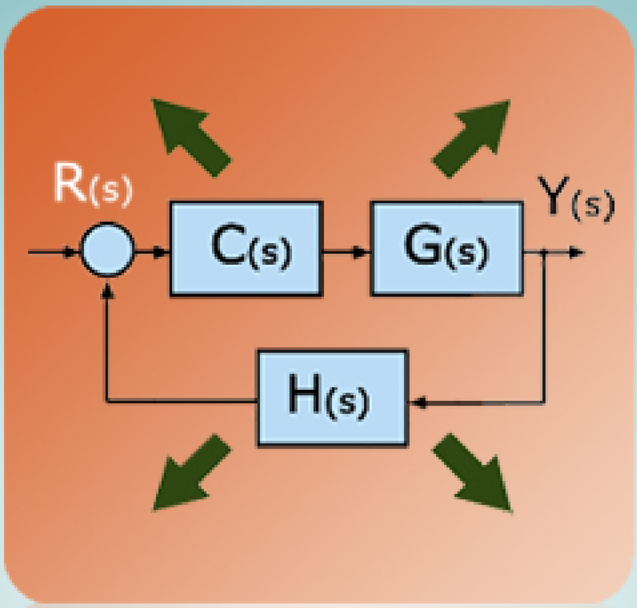
Automática

Ejercicios

Capítulo 7.1. Análisis Frecuencial (Parte 1)



José Ramón Llata García
Esther González Sarabia
Dámaso Fernández Pérez
Carlos Torre Ferrero
María Sandra Robla Gómez

Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

EJERCICIO 7.1.

Dibujar el diagrama de Bode para el sistema definido por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{2500(10+s)}{s(2+s)(s^2+30s+2500)}$$

Para hacer el análisis en frecuencia se realiza el cambio de s por jw:

$$G(jw) = \frac{2500(10+jw)}{jw(2+jw)(j^2w^2+30jw+2500)}$$

La forma general de la función de transferencia de un sistema para representar su diagrama de Bode es:

$$G(jw)H(jw) = \frac{K\prod_i (1+jwT_i)\prod_j \left[1+2\delta_j(jw/w_{n_j})+(jw/w_{n_j})^2\right]}{(jw)^n\prod_k (1+jwT_k)\prod_m \left[1+2\delta_m(jw/w_{n_m})+(jw/w_{n_m})^2\right]}$$

Representando la función de transferencia de este sistema según la forma general anterior se tiene:

$$G(jw) = \frac{5(1+0.1jw)}{jw(1+0.5jw)(1+0.012jw+(jw/50)^2)}$$

Se analizan a continuación por separado cada uno de los términos que componen la función de transferencia:

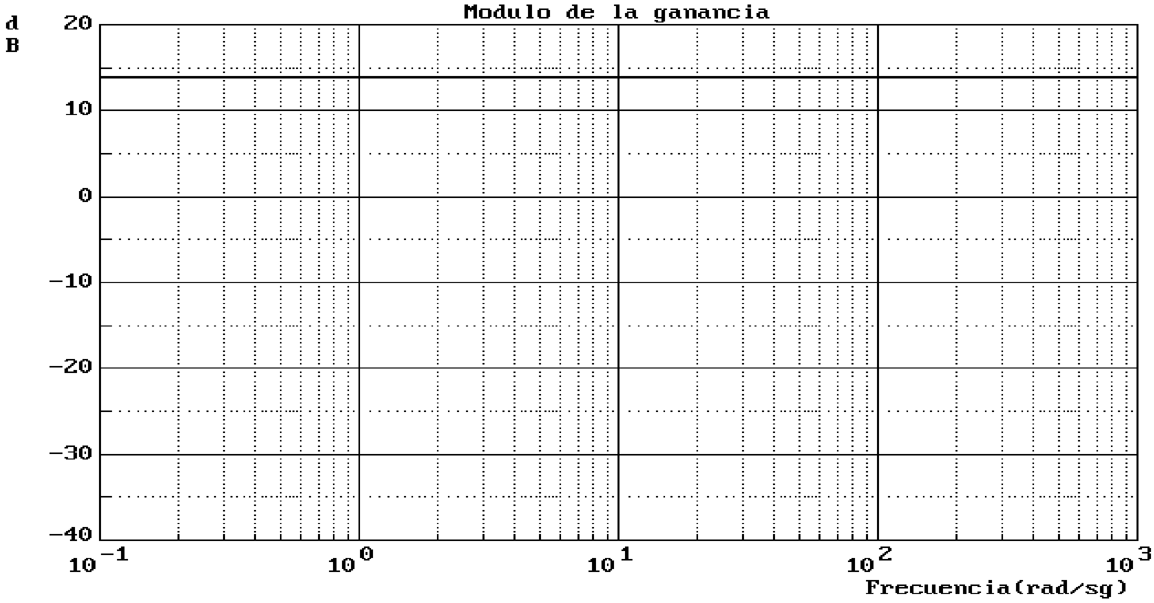
1) Ganancia K=5

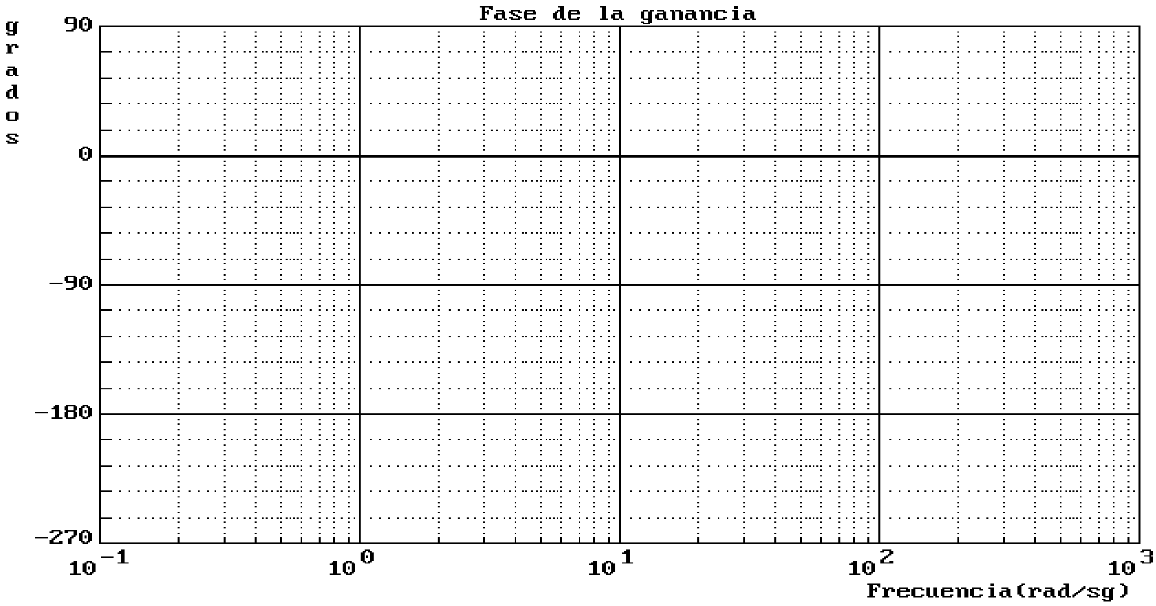
Contribución:

Amplitud: Valor constante.

