Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 1

1 La ecuación de estado de un gas ideal viene dada por la expresión

$$pV = nRT$$

donde p es la presión, V el volumen, n es el número de moles del gas, R es una constante fija ($R = 8,31451$) y T es la temperatura.
a) Para unos valores determinados de p y n, ($p = p_0$, $n = n_0$), representar gráficamente el volumen (en ordenadas) como función de la temperatura (en abcisas) y hallar la expresión de $\frac{dV}{dT}$.
b) Para unos valores determinados de T y n, ($T = T_0$, $n = n_0$), representar gráficamente el volumen (en ordenadas) como función de la presión (en abcisas) y hallar la expresión de $\frac{dV}{dp}$.

2 Hallar la primera derivada de las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{lll}
a) f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 7x - 3 & b) f(y) = (y^3 - 7)^3 & c) f(z) = -\dfrac{2}{z^3} \\
d) V(x) = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} & e) V(t) = \dfrac{at+b}{ct+d} & f) V(u) = \dfrac{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}{u^2/a + u/b + 1/c} \\
g) y(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} & h) T(r) = (r+1)e^{-r} & i) H(s) = s^2 \mathrm{sen}^5 s + s \cos s \\
j) M(x) = x^x & k) K(\alpha) = (e^\alpha + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} & l) J(x) = (x^4 + 1)^{\frac{1}{ln(x)}}
\end{array}
$$

3 Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto indicado:

$$
\begin{array}{ll}
a) f(x) = mx^2 + mx + \dfrac{1}{m}, \quad x = m^2 & b) f(z) = \dfrac{2z^3 + 1}{z^4}, \quad z = -1 \\
c) V(t) = (t-1)^2 e^{t^2+1} + \log(t), \quad t = 2 & d) H(u) = \dfrac{\alpha}{u^2} + \beta u^3 - \beta^6, \quad u = \alpha\beta.
\end{array}
$$

4 Calcular las derivadas que se indican:

$$
\begin{array}{ll}
a) \dfrac{d^4}{dx^4}\left((1-2x)^3\right) & b) \dfrac{d}{dz}\left(z \dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{1}{1+z}\right)\right) \\
c) \dfrac{d}{dy}\left((y^2 + a^2)\dfrac{d}{dy}(y^2 - a^2)\right) & d) \dfrac{d}{du}\left(u \dfrac{d}{du}\left(ue^{-u}\right)\right).
\end{array}
$$

5 Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente las expresiones

$$
\begin{array}{ll}
a) x^2 + y^2 = 9 & b) \mathrm{sen}(y)\cos(x) + \ln(x) = 7y, (x > 0) \\
c) x^3 + \mathrm{sen}(y) - y^2 + 4 = 0 & d) y^2 e^{x^3} + y^3 e^{x^4} = (x^2 + \dfrac{1}{y+1})^{1/2}
\end{array}
$$

6 Para cada uno de los apartados del problema anterior, calcular $\frac{dx}{dy}$ derivando de nuevo implícitamente y comprobar que se obtiene $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$.

7 La ecuacion de estado de un gas imperfecto viene dada por la expresion

$$(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) - nRT = 0$$

donde p, V, n, R y T representan las mismas cantidades físicas que en el ejercicio 1 y a, b son dos constantes que dependen del gas y miden la ímperfeccion' del gas.
a) Comprobar que si $a = b = 0$, entonces el gas es ideal y se recupera la ecuacion de estado de un gas ideal.
b) Comprobar que la ecuacion de estado se puede escribir también como

$$V^3 - n(b + \frac{RT}{p})V^2 + \frac{n^2 a}{p} V - \frac{n^3 ab}{p} = 0$$

c) Considerando la presion p y el número de moles n constantes, calcular $\frac{dV}{dT}$
d) Considerando la temperatura T y el número de moles n constantes, calcular $\frac{dV}{dp}$ y $\frac{dp}{dV}$ y comprobar que $\frac{dV}{dp} \cdot \frac{dp}{dV} = 1$.
e) Vamos a suponer que tenemos $n = 1$, de forma que la ecuacion de estado queda

