3.- (*) Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

4.- Sea $a>1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n=\sqrt{a\cdot a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por $a_{n+1}=\sqrt{2\,a_n+3}$, sabiendo que a_1 es un número mayor que $-\frac{3}{2}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1\geq 3$ y $a_1<3$.

6.- Sea $a_1=1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a) $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$, (b) $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$, (c) $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$, (d) $a_{n+1}=1+\frac{1}{2}a_n$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1=a>0$ y $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

9.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+2)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

10.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n a_n$ es convergente.

11.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^k}{3^k\,k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k\,\log k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

fórmula de Stirling

13.- Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2k}\big).$$

(Esta función juega un papel importante en la teoría de la integral de Riemann).

8.- (*) a) Sean f, g, h funciones tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

demostrar que si $g(0) = h(0)$ y además $g'(0) = h'(0) = 0$ entonces f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.
b) Encontrar un contraejemplo que demuestre que aunque además de lo anterior tengamos $g''(0) = h''(0) = 0$, es posible que $f''(0)$ no exista.

9.- (*) Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que para todo x se cumple $x = f(x)g(x)$. ¿Y si no se pide que sean derivables?

10.- (*)Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

(I) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$

(II) Si $l(x) = m \cdot x + n$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0$, entonces $l(x) = t(x)$.

11.- Hallar el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

12.- (*) Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x+1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

13.- (*) Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número racional mayor que $\sqrt{2}$. Calcular una fórmula para la intersección $(x_1, 0)$ de la tangente a $f(x)$ en x_0 con el eje X y probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante fracciones y explicar esta aproximación geométricamente.

14.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

1.- Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \, \log x, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}, \qquad \lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}.$$

2.- Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Demostrar que f es no decreciente, y utilizar el resultado para probar que $\operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$, y $\operatorname{sen} x > x$ si $x < 0$.

3.- Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

4.- (*)Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

5.- (*) Encontrar justificadamente el valor máximo de la función $F(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$.

6.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

7.- Una empresa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

8.- En un trozo rectangular de cartón de $8\ cm \times 15\ cm$ se han cortado cuatro cuadraditos iguales en cada esquina, de manera que la figura restante se puede doblar para construir una caja sin tapa. Hallar el lado de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

9.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene una o ninguna solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

10.- Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

11.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

12.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

13.- *Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:*

(*a*) $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(*b*) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 7: Polinomios de Taylor.

1.- Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = \log x$ en $a = 1$ (c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $a = 0$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en $a = 0$ (f) $f(x) = \arctan x$ en $a = 0$

(g) $f(x) = x^5$ en $a = 3$ (h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ en $a = 0$ (i) $f(x) = \log(1+x)$ en $a = 0$

(j) $f(x) = 3 + (x-1) + 2\,(x-1)^2 + 5\,(x-1)^3$ en $a = 0$

2.- Calcular los siguientes límites utilizando el polinomio de Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)^4}{(\log(1+x) - x)^6}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{\cos(2\,x) - 1}.$$

3.- Probar que para $x > 0$ se cumple

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

4.- Probar que para $x > 0$ se cumple

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x.$$

5.- Probar que para $x > 0$ se cumple

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

6.- Sea f una función 4 veces derivable en un intervalo alrededor del 0. Supongamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 + 3\,x - 5\,x^2}{x^3} = 0.$$

Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

7.- Usando la función $y = \arctan x$, calcular π con un error menor que 10^{-3}.

8.- Calcular $\cos(1)$ con un error menor que 10^{-3}.

CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 8: la integral de Riemann

1.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\, dx$.

2.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

3.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

4.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

(*a*) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre [a,b]. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(*b*) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c).$$

(*c*) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(*d*) Evaluar $\int_{-a}^a x^7 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$.

5.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1+t^2)\, dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^1 \cos^2 t^2\, dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2\,t^2))\, dt.$$

7.- (*) Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4.$$

8.- Sea $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ x+a & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

15.- (*)

Importante

(*a*) Hallar $\int \tan x\, dx$, $\int \tan^2 x\, dx$. Expresar $\int \tan^n x\, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^8 x\, dx$ y para $\int \tan^7 x\, dx$.

(*b*) Hallar $\int \sec^2 x\, dx$, $\int \sec^3 x\, dx$. Expresar $\int \sec^n x\, dx$ en términos de $\int \sec^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^6 x\, dx$ y para $\int \sec^7 x\, dx$.

16.- (*) Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad (2)\ \int_2^\infty \frac{x}{x^2 - x - 2}\, dx \qquad (3)\ \int_0^1 \log x\, dx \qquad (4)\ \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

$$(5)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\, dx \qquad (7)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \qquad (8)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

18.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1)\ \int_1^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2)\ \int_0^\infty \frac{dx}{2\,x + (x^3+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3)\ \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha\, x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (5)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\, dx \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

19.- (*)

(*a*) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^\alpha\, e^{\beta\, x}\, dx = \frac{1}{\beta}\, x^\alpha\, e^{\beta\, x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1}\, e^{\beta\, x}\, dx, \quad \textit{para} \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

(*b*) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

20.-

(*a*) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.

(*b*) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2+1)$, $g(x) = \frac{1}{2}|x|$.

(*c*) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\, e^{-x}$, $y = x^2\, e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(*d*) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coorde-