Fase: 0º.

$M = 20\log K = 20\log 5 \approx 14\text{db}$





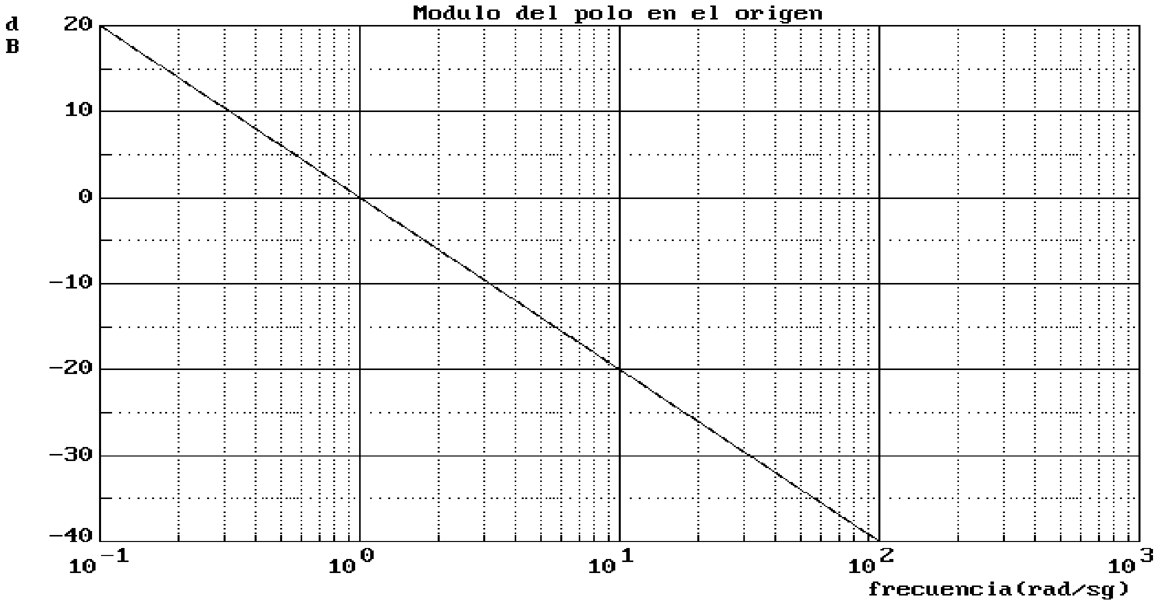
2) Polo en el origen (1/jw)

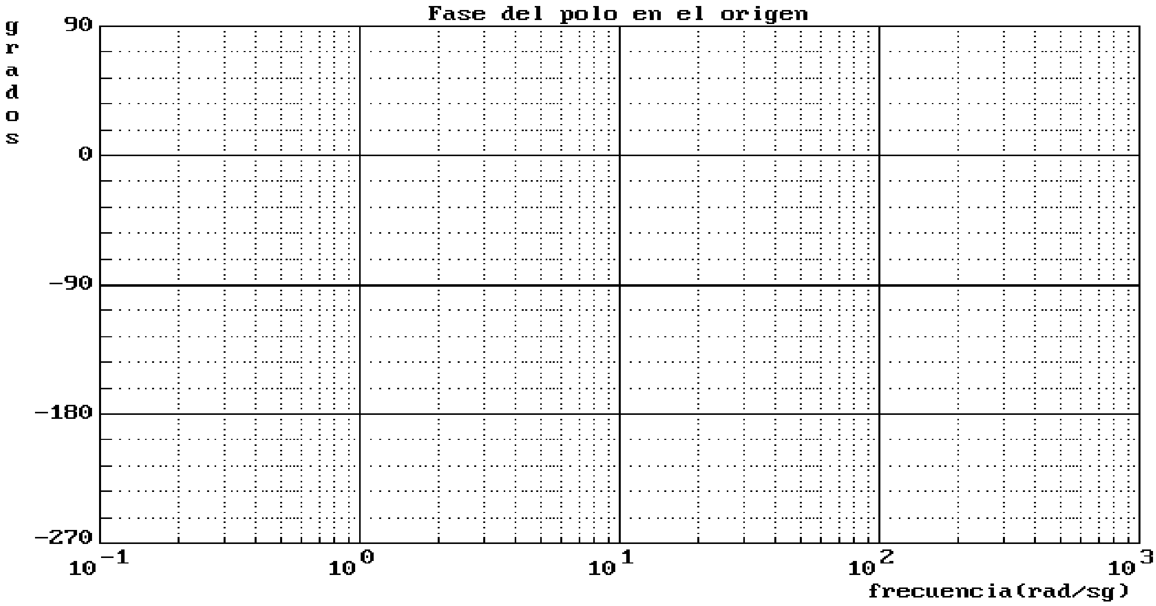
Contribución:

Amplitud: Recta de pendiente -20dB/dc.

Fase: Valor constante de -90º.

Frecuencia esquina :1 rad/sg.





3) Cero en el eje real (1+0.1jw)

Contribución:

Amplitud:

Recta de pendiente 0dB/dc antes de We.
Recta de pendiente 20dB/dc después de We.

<u>Correcciones en amplitud</u>:

En We ....+3dB.
Una octava arriba y abajo.......+1dB.

