Diagonalización de matrices

La utilidad de la diagonalización de matrices se observa en:

Formas cuadráticas

Sistemas dinámicos lineales

Análisis multivariado

En términos generales consiste en obtener una matriz diagonal, D, a partir de una matriz A, de tal manera que D conserve las propiedades de A.

La matriz D se obtiene a partir del estudio de los valores y vectores propios.

Existen matrices que no pueden ser reducidas a una forma diagonal pero sí a otros tipos como son las matrices triangulares y las formas canónicas de Jordan.

Los temas que a partir de acá vamos a desarrollar son:

Valores y vectores propios

Diagonalización de matrices

Diagonalización de matrices simétricas

Matrices triangulares

Formas canónicas de Jordan

Valores y vectores propios

Vamos a recordar primero algunos conceptos

Espacio vectorial: Un conjunto V, no vacío, tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo K (cuerpo de escalares) y lo denotamos por V(K) si se han definido dos leyes de composición:

a) Ley de composición interna (simbolizada por +) $+: VxV \to V$ tal que para cada par de elementos $(x, y) \in VxV$ le hacemos corresponder un elemento de V que escribiremos $x + y$ y sobre el que se verifican la:

Propiedad Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)\ \forall\, x, y, z \in V$

Existencia de Elemento Neutro: $\exists\, 0_V \in V / x + 0_V = x\ \forall\ x \in V$

Existencia de Elemento Simétrico: $\forall x \in V, \exists(-x) / x + (-x) = 0_V$

Propiedad Conmutativa: $x + y = y + x\ \ \forall x, y \in V$

Con estas cuatro propiedades el conjunto V con la Ley de composición $+\ (V,+)$ posee estructura de grupo conmutativo.

b) Ley de composición externa (simbolizada por $\bullet$) $\bullet : KxV \rightarrow V$ tal que para cada par (α, x), $(\alpha \in K)$, $(x \in V)$ le hacemos corresponder un elemento de V que escribiremos αx verificando las siguientes propiedades

Seudo asociativas: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Distributiva respecto de escalares: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Distributiva de vectores: $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Elemento neutro: $\forall x \in V \quad 1x = x$

En general todo elemento de un espacio vectorial se denomina vector. El espacio vectorial más utilizado es el de $\Re^n$. Sea $\Re$ el cuerpo de números reales. El producto cartesiano de $\Re x \Re x \Re x \cdots x \Re$ (n veces) origina $\Re^n$. Un elemento de este conjunto será $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Re^n$ donde $x_i \in \Re^n$.

$\Re^n$ tiene estructura de espacio vectorial si se cumplen:

a) La ley de composición interna $+ : \Re^n x \Re^n \rightarrow \Re^n$, $(x, y) \rightarrow x + y$

b) La ley de composición externa $\bullet : \Re^n x \Re^n \rightarrow \Re^n$,
$\forall \alpha \in \Re \ \forall x \in \Re^n \Rightarrow \alpha = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n) \in \Re^n$

Sea un espacio vectorial *V(K)* de dimensión finita. Sea *f* un endomorfismo[1] sobre *V(K)*

$f : V(K) \rightarrow V(K)$

Diremos que el escalar $\lambda \in K$ es un **valor propio** o autovalor del endomorfismo *f*, si existe al menos un vector $v \in V(K)$, $v \neq 0$ tal que:

$$fv = \lambda v \qquad 1$$

Si denotamos al endomorfismo *f* por la matriz *A*, 1 es

$$Av = \lambda v \qquad 2$$

Los vectores *v* que verifican 1 o 2 se llaman **autovectores** o vectores propios asociados a λ

La expresión 2 se puede expresar

$$[A - \lambda I]v = 0 \qquad 3$$

3 es un sistema homogéneo, para que tenga solución debemos desarrollar el

$$Det[A - \lambda I] = 0 \qquad 4$$

Al desarrollar el determinante en 4 obtendremos un **polinomio característico**

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

igualando a cero el polinomio tendremos la ecuación característica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

[1] Aplicación lineal del espacio vectorial en sí mismo

La solución de la ecuación característica permite encontrar los valores de λ que hacen que $p(\lambda)=0$. Estos valores de λ son los valores propios que, sustituidos en 3, permiten hallar los vectores propios.