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT = 0$$

Calcular, $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ y $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$ y comprobar que se obtiene la relacion

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$$

8 Las funciones $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, se llaman seno hiperbólico y coseno hiperbólico, respectivamente:

1. Probar las siguientes identidades hiperbólicas

$$\begin{aligned}
&\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \\
&\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\
&\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y).
\end{aligned}$$

2. Calcula la derivada de las funciones $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ y de la función tangente hiperbólica: $\tanh(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)}$.

3. Hacer un esbozo de las gráficas de $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$. Comprobar que $\operatorname{senh}(x) = -\operatorname{senh}(-x)$ y $\cosh(x) = \cosh(-x)$.

Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 2

1 Hallar los puntos críticos (basta con las abscisas) de las siguientes funciones y usar el criterio de la segunda derivada para decidir, cuando sea posible, si en ellos hay un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión:

$a)f(x) = 2x^3 + 3x^2$ $\quad b)f(z) = 2z^3 - 3z^2 - 12z + 1$ $\quad c)V(y) = 3y^4 + y^3$
$d)V(\alpha) = \alpha e^{-\alpha}$ $\quad e)W(p) = \operatorname{sen}(p)$ $\quad f)T(h) = h\operatorname{sen}(h) + \cos(h)$
$g)K(r) = r\cos(r) - \operatorname{sen}(r)$ $\quad h)g(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

2 Hallar el valor mínimo y el valor máximo de la función dada en el intervalo que se indica y hacer un esbozo de las gráficas correspondientes:

$a)f(x) = x^2 - x^4,\ x \in [0,1]$ $\quad b)H(t) = \dfrac{t}{t^2+1},\ t \in [0,2]$ $\quad c)J(\alpha) = \alpha\ln(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$
$d)K(x) = xe^{-x},\ x \in [0,2]$

3 En un laboratorio se mide n veces cierto parámetro y se obtienen n datos x_1, x_2,.., x_n. Estas medidas se desvían del valor verdadero x por motivos que no somos capaces de controlar (la temperatura, la presión, la fiabilidad de los aparatos de medida,la vista del observador,etc.), por lo que se decide adoptar como x el valor $\bar{x}$ que nos minimice la suma de los cuadrados de las desviaciones de x respecto a los datos (método de los mínimos cuadrados). Demuestrese que esta estimación $\bar{x}$ es precisamente la media aritmética de los datos.

4 Consideremos la reaccion química

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

donde $k_1 \neq k_2$ representan las velocidades de reaccion. Se sabe que después de un cierto tiempo t, la concentracion de substancia B, viene dada por la expresion

$$[B] = \frac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

donde $[A]_0$ es la concentracion inicial de la sustancia A.
a) Calcular el tiempo t en el que la concentracion de la sustancia alcanza un máximo.
b) Probar que la concentracion máxima de B, viene dada por

$$[B]_{max} = [A]_0 (\frac{k_2}{k_1})^{-k_2/(k_2-k_1)}$$

5 La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T tenga una velocidad v viene dada por la distribucion de Maxwell-Boltzmann

$$f(v) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$$

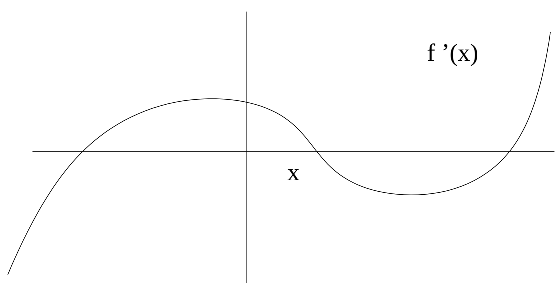
donde k es la constante de Boltzmann.