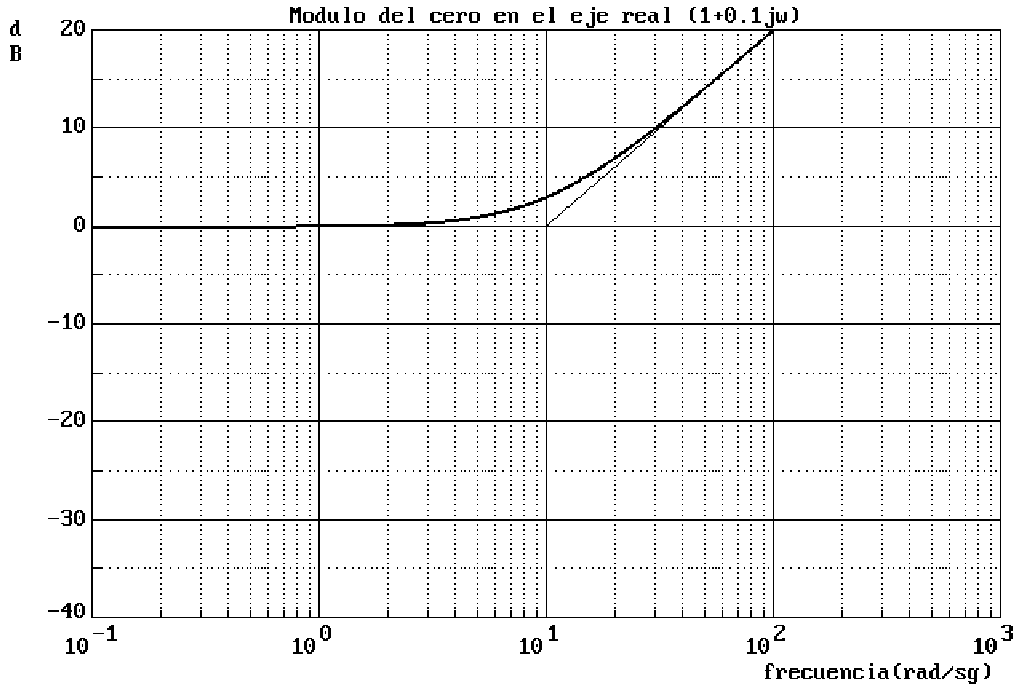
Fase:

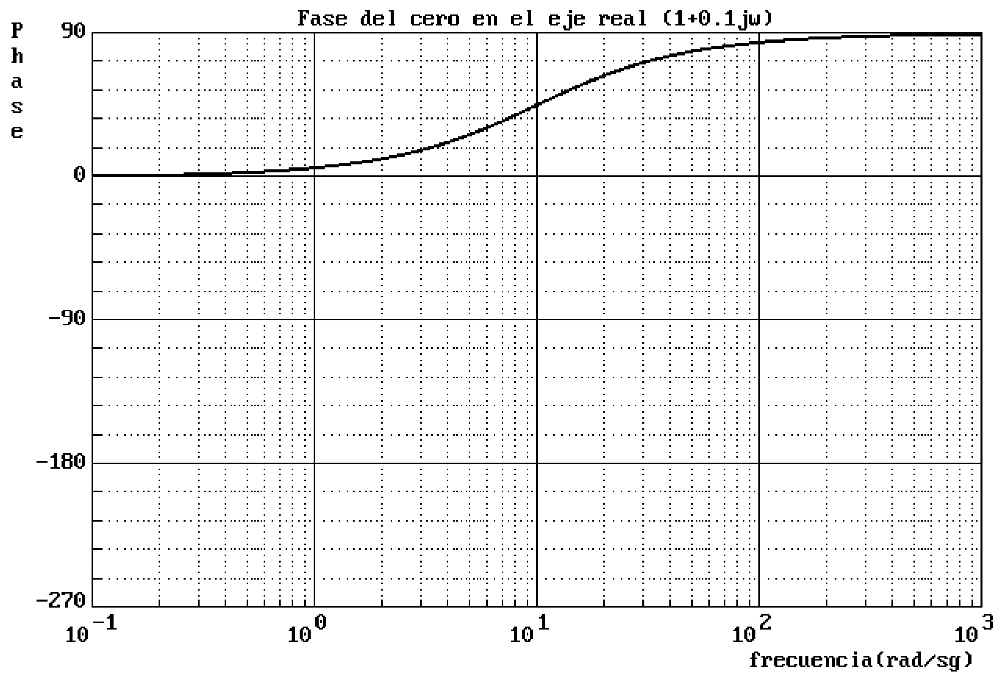
Asíntota de 0º una década por debajo de We.
Asíntota de +90º una década por encima de We.
45º en We

<u>Correcciones en fase</u>: fase = arctg(wτ)

En w=1/10τ ....+6º
En w=1/2τ.....................................+26.6º
En w=2/τ.......................................+63.4
En w=10/τ.....................................+84º

Frecuencia esquina :1/τ rad/sg=1/0.1=10 rad/sg.





4) Polo en el eje real. 1/(1+0.5jw)

Contribución:

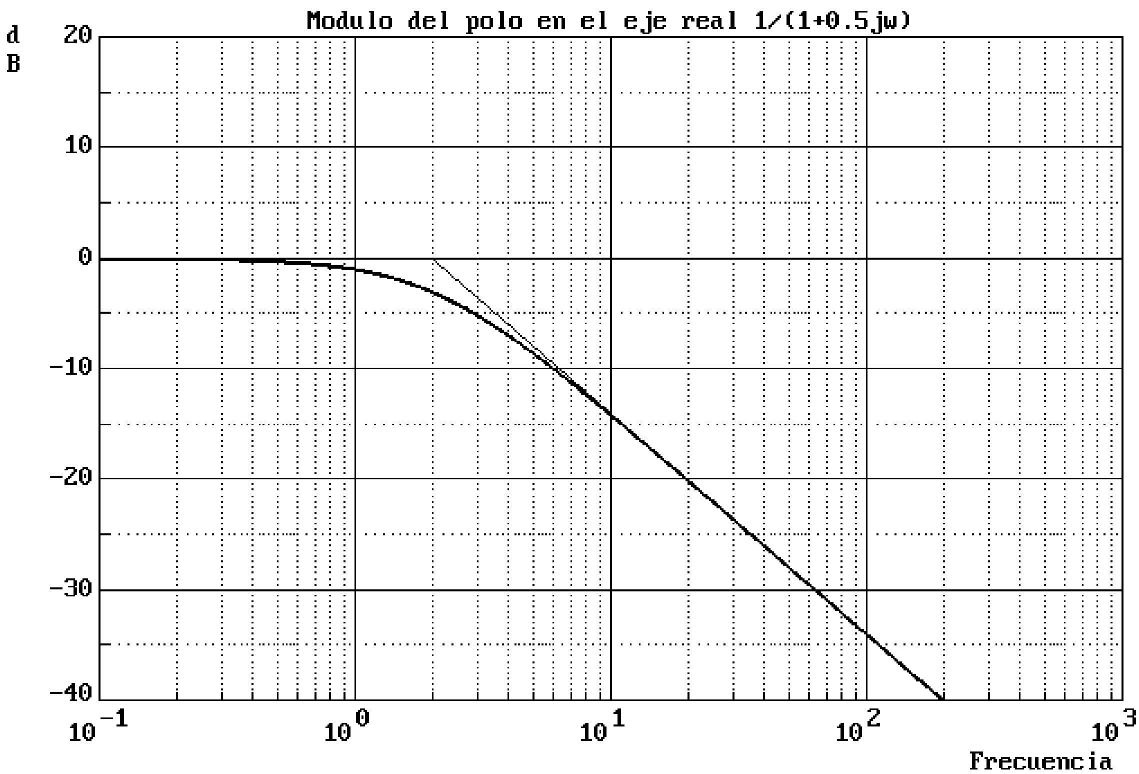
Amplitud:
Recta de pendiente 0dB/dc antes de We.
Recta de pendiente -20dB/dc después de We.