El polinomio $p(\lambda)$ tendrá n raíces (reales o imaginarias) y, por tanto, n valores propios con lo cual el número de autovalores coincide con el orden de la matriz.

Ejemplo

Determinar los valores y vectores propios asociados a la matriz A

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Debemos hallar el $Det[A-\lambda I]$ que dará origen al $p(\lambda)$, a partir del que hallamos las raíces características de las cuales los autovalores que permitirán hallar los autovectores

$$p(\lambda)=(\lambda+a)(\lambda+b)\cdots(\lambda+k)\Rightarrow \lambda=-a,\ \lambda=-b,\cdots\lambda=-k\Rightarrow v_a,v_b,\cdots v_k$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6-\lambda & 10 & -28 \\ -2 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & -7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$Det[A-\lambda I]=(6-\lambda)(-3-\lambda)(-7-\lambda)+40+112-[-28(-3-\lambda)-20(-7-\lambda)+8(6-\lambda)]$$

$$=(-18+3\lambda-6\lambda+\lambda^2)(-7-\lambda)+152-[84+28\lambda+140+20\lambda+48-8\lambda]$$

$$=126+21\lambda-7\lambda^2+18\lambda+3\lambda^2-\lambda^3+152-40\lambda-272$$

$$Det[A-\lambda I]=-\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+6 \ \Rightarrow \text{ polinomio característico de la matriz A}$$

Igualando a cero el polinomio tenemos la ecuación característica

$-\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+6=0$ multiplicando por -1:

$\lambda^3+4\lambda^2+\lambda-6=0$ para hallar la solución de esta ecuación debo factorizar de modo que

$-\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)$

siendo $\begin{matrix}(\lambda-1)\\(\lambda+2)\\(\lambda+3)\end{matrix}$ raíces características de la matriz A y $\begin{matrix}\lambda=1\\\lambda=-2\\\lambda=-3\end{matrix}$ los valores propios de A.

El orden de la matriz es 3, el número de autovalores es 3.

Cómo hallar los vectores propios?

Debe sustituirse cada valor propio hallado en el sistema 3. Recordemos que 3 era

$[A-\lambda I]v=0$

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 10 & -28 \\ -2 & -3-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & -7-\lambda \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 6-1 & 10 & -28 \\ -2 & -3-1 & 4 \\ 1 & 2 & -7-1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} &5v_1 + 10v_2 - 28v_3 = 0 \\ &-2v_1 - 4v_2 + 4v_3 = 0 \qquad (5) \\ &v_1 + 2v_2 - 8v_3 = 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtengo $v_1 = -2v_2 + 2v_3$ (6)

Reemplazo en la tercera

$$-2v_2 + 2v_3 + 2v_2 - 8v_3 = 0$$

$$-6v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$

Reemplazo este último resultado en 6.

$$v_1 = -2v_2$$

El espacio solución de este sistema será $v_I = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para comprobar si estos son los valores del vector propio deben reemplazar los mismos en el sistema (5). Si se cumple que todas las ecuaciones se anulan al reemplazar los valores de –2, 1 y 0 entonces este es el vector propio que surge del autovalor 1 y será el primer autovector[2].

Para $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 6+2 & 10 & -28 \\ -2 & -3+2 & 4 \\ 1 & 2 & -7+2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

[2] Recuerden que autovalor, valor propio y valor característico son sinónimos. De igual manera lo son autovector, vector propio y vector característico.

$$
\begin{aligned}
&8v_1 + 10v_2 - 28v_3 = 0 \\
&-2v_1 - v_2 + 4v_3 = 0 \qquad (8) \\
&v_1 + 2v_2 - 5v_3 = 0
\end{aligned}
$$

De la tercera ecuación obtengo $v_1 = -2v_2 + 5v_3$ (9)

