euler abarcan prácticamente todas las matemáticas contemporáneas a él. En todas las ramas de las matemáticas hizo descubrimientos notables, que lo situaron en el primer lugar en el mundo. Euler fue capaz de comprender las matemáticas como un todo único, aunque enorme en el confluían un montón de ramas importantes y ante todo el Análisis. Laplace indicó que Euler fue el maestro común de todos los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVIII. Euler fue en gran medida responsable de los símbolos e, i y π.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Los conceptos básicos estudiados en este tema son útiles en todas las áreas de las matemáticas puras y aplicadas, y aparecen en contextos mucho más generales que los que consideramos aquí.

Una de las principales aplicaciones de la teoría espectral son los sistemas dinámicos discretos (ejemplo introductorio), pero también pueden utilizarse los valores propios para estudiar ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos continuos, además proporcionan información crítica en el diseño de ingeniería y se presentan naturalmente en campos como la física y la química.

★ ***Un escalar*** λ ***se llama valor propio de*** A ***si existe una solución no trivial*** $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ ***de*** $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \lambda \cdot \bar{\mathbf{x}}$ ***; una de esas soluciones no triviales*** $\bar{\mathbf{x}}$ ***se denomina vector propio de*** A ***asociado al valor propio*** λ.

★ ***El conjunto de todos los valores propios de una matriz cuadrada*** A ***se denomina espectro de*** **A** ***y se denota*** σ **(A)**.

*Cierta información útil de los valores propios de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se encuentra codificada en una ecuación escalar llamada **ecuación característica de A**. Este hecho nos va a permitir enunciar un resultado de gran importancia práctica para el **cálculo de los valores propios** de una matriz cuadrada.*

$$\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{x}}=\lambda\cdot\overline{\mathbf{x}} \implies (\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})\cdot\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{0}} \quad (*)$$

Para que λ sea valor propio de la matriz cuadrada A, el sistema homogéneo (*) ha de tener soluciones no triviales, luego el determinante de la matriz cuadrada A– λ · I ha de ser cero.

Polinomio característico de A

$$\mathbf{p}(\lambda)=\mathbf{det}\,(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})$$

$$\boxed{\overbrace{\mathbf{det}\,(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})}=\mathbf{0}}$$

Ecuación característica de A

Los valores propios de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico

SUBESPACIOS PROPIOS

Subespacios propios. Propiedades.-

1.- *Todo vector propio de* A *está asociado a un único valor propio de* A.

2.- $\mathbf{V}(\lambda) = \{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} / \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{x}}\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ *y se denomina* ***subespacio propio asociado a*** **λ**.

3.- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{V}(\lambda_1) \cap \mathbf{V}(\lambda_2) = \{\overline{0}\}$

4.- *Si* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *son valores propios distintos de* A *y* $\overline{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{V}(\lambda_i) - \{\overline{0}\}$ *, entonces:*

$\{\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_m\}$ *es un* ***sistema libre***

¿Cómo calcular los valores propios de una matriz cuadrada?

Los valores propios de una matriz cuadrada A son las raíces de su polinomio característico.

★ *El orden del valor propio* λ *es la multiplicidad* k *de* λ *como raíz del polinomio característico.*

$$\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{det}\left(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I_n}\right)$$

★ *Si* $k = 1$, λ *es un valor propio simple.*

Observación

La suma de los valores propios de una matriz, teniendo en cuenta su multiplicidad, coincide con la traza de la matriz

-EJEMPLO.- ***Calcular los valores propios de A, indicando su orden o multiplicidad:***

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+2) \implies \begin{cases} \lambda_1=1 \quad , \quad k_1=2 \\ \lambda_2=-2 \quad , \quad k_2=1 \quad (\text{v.p. simple}) \end{cases}$$

$$\sigma(\mathbf{A})=\{1,-2\}$$

Espectro de A

Atención

$$\underbrace{1+1+(-2)}_{\text{valores propios de A}}=0=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\text{traza } \mathbf{A}$$

¿Cómo calcular los subespacios propios de una matriz cuadrada?

Para calcular los subespacios propios de una matriz cuadrada A debemos resolver un sistema homogéneo compatible indeterminado.