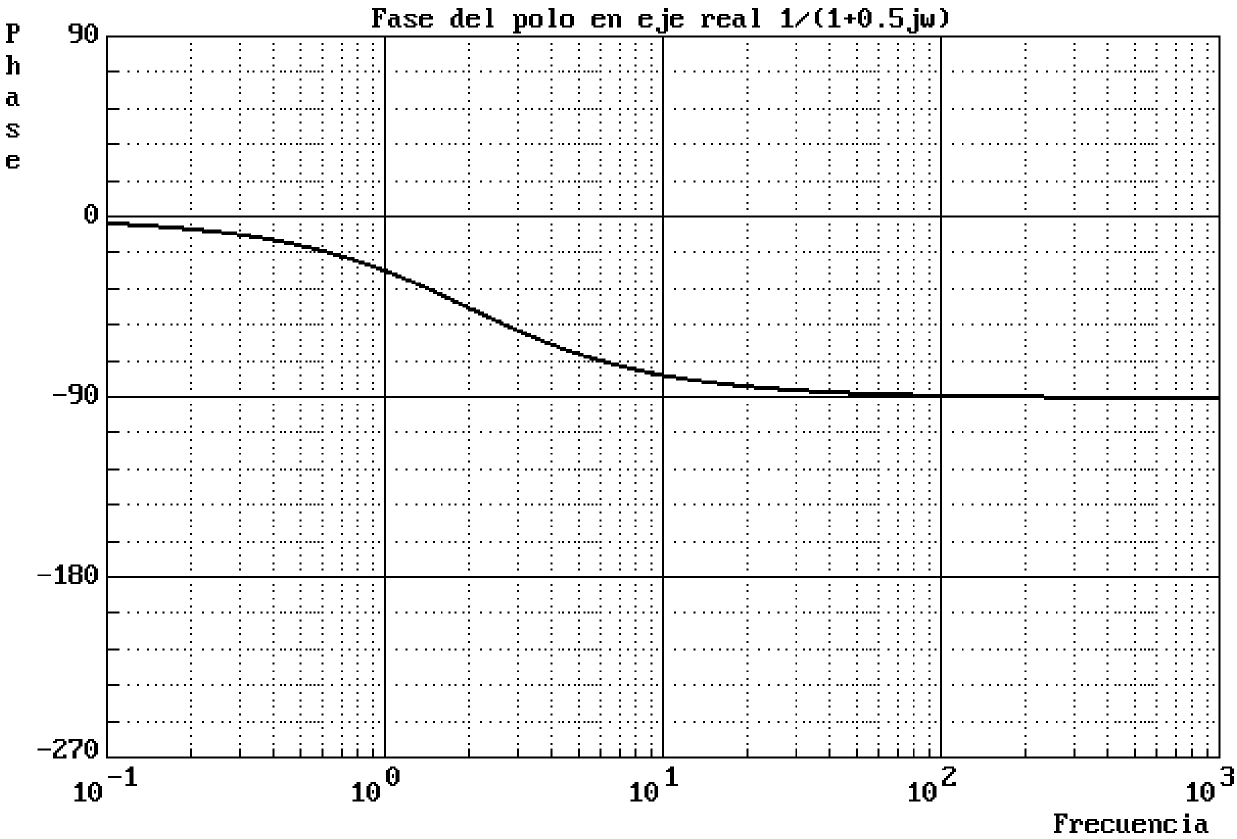
Correcciones en amplitud:
En We ....-3dB.
Una octava arriba y abajo.......-1dB.

Fase:
Asintota de 0º una década por debajo de We.
Asíntota de -90º una década por encima de We.
-45º en We

Correcciones en fase: $\text{fase} = -\text{arctg}(w\tau)$
En $w=1/10\tau$ ....-6º.
En $w=1/2\tau$.....................................-26.6º
En $w=2/\tau$......................................-63.4
En $w=10/\tau$.....................................-84º

Frecuencia esquina :$1/\tau$ rad/sg=1/0.5=2 rad/sg.





5) Polos complejos. $1/[1+0.012jw+(jw/50)^2]$

Contribución:
Amplitud:
Recta de pendiente 0dB/dc antes de We.
Recta de pendiente -40dB/dc después de We.
Forma del módulo en función del valor del δ.
Wn=50; δ=0.3;

Correcciones en amplitud:
Gráficas exactas o plantillas:
En We ....+4.5dB.
En 0.6We ....+2dB.
En 0.4We ....+1dB.
En 2We ....+1dB.
Correción analítica:

$$w_r = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = 50\sqrt{1-2\cdot 0.3^2} = 45.27\ \text{rad/sg}$$

$$M_r = -20\log\left(2\delta\sqrt{1-\delta^2}\right) = 4.84\ \text{dB}$$

Fase:
Asíntota de 0º una década por debajo de We.
Asíntota de -180º una década por encima de We.
-90º en We.
Forma de la fase en función del valor del δ.

Correcciones en fase:

Gráficas exactas o plantillas:

En 0.8We ....-45º.

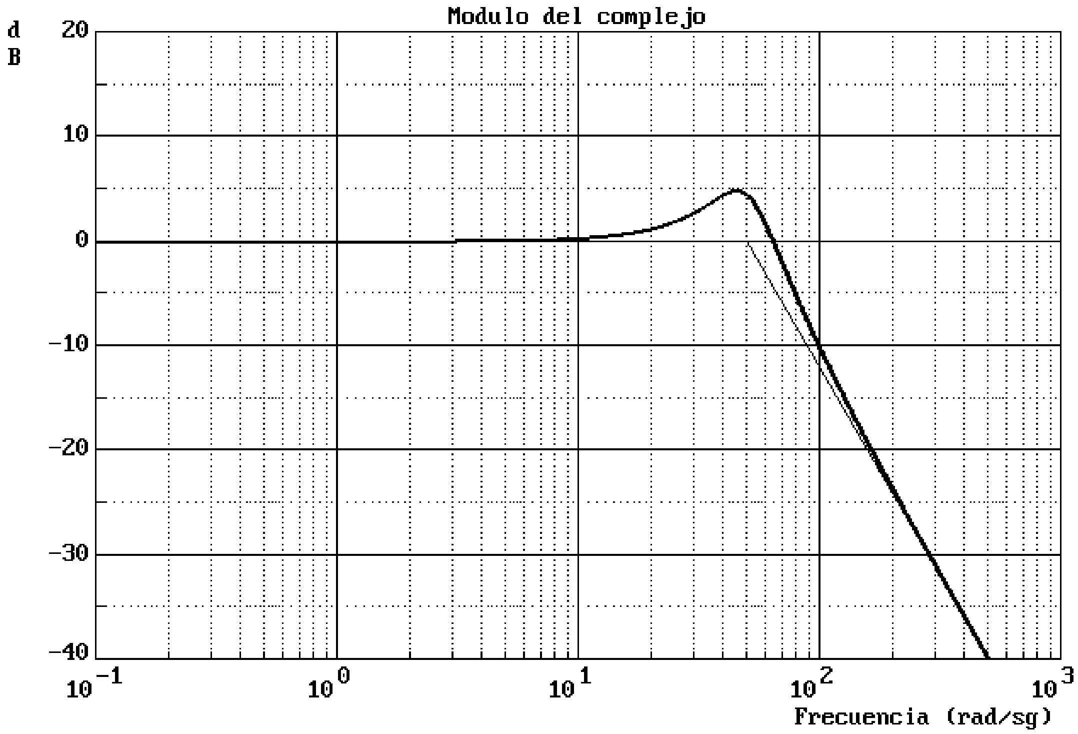
En 0.6We ....-30º.