Reemplazo en la segunda

$$-2(-2v_2 + 5v_3) - v_2 + 4v_3 = 0$$

$$4v_2 - 10v_3 - v_2 + 4v_3 = 0$$

$$3v_2 - 6v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_3 \quad (10)$$

Reemplazando (10) en (9)

$$v_1 = -2(2v_3) + 5v_3$$

$$v_1 = -4v_3 + 5v_3 \Rightarrow v_1 = v_3 \quad (11)$$

El espacio solución de este sistema será $v_{II} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = -3$

$$\begin{bmatrix} 6+3 & 10 & -28 \\ -2 & -3+3 & 4 \\ 1 & 2 & -7+3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$
\begin{aligned}
&9v_1 + 10v_2 - 28v_3 = 0 \\
&-2v_1 + 0v_2 + 4v_3 = 0 \qquad (12) \\
&v_1 + 2v_2 - 4v_3 = 0
\end{aligned}
$$

De la segunda ecuación obtengo $v_1 = 2v_3$ (13)

Reemplazo en la tercera

$$2v_3 + 2v_2 - 4v_3 = 0$$

$$2v_2 - 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \qquad (14)$$

con los resultados de 13 y 14 se construye el tercer vector propio

El espacio solución de este sistema será $v_{III} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Observen que los valores de los vectores propios reemplazados en el sistema que les dio origen, verifican las ecuaciones que componen el mismo.

En resumen, los vectores propios son $v_I = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_{II} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_{III} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Surgidos de los valores propios $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -3$ pertenecientes a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Condición necesaria y suficiente para la diagonalización

Dado un endomorfismo *f* sobre *V* (espacio vectorial de dimensión n), si la matriz que lo representa en una cierta base diagonal, los valores propios son los elementos de su diagonal principal y dicha base está formada por los vectores propios del endomorfismo.

La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por vectores propios del endomorfismo asociado a la matriz dada.

Dado un endomorfismo de *V*, con una matriz asociada A hemos de encontrar

a) Valores propios de A

b) Vectores propios asociados a los valores propios

Para determinar los autovalores de A hemos de calcular las raíces de la ecuación $Det[A - \lambda I] = 0$

Pueden ocurrir dos casos

1) Valores propios con orden de multiplicidad[3] 1. Todos los valores propios son distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \cdots \lambda_n$. De este modo los subespacios de vectores asociados a cada valor propio λ_i son de dimensión 1 y dado que los vectores propios $v_1, v_2, v_3, \cdots v_n$ son independientes formarán una base con lo que la matriz A es diagonalizable.

[3] Orden de multiplicidad es la cantidad de veces que el valor de un valor propio se repite.

En conclusión: Si las raíces características de una matriz A son todas distintas, existe una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D formada por los valores propios de A

2) Valores propios por orden de multiplicidad mayor que 1. Sean los valores propios del endomorfismo *f* sobre un espacio vectorial *V(C)* de cuerpo *C* representado por la matriz A en la base B λ_1 con orden de multiplicidad r_1

λ_2 con orden de multiplicidad r_2

$\vdots \qquad \vdots$

λ_p con orden de multiplicidad r_p

donde $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ (15)

Las dimensiones de los subespacios asociados a cada valor propio (denominado d_j) verifican que $1 \le d_i \le r_i$ (16)

Necesitamos que exista una base formada por vectores propios, para lo cual, y debido a 15 y 16, la condición necesaria y suficiente para que exista es que

$d_i = r_i \quad i = 1,2,\cdots,p$ (17)

es decir, la dimensión del subespacio debe coincidir con el orden de multiplicidad del valor propio. Pero los vectores propios asociados al autovalor A son los que verifican el sistema: $[A - \lambda I]v = 0$ (18)

y es evidente que para que la dimensión del subespacio asociado de vectores propios sea r_i, han de existir r_i parámetros (incógnitas secundarias) en el sistema 18 con lo que

$Rango[A - \lambda I] = n - r_i$ (19)

por lo que concluimos que: La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea diagonalizable, es que para cada valor propio λ_i de orden de multiplicidad r_i se verifica que $Rango[A - \lambda I] = n - r_i \quad i = 1,2,\cdots p$ (20)

Por ejemplo, la matriz

$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ tiene autovalores $\lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 2$. El orden de multiplicidad para el autovalor $\lambda = -1$ es 1. Mientras que, el orden de multiplicidad para el autovalor $\lambda = 2$ es 2 porque existen dos autovalores de igual valor.