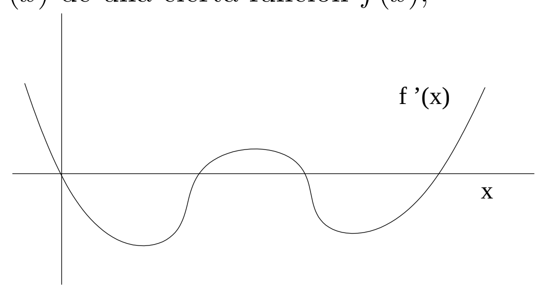
Calcular la velocidad más probable, es decir, la velocidad para la que la probabilidad alcanza el máximo.

6 Una persona está observando desde el suelo, con un telescopio, un avión que se aproxima a una velocidad de 15 km/minuto y a una altura constante de 10 km. ¿A qué ritmo está variando el ángulo del telescopio cuando la distancia horizontal del avión a esa persona es de 36 km? ¿Y cuando el avión pasa por la vertical de esa persona?

7 Un caudal de agua fluye en un tanque cónico al ritmo constante de 3 m^3 por segundo. El cono tiene 5 m de radio, 4 m de altura y está situado con el vértice hacia abajo. Sea $h(t)$ la altura del agua sobre el fondo en el instante t. Hallar $\frac{dh}{dt}$ (velocidad a la que sube el nivel del agua) y $\frac{d^2h}{dt^2}$ cuando el tanque está lleno hasta una altura de 2 m.

8 Las gráficas siguientes muestran la derivada $f'(x)$ de una cierta función $f(x)$,





Hacer un boceto de las gráficas de f, indicando sus propiedades.

9 Representar gráficamente y hallar el punto de máximo y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

c) $h(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$

10 Hallar la recta tangente a las siguientes funciones en el punto que se indica:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = 3x^4 + 4x^3, x = 1 & b) G(z) = z - \sqrt{z}, z = 1 & c) M(\lambda) = \dfrac{2\lambda}{2+\lambda^2}, \lambda = \sqrt{6} \\ d) K(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}, x = 1 & e) H(t) = \dfrac{\log t}{t}, t = e & f) R(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, z = 0 \end{array}$$

11 Hallar la recta tangente a las curvas siguientes en el punto que se indica.

a) $(4-x)y^2 = x^3$, en el punto $(x, y) = (2, 2)$.

b) $x^3 + z^3 - 6xz = 0$, en el punto $(x, z) = (4/3, 8/3)$.

c) $(u^2 + V^2)^2 = 4u^2V$, en el punto $(u, V) = (1, 1)$.

Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 3

1 Esbozar las gráficas de las siguientes superficies:

a) $z = 3x + 2y - 1$ *b*) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *c*) $x^2 + y^2 = 9$

d) $z^2 = x^2 + y^2$ *e*) $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ *f*) $z = x^2 - y^2$

g) $z = y^2$

2 La concentración molecular $c(x,t)$ de un líquido es $c(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{kt}}$. Verificar que esta función satisface la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{k}{4} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

3 Calcular todas las derivadas parciales primeras y segundas y construir el vector gradiente y la matriz Hessiana de las funciones de dos variables

a) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(y) - e^y$, b) $p(V,T) = \dfrac{nRT}{V}$ c) $G(u,v) = u^2 - v \log(u)$

4 *Sea* $\vec{r} = (x,y,z)$ *y la función* $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Demostrar que*

$$\vec{r} = r \overrightarrow{\nabla r}$$

5 Calcular la diferencial total de las siguientes funciones

a) $z = yx^2 - 2x + ye^x$ b) $V = V(p,T,n) = \dfrac{nRT}{p}$ c) $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

6 Escribir las ecuaciones del plano tangente a las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ en $(1, 2, 5/2)$ *b*) $z = \cos(x) \operatorname{sen}(y)$ en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

c) $z = \cos(2x + y)$ en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ *d*) $xyz = 1$ en $(1,1,1)$

e) $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$, en $(1, -1, 4)$

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en los puntos en los que $x = y = 0$

7 Hallar los puntos de $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.

8 Calcular los puntos estacionarios de las siguientes funciones, clasificando estos como máximos, mínimos o puntos de silla.