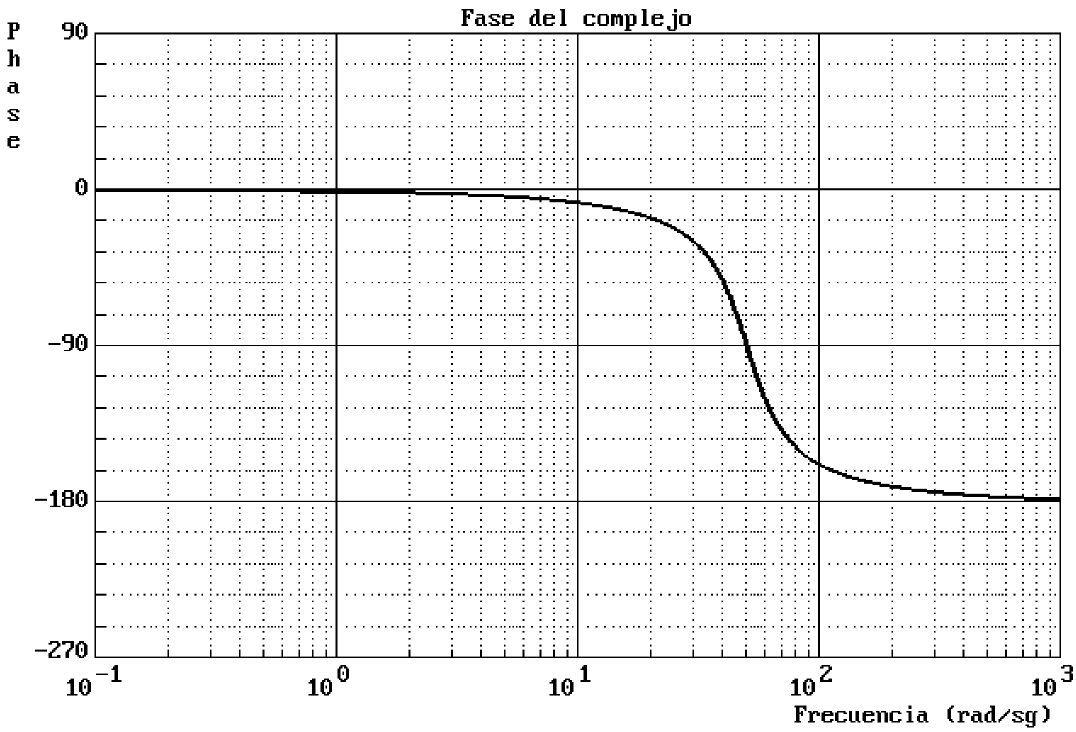
En 0.4We ....-15º.

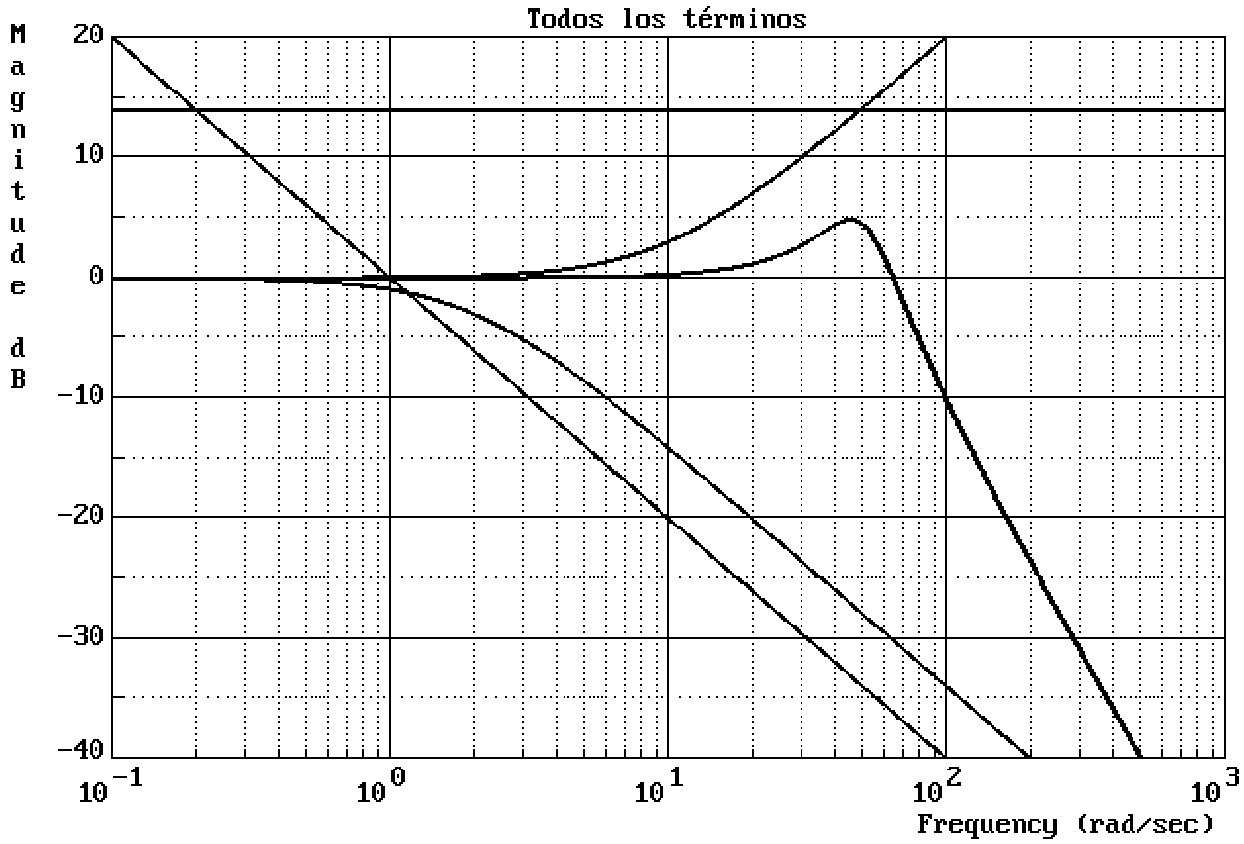
En 2We ....-160º.