Si **λ** ***es un valor propio de orden*** **k** ***de una matriz*** **A** ***y*** **d = dim V(λ),** ***entonces:***

$$1 \leq d = \dim V(\lambda) \leq k$$

$$\mathbf{V}(\lambda) = \{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} / \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{x}}\} =$$

$$= \{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} / \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}}_{\text{S.H.C.I.}}\} = \mathbf{V}(\lambda)$$

-EJEMPLO.- ***Calcular los subespacios propios de*** $\mathbf{A}$***, indicando su dimensión:***

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

★ $\lambda_1 = 1 \quad , \quad k_1 = 2$

$$V(\lambda_1) = V(1) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n / A\cdot\overline{x} = 1\cdot\overline{x}\} = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^n / (A - I)\cdot\overline{x} = \overline{0}\}$$

$$(A-I)\cdot\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (x_1, x_2, 0)$$

$$V(1) = \{(x_1, x_2, 0)/x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x_1\cdot(1,0,0) + x_2\cdot(0,1,0)/x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1 = (1,0,0), \overline{u}_2 = (0,1,0)\}\right)$$

$$\mathbf{V(1)} = \mathcal{L}\left(\{\overline{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}), \overline{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})\}\right) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Longrightarrow \quad \mathbf{B_1} = \{\overline{\mathbf{u}}_1, \overline{\mathbf{u}}_2\} \ \ \textbf{s.g. de } \mathbf{V(1)} \\ \overline{\mathbf{u}}_1 \neq \alpha \cdot \overline{\mathbf{u}}_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B_1} \ \textbf{s. libre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{B_1} \ \textbf{base de } \mathbf{V(1)}$$

★ $\lambda_2 = -\mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{k_2} = \mathbf{1}$

$$\mathbf{V}(\lambda_2) = \mathbf{V(-2)} = \{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{2} \cdot \overline{\mathbf{x}}\} = \{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{A} + \mathbf{2I}) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}\}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{2I}) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (\mathbf{x_1}, -\mathbf{2x_1}, \mathbf{3x_1})$$

$$\mathbf{V(-2)} = \{(\mathbf{x_1}, -\mathbf{2x_1}, \mathbf{3x_1}) / \mathbf{x_1} \in \mathbb{R}\} = \{(\mathbf{x_1} \cdot (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3}) / \mathbf{x_1} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\{\overline{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})\}\right) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Longrightarrow \quad \mathbf{B_2} = \{\overline{\mathbf{u}}_3\} \ \ \textbf{s.g. de } \mathbf{V(-2)} \\ \overline{\mathbf{u}}_3 \neq \overline{\mathbf{0}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B_2} \ \textbf{s. libre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{B_2} \ \textbf{base de } \mathbf{V(-2)}$$

OBSERVACIONES.-

1.- *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *tal que:*

valores propios distintos de A: $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_r$

órdenes respectivos: $k_1 , k_2 , \ldots , k_r$

dimensión de los subespacios propios asociados:

$d_i = V(\lambda_i)$ $d_1 , d_2 , \ldots , d_r$

se cumple que:

orden de la matriz

$$r = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{\text{r veces}} \le \underbrace{d_1+d_2+\cdots+d_r}_{\text{nro. máximo de vectores propios l.i.}} \le k_1+k_2+\cdots+k_r \le n$$

nro. valores propios distintos

2.- *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *cumple que:*

$$\mathbf{k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n}$$

el polinomio característico de la matriz A es:

$$\mathbf{p}(\lambda) = \underbrace{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}} \cdot (\lambda - \lambda_{\mathbf{1}})^{\mathbf{k_1}} \cdot (\lambda - \lambda_{\mathbf{2}})^{\mathbf{k_2}} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_{\mathbf{r}})^{\mathbf{k_r}}$$

ATENCIÓN

3.- *Conocido el polinomio característico de una matriz cuadrada se puede calcular fácilmente su determinante:*

$$\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{det}\ (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \underset{\lambda = \mathbf{0}}{\overset{}{=}} \mathbf{det}\ \mathbf{A}$$

Dos matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *son* ***semejantes*** *si:*

$$\exists \mathbf{P} \ \ \textbf{regular} \ / \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$

Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, luego tienen los mismos valores propios con los mismos órdenes de multiplicidad.

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto. Es decir, existen matrices coon el mismo polinomio carácterístico pero que no son semejantes.