Veamos que pasa con el $Rango[M - \lambda I]$ para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$.

Si $\lambda = -1 \Rightarrow M - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ donde el rango es 2 porque $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, es decir, dos columnas de la matriz son linealmente dependientes.

El orden de la matriz (n) $\Rightarrow$ n=3 (porque es una matriz de 3x3)

El orden de multiplicidad en $\lambda = -1$ (r) $\Rightarrow$ r=1 (porque no hay otro autovalor igual a –1)

Entonces n-r=3-1=2

Concluimos que $Rango[A - \lambda I] = n - r_i$

2=2 (21)

Si $\lambda = 2 \Rightarrow M - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ donde el rango es 2 porque la primera y segunda fila de la matriz son iguales, con lo cual son linealmente dependientes.

El orden de la matriz (n) $\Rightarrow$ n=3 (porque es una matriz de 3x3)

El orden de multiplicidad en $\lambda = 2$ (r) $\Rightarrow$ r=2 (porque hay otro autovalor igual a 2)

Entonces n-r=3-2=1

Concluimos que la igualdad $Rango[A - \lambda I] = n - r_i$

no se cumple porque 2≠1 (22)

Este último resultado indica que M no es diagonalizable porque los vectores propios **no** son Linealmente Independientes. Porque al ser $\lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_2 = v_3$, es decir, linealmente dependientes, por lo tanto **no** se cumple que $v_1 \neq v_2 \neq v_3 \cdots v_p$

Si repetimos el procedimiento adoptado para la matriz M en la matriz A, definida al comienzo, veremos que llegamos a la conclusión de que es diagonalizable porque tiene valores propios distintos entre sí que dan origen a vectores propios linealmente independientes.

Diagonalización de una matriz

Dada una matriz A diremos que es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A y D sean semejantes[4].

Cómo obtenemos la matriz diagonal?

[4] A y D son semejantes si existe una matriz C tal que $A = C^{-1}DC$

Dada $A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

Con raíces características $(\lambda - 1), (\lambda + 2), (\lambda + 3)$

Que significan autovalores $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -3$

Que dan origen a los vectores propios $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ linealmente independientes

Por lo tanto la matriz A es diagonalizable. Debemos hallar $D = C^{-1}AC$ donde C es la matriz de vectores propios de A que la diagonaliza.

Dada $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} AdjC$

El determinante de C es igual a –1, esto significa que existe la inversa de la matriz C, por lo que podemos pasar a calcular la adjunta

$$AdjC = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} AdjC = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

El cálculo de la matriz diagonal surge de

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \\ 3 & 6 & -15 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = D$$

La matriz D (matriz diagonal de A) tiene en la diagonal principal los valores propios de la matriz A.

Diagonalización de matrices simétricas

Hay muchas matrices reales A que no son diagonalizables. De hecho algunas de ellas pueden no tener ningún valor propio real. Si A es una matriz real simétrica. Toda raíz λ de su polinomio característico es real. Estos λ dan lugar a vectores propios no nulos y ortogonales, es decir, el producto escalar de los vectores se anula.

De modo que: sea A una matriz real simétrica existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal.

Veamos por ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ que tiene los valores propios $\begin{matrix} \lambda = 6 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$ que dan origen a los vectores propios $v_I = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Los vectores propios de una matriz simétrica son ortogonales, es decir, su producto escalar es cero.

Si normalizamos los vectores propios ortogonales, la matriz diagonal será la formada por los valores propios. Normalizar un vector v consiste en dividir cada elemento del vector por la norma del vector

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v$$

la norma de un vector $\|v\|$ es la raíz cuadrada del cuadrado del vector $\|v\| = \sqrt{vv}$.