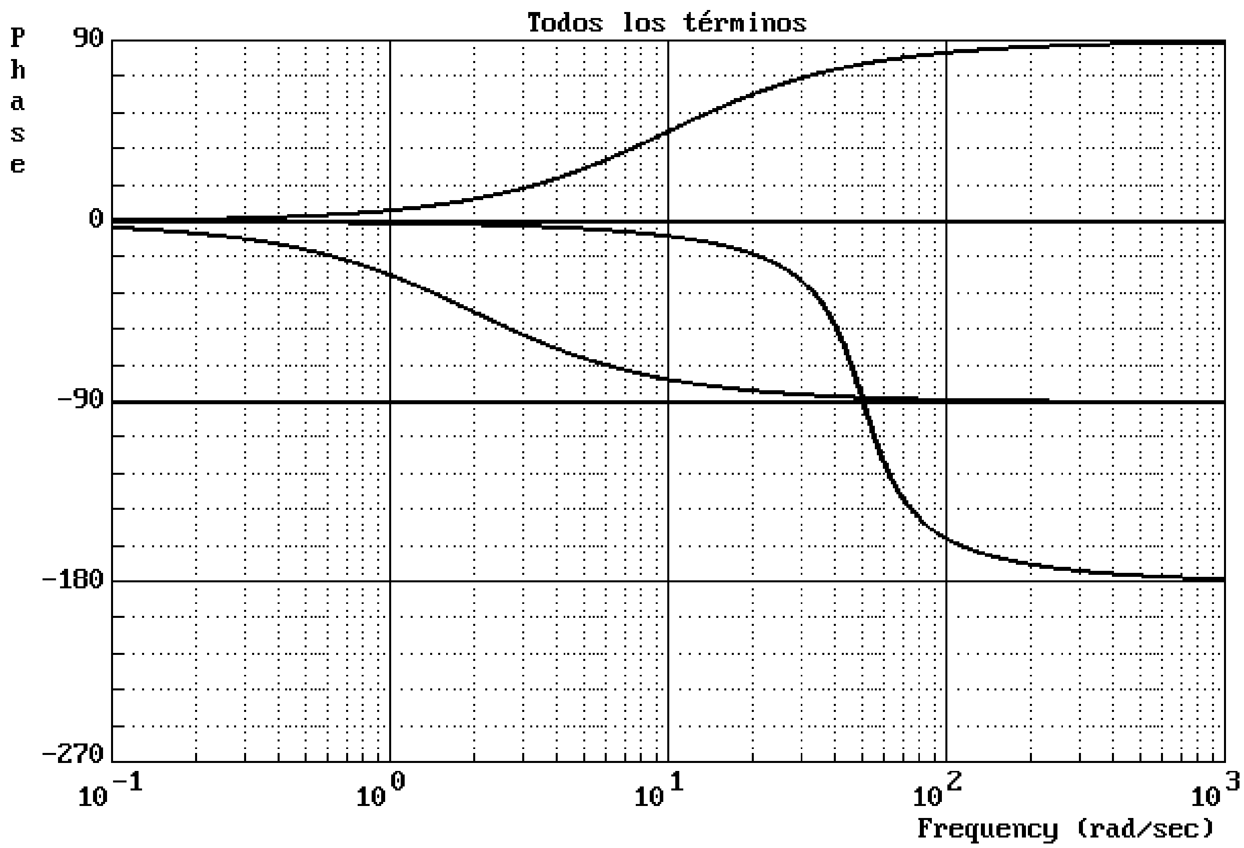
En 4We ....-170º.

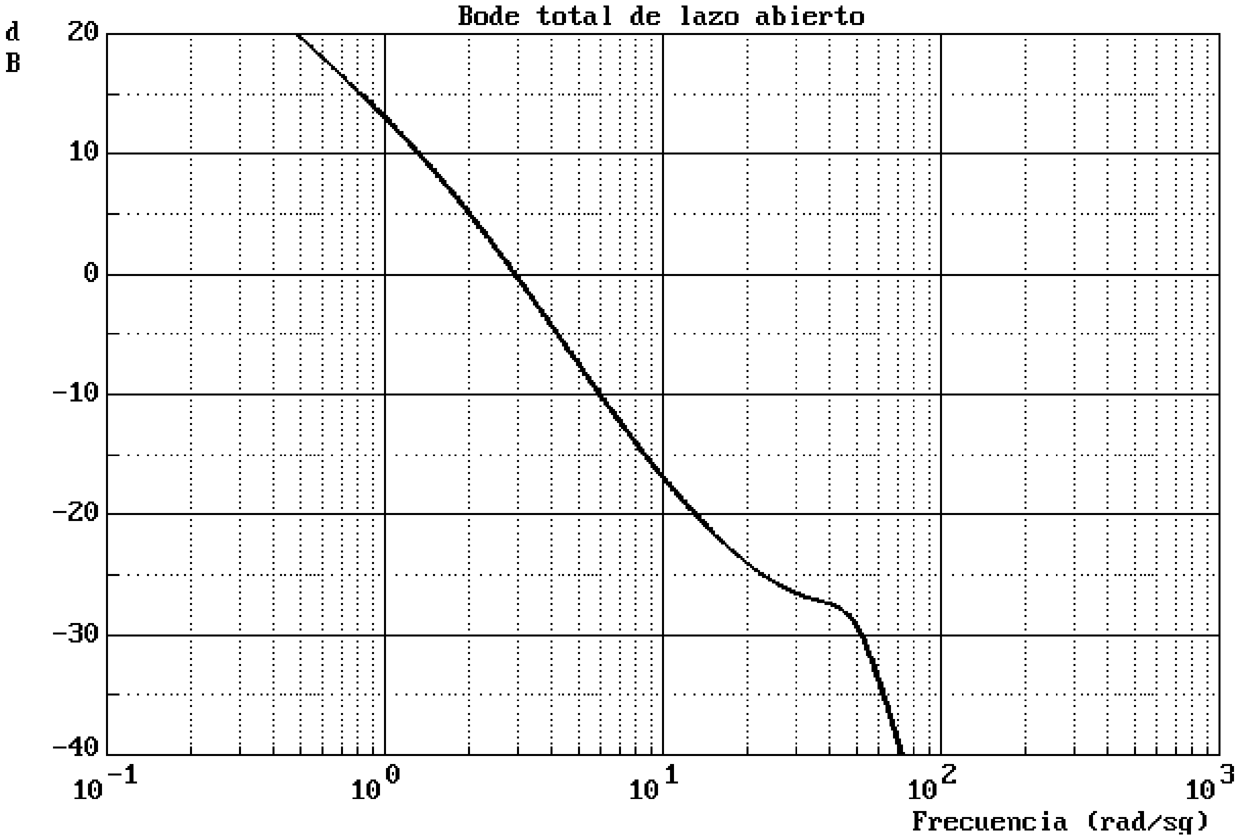
Frecuencia esquina :=Wn=50 rad/sg.