MATRICES CUADRADAS DIAGONALIZABLES

En muchos casos la información de vector propio-valor propio contenida dentro de una matriz A se puede mostrar con una útil factorización de la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad , \quad \mathbf{D} \text{ diagonal}$$

Las ideas y métodos aquí explicados nos permiten calcular rápidamente A^k *para valores grandes de k, una idea fundamental en varias aplicaciones del Álgebra Lineal. Además la teoría aquí expuesta se aplica también en las ecuaciones diferenciales. En sistemas dinámicos, en procesos de Markov, en el estudio de curvas y superficies, en la teoría de gráficas y en muchos otros campos.*

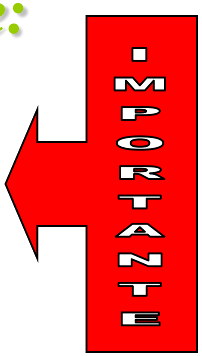
✶ *Una matriz cuadrada* A *se dice* ***diagonalizable*** *si existe una matriz regular* P *que cumple que:*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{D} \text{ diagonal}$$

Es decir, A *es semejante a una matriz diagonal.*

La definición anterior de matriz diagonalizable no resulta demasiado útil en la práctica. Una caracterización muy interesante de matrices diagonalizables es la siguiente:

Una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *es diagonalizable si y sólo si existe una base de* $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ *formada por vectores propios de la matriz* **A.**



Existe un resultado muy cómodo que nos permite justificar de manera muy simple si una matriz cuadrada **A** *es diagonalizable o no:*

A *es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

- $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$
- $d_i = k_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, r$

Las dos condiciones del resultado anterior se pueden resumir en una única condición, obteniendo el siguiente resultado:

A *es diagonalizable si y sólo si :*

★ $d_1 + d_2 + \ldots + d_r = n$

Del resultado anterior se obtiene fácilmente el siguiente corolario:

Una matriz cuadrada* A *de orden* n *con* n *valores propios reales distintos, es diagonalizable.

¿Cómo se diagonaliza una matriz cuadrada A diagonalizable?

$\star \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$

$\star \quad d_i = k_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, r$

1.- *Calcular los valores propios de A indicando sus órdenes.*

2.- *Calcular los subespacios propios $V(\lambda_i)$ y bases B_i de cada subespacio.*

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r = B$$ *base de $\mathbb{R}^n$ formada por v.p. de A.*

3.- *Escribir las matrices D y P tales que:* $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

- ***columnas de P**: vectores de la base B de $\mathbb{R}^n$ formada por v.p. de A encontrada en 2.-* **En orden**
- ***elementos de la diagonal principal de D**: valores propios de A*

$$\underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{k_1} \underbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}_{k_2} \cdots \underbrace{\lambda_r \cdots \lambda_r}_{k_r}$$

En orden

-EJEMPLO.- ***Diagonalizar la matriz cuadrada*** **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

Sabemos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & , \quad k_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 & , \quad k_2 = 1 \quad (\text{v.p. simple}) \end{cases}$$

$$\mathbf{V}(\lambda_1) = \mathbf{V}(1) = \{(a, b, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbf{B}_1 = \{\overline{u}_1 = (1, 0, 0), \overline{u}_2 = (0, 1, 0)\}$$

$$\mathbf{V}(\lambda_2) = \mathbf{V}(-2) = \{(a, -2a, 3a)/a \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbf{B}_2 = \{\overline{u}_3 = (1, -2, 3)\}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

-EJEMPLO.- ***Hallar una matriz regular*** $\mathbf{P}$ ***tal que:***

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{P}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como ya sabemos, el cálculo de las potencias A^k *puede ser bastante tedioso. Sin embargo, si* A *es diagonalizable y hemos calculado* P *y* D*, entonces sabemos que*

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad \text{así que:}$$

$$A^2 = \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

Con lo cual, iterando el proceso llegamos a:

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

Como el cálculo de D^k *equivale a elevar sólo los elementos diagonales de* D *a la k-ésima potencia, vemos que* A^k *es fácil de obtener.*

Si sucede que A *es invertible, entonces* 0 *no es valor propio de* A*. Por consiguiente* D^{-1} *existe y*

$$A^{-1} = \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right)^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$$

DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL DE MATRICES SIMÉTRICAS

Las matrices simétricas surgen en las aplicaciones, de una u otra manera, con mayor frecuencia que cualquier otra clase de matrices. La teoría es hermosa y rica, y depende de manera esencial tanto de la técnica de diagonalización expuesta en este capítulo, como de la ortogonalidad del capítulo anterior.