Para los dos vectores propios hallados en el ejemplo la norma es $\sqrt{5}$

Al normalizar ambos vectores tenemos

$$\hat{v}_I = \frac{1}{\|v\|} v = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad \hat{v}_{II} = \frac{1}{\|v\|} v = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Los vectores propios ortogonales y normalizados de A forman la matriz P

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

La matriz diagonal de a es aquella que surja de hacer $P^{-1}AP$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde D es la matriz diagonal de A, obtenida a partir de la matriz P. Siendo P la matriz de transformación de A hallada a través de la normalización de sus vectores propios ortogonales.

La diferencia en diagonalizar una matriz A de una simétrica es que a la matriz de vectores propios surgida de una simétrica debemos normalizarlos para obtener una matriz diagonal con elementos iguales a los valores propios.

Suele ocurrir que los valores propios no tienen orden de multiplicidad igual a 1 entonces no tendríamos vectores ortogonales y por ende no habría independencia lineal entre los vectores propios y no podríamos obtener la diagonal.

Ante esta situación, valores propios con orden de multiplicidad mayor que 1, se utiliza el método de Gram-Schmidt para el cual: si A es simétrica y de elementos reales, con $u_1, u_2, \cdots u_k$ vectores propios asociados al mismo valor propio λ de la matriz A. Los vectores $u_i^* = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \cdots + a_{i-1} u_{i-1}^* + u_k \quad i = 1,2,\cdots k$ son vectores propios de A asociados al mismo valor propio.

El método de Gram-Schmidt consiste en exigir a los coeficientes $a_1, a_2, \cdots a_{k-1}$ que sean tales que u_2^* sea ortogonal a u_1^*

u_3^* sea ortogonal a u_1^* y u_2^*

y así sucesivamente

Por ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ tiene los valores propios $\begin{matrix} \lambda_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 2 \\ \lambda_2 = 12 \Rightarrow r_2 = 1 \end{matrix}$

Para $\lambda = 6$

$$[A - \lambda I]v = [A - 6I]v = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} & v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ & -2v_1 + 4v_2 - 2v_3 = 0 \\ & v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtengo $v_1 = 2v_2 - v_3$ (6)

Reemplazando este resultado en las otras dos ecuaciones se comprueba que se cumple la igualdad de las ecuaciones por lo tanto esta es la única relación posible que soluciona el sistema, de modo que el espacio solución será

$$v_I = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ para cualquier valor de } \alpha, \beta$$

De aquí obtenemos dos vectores propios haciendo

$$\alpha=1,\beta=0\Rightarrow v_I=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \text{ y luego } \alpha=0,\beta=1\Rightarrow v_{II}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Estos dos vectores resuelven el sistema pero **no** son ortogonales dado que su producto escalar no se anula.

Aplicando el método de Gram-Schmidt vamos a determinar a partir de v_I, v_{II} otros dos vectores propios u_1^* y u_2^* que sean perpendiculares entre sí. Para ello se establece

$u_1^* = v_I$

$$u_2^* = au_1^* + v_{II} = av_I + v_{II} = a\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a-1\\a\\1\end{bmatrix}$$

Imponiendo la condición de que u_2^* sea perpendicular a u_1^* ($u_2^*\perp u_1^*$) su producto escalar debe ser cero, por lo que

$$u_2^*\perp u_1^* = \begin{bmatrix}2a-1 & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 2(2a-1)+a+0 = 4a-2+a=0\Rightarrow 5a-2=0\Rightarrow a=2/5$$

De modo que si $u_2^* = \begin{bmatrix}2a-1\\a\\1\end{bmatrix}$ reemplazando a=2/5 $\Rightarrow u_2^* = \begin{bmatrix}-1/5\\2/5\\1\end{bmatrix}$

Para verificar que $u_2^*\perp u_1^*$ basta con realizar el producto escalar

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = -\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+0=0$$

Con lo que concluimos que u_1^* y u_2^* son ortogonales. Para poder hallar una base ortonormal debemos normalizarlos haciendo

$$\hat{u}_2^* = \frac{1}{\|u_2^*\|}u_2^*$$

La norma de $\hat{u}_2^*$ será

$$\|u_2^*\| = \sqrt{u_2^* u_2^*} = \sqrt{(1/5)^2+(2/5)^2+1^2} = \sqrt{1/25+4/25+1} = \sqrt{30/25} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