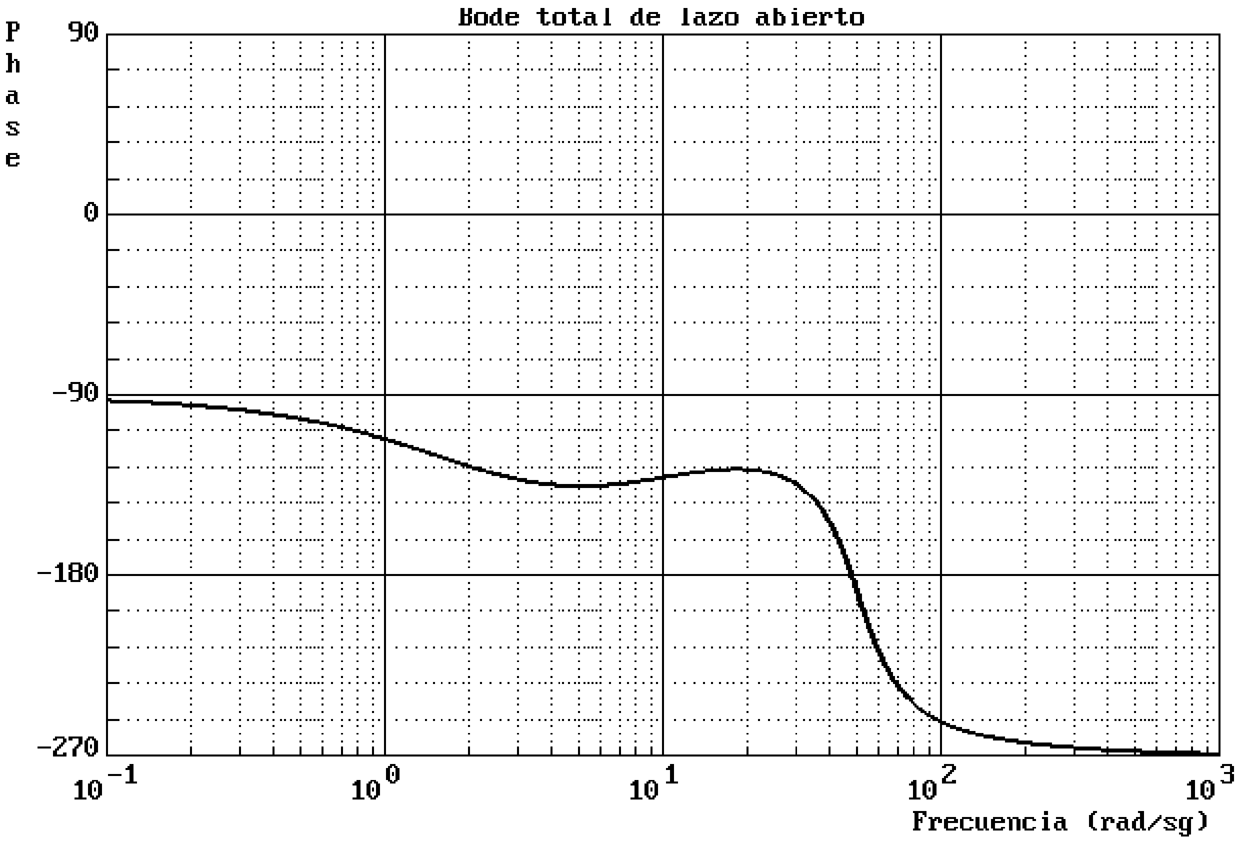





Todos los términos
Magnitude dB
20
10
0
-10
-20
-30
-40
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)


Todos los términos
Phase
90
0
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)


Bode total de lazo abierto
d
B
20
10
0
-10
-20
-30
-40
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frecuencia (rad/sg)


Bode total de lazo abierto
P
h
a
s
e
90
0
-90
-180
-270
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frecuencia (rad/sg)

EJERCICIO 7.2.

Dibujar el diagrama de Bode asintótico para el sistema definido por la siguiente función de transferencia:

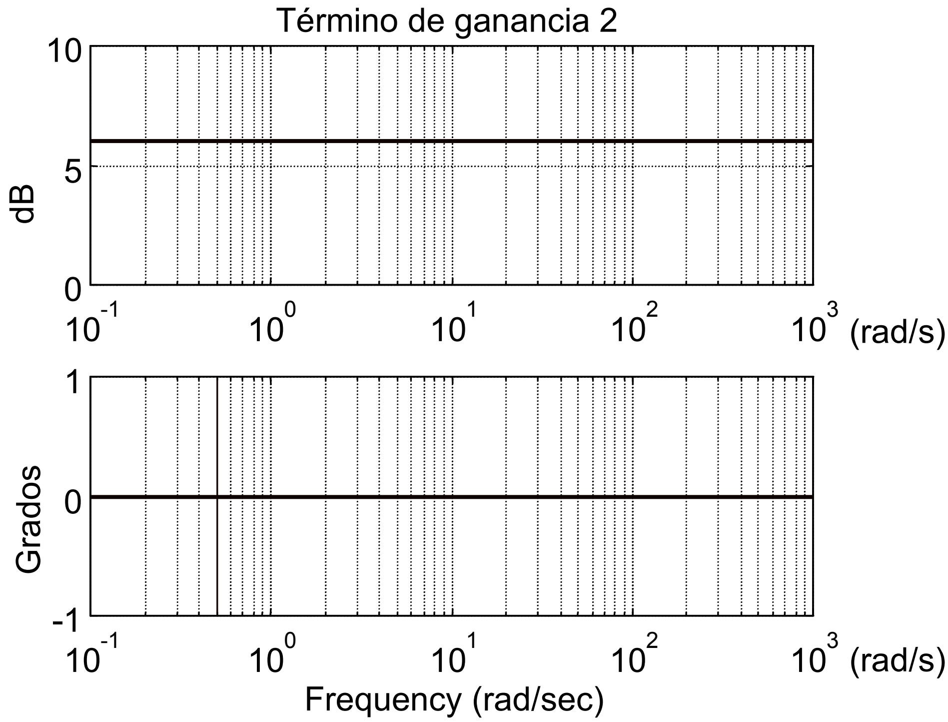
$$G(s) = \frac{2}{(1+0.8s)(1+0.4s)(1+0.1s)}$$