La diagonalización de una matriz simétrica es el fundamento para el estudio de las formas cuadráticas y se utiliza también en el procesamiento de imágenes.

Teorema espectral.-

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ *matriz simétrica:* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

1.- ***Todos los valores propios de*** $\mathbf{A}$ ***son reales.***

2.- $\lambda_{\mathbf{i}} \neq \lambda_{\mathbf{j}} \implies \mathbf{V}(\lambda_{\mathbf{i}}) \perp \mathbf{V}(\lambda_{\mathbf{j}})$

3.- $\mathbf{A}$ ***es diagonalizable, es decir:***

$$\exists\, \mathbf{P} \ \ \textbf{regular} \ \ / \ \ \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$

4.- $\mathbf{A}$ ***es diagonalizable ortogonalmente, es decir:***

$$\exists\, \mathbf{P} \ \ \textbf{ortogonal} \ \ / \ \ \mathbf{D} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{-1}$$

¿Cómo se diagonaliza ortogonalmente una matriz simétrica?

1.- Calcular los valores propios de A indicando sus órdenes.

2.- Calcular los subespacios propios $V(\lambda_i)$ y bases B_i de cada subespacio. *Recordar que al ser A simétrica es diagonalizable y por tanto:* $d_i = k_i$.

$$\mathbf{B_1} \cup \mathbf{B_2} \cup \cdots \cup \mathbf{B_r} = \mathbf{B}$$ *base de $\mathbb{R}^n$ formada por v.p. de A.*

3.- Ortonormalizamos las bases B_i de 2.- $\mathbf{B}_i^*$

$$\mathbf{B}_1^* \cup \mathbf{B}_2^* \cup \cdots \cup \mathbf{B}_r^* = \mathbf{B}_{ON}$$ *base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por v.p. de A.*

4.- Escribir las matrices D y P tales que: $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$

- <u>*columnas de P*</u>: *vectores de la base B_{ON} de $\mathbb{R}^n$ formada por v.p. de A encontrada en 3.-* **En orden**
- <u>*elementos de la diagonal principal de D*</u>: *valores propios de A* **En orden**

Teorema de la matriz invertible*.-** ***Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces los enunciados que siguen son equivalentes.

1.- **A** ***es una matriz invertible.***

2.- **A** ***es una matriz regular.***

3.- **A** ***es equivalente por filas a la matriz*** I_n***, es decir:*** $A \sim I_n$.

4.- ***Los vectores columna de*** **A** ***son linealmente independientes.***

5.- ***Los vectores columna de*** **A** ***generan*** $\mathbb{R}^n$.

6.- ***Los vectores columna de*** **A** ***forman una base de*** $\mathbb{R}^n$.

7.- ***Los vectores fila de*** **A** ***son linealmente independientes.***

8.- ***Los vectores fila de*** **A** ***generan*** $\mathbb{R}^n$.

9.- ***Los vectores fila de*** **A** ***forman una base de*** $\mathbb{R}^n$.

10.- A^T ***es una matriz invertible.***

11.- ***Existe una matriz*** **B** ***cuadrada de orden*** **n** ***tal que*** $A \cdot B = I_n$.

12.- ***Existe una matriz*** **C** ***cuadrada de orden*** **n** ***tal que*** $C \cdot A = I_n$.

13.- $r(A) = n$.

14.- $\det A \neq 0$.

15.- ***El sistema homógeneo*** $A \cdot x = 0$ ***tiene solamente la solución trivial.***

16.- ***El sistema*** $A \cdot x = b$ ***es siempre compatible determinado y la solución viene dada por:*** $x = A^{-1} \cdot b$.

17.- **0** ***no es valor propio de A.***

VALOR PROPIO

Diagonalización de matrices

VECTOR PROPIO

Interpretación

Espectro

Propiedades

Condiciones de diagonalizabilidad

Polinomio característico

Subespacio propio

Diagonalización de matrices

Resultados interesantes

Diagonalización ortogonal

Metodología para la obtención de valores y vectores propios