Por lo tanto $\hat{u}_2^* = \frac{1}{\|u_2^*\|}u_2^* = \frac{1}{\sqrt{30/5}}\begin{bmatrix}-1/5\\2/5\\1\end{bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1/5\\2/5\\1\end{bmatrix}$

$$\hat{u}_1^* = \frac{1}{\|u_1^*\|}u_1^*\,, \quad \|u_1^*\| = \sqrt{u_1^* u_1^*} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}\,, \quad \hat{u}_1^* = \frac{1}{\|u_1^*\|}u_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores propios ortogonales normalizados son: $\hat{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\hat{u}_2^* = \frac{5}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

El tercer vector lo obtenemos directamente porque el orden de multiplicidad del autovalor 12 es 1, tendremos

$$[A - \lambda I]v = [A - 12I]v = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$-5v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$$
$$-2v_1 - 2v_2 - 2v_3 = 0$$
$$v_1 - 2v_2 - 5v_3 = 0$$

De la tercera ecuación obtengo $v_1 = 2v_2 + 5v_3$ (6)

Reemplazando este resultado en la segunda ecuación

$$-2(2v_2 + 5v_3) - 2v_2 - 2v_3 = 0$$
$$-6v_2 - 12v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_3$$

Reemplazando este último resultado en (6) $v_1 = 2(-2v_3) + 5v_3 \Rightarrow v_1 = v_3$

El vector propio asociado al autovalor 12 será $v_{III} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

El tercer vector propio es ortogonal pero es necesario que también sea normal por lo que

$\hat{v}_{III} = \frac{v_{III}}{\|v_{III}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, siendo $\|v_{III}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

La base ortonormal será la formada por los vectores

$$\hat{u}_1^*, \hat{u}_2^*, v_{III} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

Sea *U(K)* un espacio vectorial y *f* un endomorfismo representado por la matriz A en la base canónica de dicho espacio vectorial.

Puede ocurrir que la matriz A no tenga una base de vectores propios por lo tanto no es semejante a una matriz diagonal pero puede serlo a una forma canónica de Jordan que puede considerarse casi como una diagonal.

Entre la matriz diagonal y la forma canónica de Jordan se sitúa otro tipo de matrices que son las triangulares.

Matrices Triangulares

Sea *U(K)* y A la matriz de un endomorfismo en dicho espacio vectorial. A es semejante a una matriz triangular sí y solo si posee autovalores en K. Para obtener una matriz triangular se parte de una matriz de orden n de la cual se obtienen sucesivas matrices A de orden n-1, n-2... que permiten obtener la matriz de paso P tal que $T = P^{-1}AP$.

Cómo hacemos? Hallamos el polinomio característico de la matriz A y los autovalores que lo anulan. Encontramos 1 vector propio con el que armamos una matriz $P_1 = [v_I \quad I]$ de modo que $P_1^{-1}A_nP_1 = \begin{matrix} \lambda & b \\ 0 & A_1 \end{matrix}$

Luego pasamos a trabajar con A_1, obtenemos un valor propio y un vector propio asociado a ella entonces P_2 se arma con el vector propio y cualquier otro número de modo que tenga inversa tal que $P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & b_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$

Luego se considera A_2 y se repite la operación pero con un orden menor

La matriz P se determina haciendo

$$P = P_1 x \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & P_4 \end{bmatrix} \cdots$$

La matriz triangular buscada será $T = P^{-1}AP$

Retomemos la matriz M para la cual habíamos hallado valores propios –1 y 2, siendo el autovalor 2 con orden de multiplicidad 2.