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$

b) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

c) $f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$

9 a) De todos los rectángulos inscritos en la circunferencia de radio R, ¿cuál es el que tiene mayor área?

b) Calcular las dimensiones de la lata cilíndrica de altura h y radio r, con volumen 1 y de menor superficie.

10 Hallar los extremos de la función $f(x,y) = 3x+y$ sujeta a la restricción $x^2+y^2-1000 = 0$.

11 Hallar los puntos en los que la función $f(x,y) = x^2+y^2$ alcanza sus valores máximo y mínimo cuando $3x^2+y^2 \leq 1$.

12 Sea la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Se pide

a) Si $x = \cos(t)$, $y = \operatorname{sen}(t)$, $z = t^2$ calcular $\frac{df}{dt}$.

b) Si $x = r\cos(t)$, $y = r\operatorname{sen}(t)$, $z = t^2$ calcular $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial r}$.

13 Sea $z = z(x,y)$ una función de dos variables. Consideremos el cambio a coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, para $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

A este determinante se le conoce como Jacobiano.

b) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ y aplicar el resultado para la función $z = xy$.

14 Sea $u = u(x,y,z)$ una función de tres variables. Consideremos el cambio a coordenadas esféricas $x = \rho\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta)$, $y = \rho\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta)$, $z = \rho\cos(\phi)$, para $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

a) Demostrar que el Jacobiano

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2\operatorname{sen}(\phi)$$

b) Calcular $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ y aplicar el resultado para las funciones

$$i)\quad u = x^2y+z \qquad\qquad ii)\quad u = x^2+y^2+z^2$$

15 El área de un rectángulo de lados x e y, viene dado por $A = xy$. Se pide:

a) Calcular la diferencial total de A.

b) Si tenemos un rectangulo de lados $x = 1$ m, $y = 2$ m e incrementamos x e y en 1 milímetro, ¿Cuánto aumenta, aproximadamente, el área del rectángulo?

16 El área de un sector angular de radio r y angulo θ (en radianes) viene dado por la formula $A = \frac{\theta}{2}r^2$. Se pide:

a) Calcular la diferencial total de A.

b) Si tenemos un sector de radio 1 metro y apertura 45 grados, ¿Cuánto, aumenta, aproximadamente el área del sector al incrementar 1 milímetro el radio y un grado el ángulo?

17 Comprobar si las siguientes expresiones son diferenciales exactas:

a) $(7x + 3y)dx + (3x + 8y)dy$

b) $(7x + 3y)dx + (7x + 3y)dy$

c) $y\cos(x)dx + \operatorname{sen}(x)dy$

d) $(3x^2y + 2y)dx + (2x^3 + 4x)dy$

e) $y(3x^2y + 2y)dx + y(2x^3 + 4x)dy$

f) $(2ax + by)dx + (bx + 2cy)dy$

18 Considerando la ecuación de los gases perfectos $pV = RT$,

a) probar que la expresión

$$C_v dT - pdV$$

no es diferencial exacta. (La constante C_v es el calor molar a volumen constante).

b) probar que la expresión

$$\frac{C_v}{T}dT - \frac{p}{T}dV$$

sí es diferencial exacta.