Para $\lambda = 2$, construyamos una matriz P_1 tal que su primer vector sea el vector propio asociado a $\lambda = 2$ de la matriz M

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1}MP_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & b_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Tomando $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ buscamos los valores y vectores propios que la caracterizan. Con el vector propio $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ armamos la matriz $P_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ de modo que

$$P_2^{-1}A_1P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & b_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Ahora estamos en condiciones de calcular P

$$P = P_1 x \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz triangular $T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

T es una matriz triangular superior que tiene en la diagonal principal los valores propios de la matriz M y, por encima de la diagonal principal, cualquier valor real.

Forma Canónica de Jordan

Una forma canónica de Jordan es una matriz triangular superior tal que

a) todos sus elementos de la diagonal principal son iguales a los valores propios
b) todos sus elementos en la primera sobrediagonal son iguales a 1 o 0
c) todos los demás elementos son iguales a cero

En definitiva debemos contar con una matriz Q tal que $J = Q^{-1}AQ$ donde J se a la matriz diagonal en forma canónica de Jordan.

Cuando podemos tener una forma canónica de Jordan?

Cuando tenemos autovalores con orden de multiplicidad mayor que 1 para lo cual es necesario calcular, a partir de un autovalor, un vector propio haciendo $Av_{r1} = \lambda_r v_{r1}$

Luego para el mismo autovalor calcular el siguiente vector haciendo $Av_{rj} = \lambda_r v_{rj} + v_{rj-1}$ donde v_{rj} es el vector propio que forma parte de la matriz Q

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

El polinomio característico $|A - \lambda I| = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 32 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda - 4)$

Para $\lambda = -2$ el vector característico se obtiene de hacer

$$[A - \lambda I]v = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 7v_1 + 4v_2 + 3v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \end{array}$$

De la tercera ecuación obtenemos $v_1 = 2v_2 - 3v_3$

Reemplazando en 1 $7(2v_2 - 3v_3) + 4v_2 + 3v_3 = 0$

$$14v_2 - 21v_3 + 4v_2 + 3v_3 = 0$$

$$v_2 = v_3 \Rightarrow v_1 = -v_2$$

El vector propio asociado es $v_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = 4$ el vector característico se obtiene de hacer

$$[A - \lambda I]v = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} v_1 + 4v_2 + 3v_3 = 0 \\ -v_1 - 4v_2 - 3v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 - 3v_3 = 0 \end{array}$$

De la tercera ecuación obtenemos $v_1 = 2v_2 + 3v_3$

Reemplazando en 2 $-(2v_2 + 3v_3) - 4v_2 - 3v_3 = 0$

$-6v_2 - 6v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_3$ con lo cual $v_1 = v_3$

El vector propio asociado es $v_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

El $\lambda = 4$ tiene asociado dos vectores propios. Uno de ellos es v_{21}, el otro (v_{22}) surge de hacer $Av_{22} - \lambda_2 v_{22} = v_{21}$

$$[A-\lambda I]v_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 + 4v_2 + 3v_3 &= 1 \\ -v_1 - 4v_2 - 3v_3 &= -1 \\ v_1 - 2v_2 - 3v_3 &= 1 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se obtiene $v_1 = 2v_2 + 3v_3 + 1$

En 1 $2v_2 + 3v_3 + 1 + 4v_2 + 3v_3 = 1$

$$v_2 = -v_3 \Rightarrow v_1 = v_3 + 1$$

Esto da lugar al vector propio $v_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ahora estamos en condiciones de armar la matriz Q de vectores propios

$$Q = [v_{11} v_{21} v_{22}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos la inversa $Q^{-1} = \dfrac{Adj(Q)}{|Q|} = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$J = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ que tiene en su diagonal principal los valores propios de la matriz A, en la sobrediagonal 0 o 1 de acuerdo a si es un bloque o no y ceros los demás elementos.

Para constituir un bloque de Jordan debemos tener:

a) en la diagonal principal el mismo valor propio
b) en la sobrediagonal todos los elementos iguales a 1
c) todos los demás elementos iguales a cero

En la matriz del ejemplo tenemos dos bloques: uno es el formado por el elemento 2, el otro bloque es la submatriz de orden 2 que tiene en la diagonal principal el autovalor 4 y en la sobrediagonal el 1. En general, toda matriz de Jordan se particiona en bloques, denominados bloques de Jordan.