19 En las diferenciales exactas siguientes, calcular la función de potencial $F(x, y)$

a) $dF = (7x + 3y)\,dx + (3x + 8y)\,dy$

b) $dF = y\cos(x)\,dx + \operatorname{sen}(x)\,dy$

c) $dF = y(3x^2y + 2y)dx + y(2x^3 + 4x)dy$

d) $dF = (2ax + by)dx + (bx + 2ay)dy$

Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 4

1 Calcular las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{3-x^2}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\log(\cos(x))\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{a}{x^2+b^2}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x+1}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ *n)* $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx$ ñ) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$

o) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7(x)\cos(x)\,dx$ *p)* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^9(x)\,dx$ *q)* $\displaystyle\int \cos^2(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx$

2 Demostrar que para todo número real L y todo número natural n

$$\text{a)}\ \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=0 \qquad \text{b)}\ \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=0$$

3 Sabiendo que

$$\cos((m+n)x)=\cos(mx)\cos(nx)-\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,,$$
$$\cos((m-n)x)=\cos(mx)\cos(nx)+\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,,$$

demostrar que para todo $m,n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\text{a)}\ \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$$

$$\text{b)}\ \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases}$$

$$\text{c)}\ \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx=0 \qquad \forall\, m,\,n\in\mathbb{Z}$$

4 Dibujar la region limitada por las siguientes curvas y evaluar el área:

$$a) y = x^2, \quad y = 2x+3 \qquad b) y^2 - 27x = 0, \quad x+y=0$$

$$c) y^2 = 2x, \quad x-y=4 \qquad d) a^2x = a^2y - y^2, \quad 4x-y=0.$$

5 Hallar el área acotada por la parábola $y = 6+4x-x^2$ y el segmento rectilíneo que une los puntos (-2,-6) y (4,6).

6 Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) F(x) = \int_a^{3x} \operatorname{sen}^3 t\, dt \qquad b) F(x) = \int_{15}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

$$c) F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt \qquad d) F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

7 Calcular las siguientes integrales definidas

$$a) \int_{-13}^{13} (x+x^3+x^5)\, dx \qquad b) \int_{-10}^{10} (x^2+7x^6)\, dx \qquad c) \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\, dx$$

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx \qquad e) \int_{-a}^{a} x^8 \operatorname{sen}(x)\, dx \qquad f) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x)+\operatorname{sen}(x))\, dx$$

8 Sea $a > 0$.
a) Demostrar que $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$ si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

b) Demostrar que $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{1-p}$ si $p < 1$ y diverge si $p \geq 1$.

9 Decidir si convergen las siguientes integrales impropias

$$a) \int_1^\infty \frac{dx}{x^7+3x+1} \qquad b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad c) \int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x}\, dx \qquad d) \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

$$e) \int_0^\infty e^{-x}\, dx \qquad f) \int_{-\infty}^0 e^x\, dx \qquad g) \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \qquad h) \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

10 Sabiendo que
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$
comprobar que:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}\,dx = 1$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = 0$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}\,dx = b$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}\,dx = a^2 + b^2$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 3$

11 Calcular el volumen generado por la superficie limitada por $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$, al girar alrededor del eje Y.

12 Consideremos la porcion de área del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $x = 1$ y la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, siendo $x \geq 1$. Calcular el volumen engendrado por este área al girar alrededor del eje OX. (Solucion: π).

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 5

1 Calcular las siguientes integrales en los dominios dados

a) $\displaystyle\int\int_R (x^4+y^2)\,dx\,dy \qquad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^3\le y\le x^2\}$

b) $\displaystyle\int\int_R x^3y\,dx\,dy \qquad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\le 3-4y^2\}$

c) $\displaystyle\int\int_R e^{x^2}\,dx\,dy \qquad R=\{\text{triangulo formado por las rectas } y=0,\, 2y=x,\, x=2\}$

d) $\displaystyle\int\int_R e^{-y}\,dx\,dy \qquad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le y\le \ln(x),\, 1\le x\le 2\}$

2 Calcular las siguientes integrales iteradas

a) $\displaystyle\int_0^a\int_0^b\int_0^c dx\,dy\,dz$ b) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{2y}\int_0^x (x+2z)\,dz\,dx\,dy$ c) $\displaystyle\int_0^1\int_{1-x}^{1+x}\int_0^{xy} 5zx\,dz\,dy\,dx$

3 Dadas las siguientes integrales iteradas, dibujar el recinto sobre el que se integra, invertir el orden de integración y calcularlas de la forma más sencilla:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}dydx$ b) $\displaystyle\int_0^3\int_{-x^2+1}^{x^2+1} xydydx$ c) $\displaystyle\int_0^1\int_{e^y}^{e^{2y}} y\ln(x)dxdy$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2|y|}^{|y|} e^{x+y}dxdy$ e) $\displaystyle\int_0^1\int_{1-y}^1 (x+y^2)dxdy$

4 Calcular el área, $A=\int\int_R 1\,dxdy$, de las regiones planas delimitadas por

a) $xy=16$, $y=x$, $y=0$, $x=8$.

b) $y=2x$, $y=x^2$, $x\le 1$.

5 Calcular la integral

$$\int\int_R \ln(x^2+y^2)\,dxdy$$

donde R es la región formada por los puntos (x,y) tales que $1\le x^2+y^2\le 4$, $y\ge 0$.

6 Sea Ω la región del plano limitada por el cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$.

a) Dibujar y parametrizar la región Ω.

b) Calcular $\displaystyle\int\int_\Omega e^{x+y}\,dx\,dy$

7 Calcula

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

efectuando un cambio a coordenadas polares. Utiliza las integrales iteradas en coordenadas cartesianas para concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

8 Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq x\}$

a) Dibujar la región Ω.

b) Calcular $\displaystyle\int\int_\Omega x^7 y\, dx\, dy$.

9 Sobre una plaza de toros que ocupa la región $R = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$ se levanta una cubierta cuya altura viene dada por $h(x, y) = h_0 + (h_0 - x^2 - y^2)^\alpha$ con $\alpha > 0$. Calcular el volumen resultante.

10 Halla el volumen del solido limitado superiormente por el paraboloide $z = 1 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente por el plano XY.

11 Sea $\rho = \rho(x, y)$ la densidad de masa por unidad de superficie de una lámina plana correspondiente a una región R del plano. Así **la masa total** m de la lámina plana viene dada por

$$m = \int\int_R \rho(x, y)\, dxdy$$

Calcula la masa de una lámina triangular de vértices $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ suponiendo que $\rho(x, y) = 2x + 3y$.

12 Comprobar que el volumen del tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ viene dado por $\dfrac{1}{6}$.

Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 6

1 Calcular la suma de las siguientes series,

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n},\qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

2 Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes,

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+4},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n},\qquad d)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)},$$
$$e)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sqrt{n}}{n^3+\sqrt{n}},\qquad g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!},\qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

3 Decidir si las siguientes series alternadas son absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes o divergentes,

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n},\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1},\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(-2)^n}.$$

4 Calcular el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias. Calcular la suma de las series que se puedan.

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4},\qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n},\qquad d)\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n\qquad e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}$$

5 Hallar los polinomios de Taylor de orden 3, centrados en el punto $x=0$, de las siguientes funciones

$$a)f(x)=\operatorname{sen}x,\qquad b)f(x)=e^x,\qquad c)f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

6 Hallar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

$$a)\ e^x,\qquad b)\ \operatorname{sen}(x),\qquad c)\ \cos(x),\qquad d)\ \frac{1}{1+x},\qquad e)\ \ln(1-x).$$

7 Utilizando los desarrollos del problema anterior, calcular los límites siguientes

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2},\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$$

8 Definimos la **unidad imaginaria** $i=\sqrt{-1}$, de modo que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ y así sucesivamente.

i) Desarrollando e^{ix} en serie de potencias, demostrar que $e^{ix}=\cos(x)+i\operatorname{sen}(x)$.

ii) Utilizando la fórmula anterior, comprobar que:

$$a)e^{i\pi}+1=0\qquad b)\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad c)\operatorname{sen}(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Departamento de Matemática Aplicada

MATEMÁTICAS. Grado en CC. Químicas(Curso 2016-17)

Hoja 7

1 Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y' = \dfrac{y^2 + y}{x^2 - x}$

b) $(x^2 + 1)dy = (y + 1)(x^2 + x + 1)dx$

c) $y' = \dfrac{-2y \log |y|}{x}$

2 Encontrar el valor de b para el cual las siguientes ecuaciones son exactas y con este valor resolverlas.

a) $(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0, \quad y(1) = -1$

b) $(ye^{2xy} + x)dx + (xbe^{2xy})dy = 0, \quad y(-1) = 0$

3 Resolver las siguientes ecuaciones buscando un factor integrante adecuado

a) $(x^3 + y^4)dx + (8xy^3)dy = 0$ b) $xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$

4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

a) $xy' - 3y = x^4$ b) $y' + y = e^{-2x}$ c) $(2y - x^3)dx = xdy$

5 La desintegración radiactiva está regida por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -ax$$

donde $x(t)$ es la masa, t el tiempo y a es una constante positiva. La vida media T es el tiempo durante el cual la masa se desintegra a la mitad de su valor inicial. Expresar T en función de a y evaluar a para el isótopo de uranio U^{238}, para el cual $T = 4'5 \cdot 10^9$ años.

6 La temperatura del cuarto de estar de Jorge Calvo es de 20^0C. La taza de café de Jorge está a 80^0C, pero Jorge sabe que la temperatura de la taza de café decrece a una velocidad de $0,083$ veces por minuto la diferencia entre la temperatura de la habitación y de la taza. A Jorge, que ha estudiado la ley de enfriamiento de Newton $\frac{dT}{dt} = k(T_a - T)$, le gusta el café a 50^0C. ¿Cuanto tiempo debe esperar para tomarlo?.

7 La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli* (observar que es lineal en los casos particulares $n = 0$ y $n = 1$). Demostrar que el cambio de variables $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Aplicar el método anterior para resolver $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

8 Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + y' - 6y = 0$ b) $y'' + 2y' + y = 0$ c) $y'' + 8y = 0$ d) $y'' - 2y' + 4y = 0$
e) $y'' - 4y' + 4y = 0$ f) $y'' - 9y' + 20y = 0$ g) $2y'' + 2y' + 3y = 0$

9 Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' + 4y = x^2 + 3e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + 4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

10 Movimiento armónico forzado. Si en un movimiento armónico se tienen en cuenta una fuerza de amortiguación (proporcional a la velocidad) y una fuerza exterior $f(t)$ que actúa sobre el sistema, se llega a un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} my''(t) + by'(t) + ky(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

donde m es la masa, b la constante de amortiguación ($b > 0$) y k la constante del muelle ($k > 0$); y_0 el desplazamiento inicial, v_0 la velocidad inicial y $y(t)$ el desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio.

Resolver el siguiente problema: Un resorte de constante $k = 10\ N.m^{-1}$ de cuyo extremo pende una bola de 2 Kg. se sumerge en un líquido de viscosidad $b = 4\ N.s.m^{-1}$. Al extremo inferior del soporte se le da un movimiento $f(t) = 4(\operatorname{sen}(3t) + \cos(3t))$. Tomando como punto inicial el punto de reposo, dibujar la gráfica del movimiento.

11 Resonancia Cuando el movimiento armónico es no amortiguado y la fuerza exterior es periódica, se puede producir el fenómeno de resonancia. Estudiar la ecuación

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t), \quad F_0 = constante$$

¿qué sucede cuando $\gamma = \omega$?

12 Hallar los valores de m para los cuales $y = e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0.$$

13 Hallar los desarrollos en serie de potencias de las soluciones en torno al punto $x = 0$ de las ecuaciones

a) $y'' + xy' + y = 0$ b) $xy' - y = x^2 \cos(x)$

14 Hallar los 5 primeros términos del desarrollo en serie de potencias en torno al origen de la solución de los siguientes problemas de valor inicial

a) $\begin{cases} y'' + y' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y'' + xy' + (x-5)y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

15 Dada la *Ecuación de Bessel* $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. Encontrar una solución de la forma $y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.