Cambio de s por jw:

$$G(s) = \frac{2}{(1+0.8j\omega)(1+0.4j\omega)(1+0.1j\omega)}$$

Ganancia: 2

Módulo: 20 log 2 = 6.02 dB
Fase: 0º



Polo 1: $(1+0.8j\omega)$

Frecuencia esquina: $\omega_{e1} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \text{rad/s}$

Módulo:

Asíntota a 0 dB para frecuencias menores que $\omega_{e1} = 1.25 \text{rad/s}$

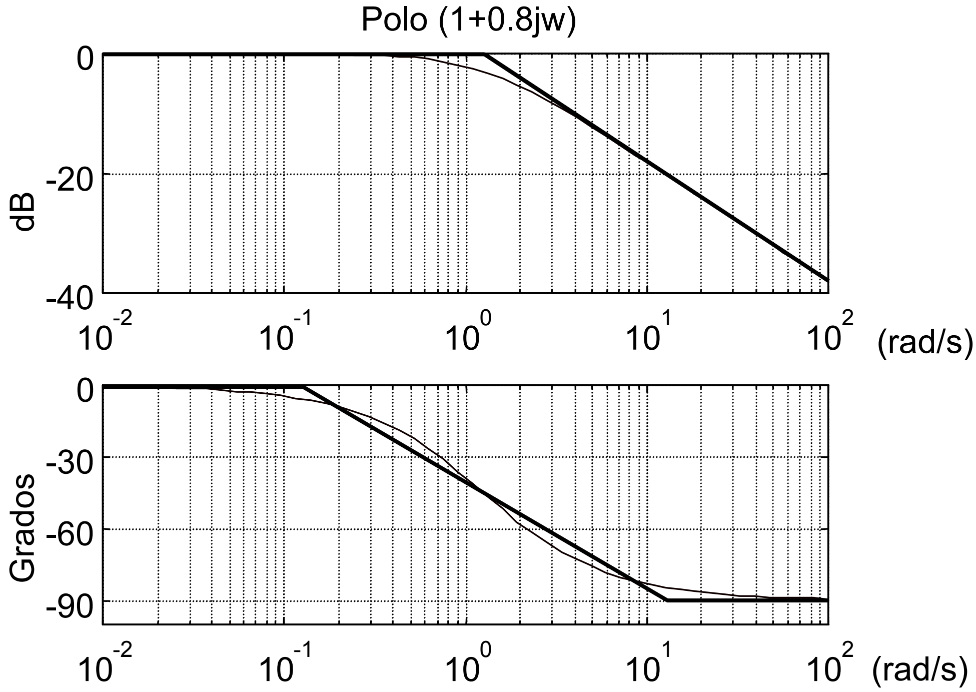
Asíntota con pendiente –20 dB/dec a partir de $\omega_{e1} = 1.25 \text{rad/s}$

Fase:

Asíntota a 0º una hasta $\frac{\omega_{e1}}{10} = 0.125 \text{rad/s}$

-45º en $\omega_{e1} = 1.25 \text{rad/s}$

Asíntota a –90º a partir de $10 \cdot \omega_{e1} = 12.5 \text{rad/s}$



Polo 2: $(1+0.4\,j\omega)$

Frecuencia esquina: $\omega_{e1} = \dfrac{1}{0.4} = 2.5\text{rad}/\text{s}$

Módulo:

Asíntota a 0 dB para frecuencias menores que $\omega_{e1} = 2.5\text{rad}/\text{s}$

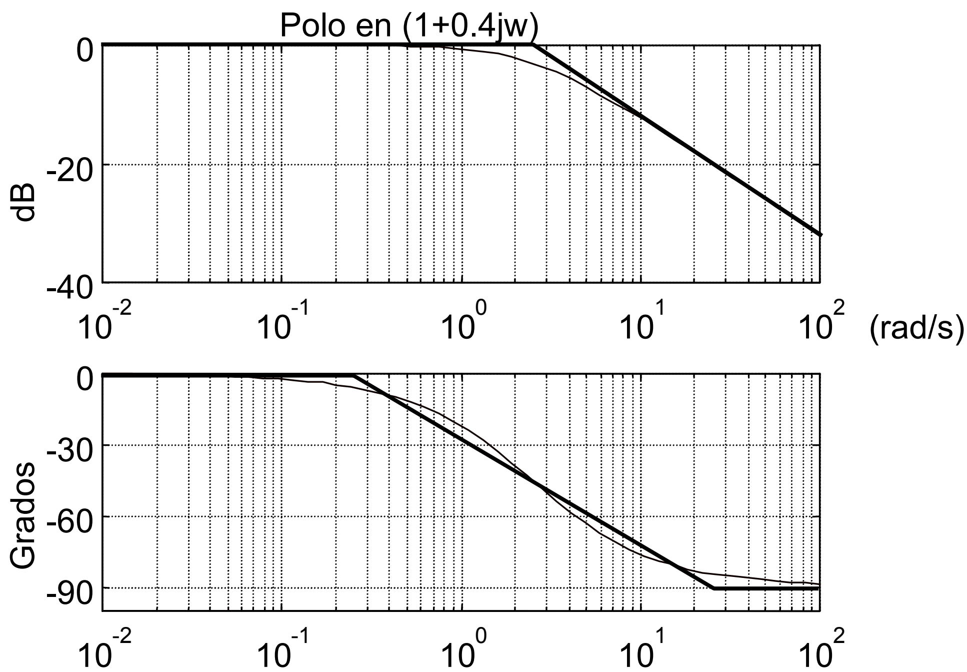
Asíntota con pendiente –20 dB/dec a partir de $\omega_{e1} = 2.5\text{rad}/\text{s}$

Fase:

Asíntota a 0º una hasta $\dfrac{\omega_{e1}}{10} = 0.25\text{rad}/\text{s}$

-45º en $\omega_{e1} = 2.5\text{rad}/\text{s}$

Asíntota a –90º a partir de $10 \cdot \omega_{e1} = 25\text{rad}/\text{s}$



Polo 3: $(1 + 0.1j\omega)$

Frecuencia esquina: $\omega_{e1} = \dfrac{1}{0.1} = 10 \text{rad/s}$

Módulo:

Asíntota a 0 dB para frecuencias menores que $\omega_{e1} = 10 \text{rad/s}$

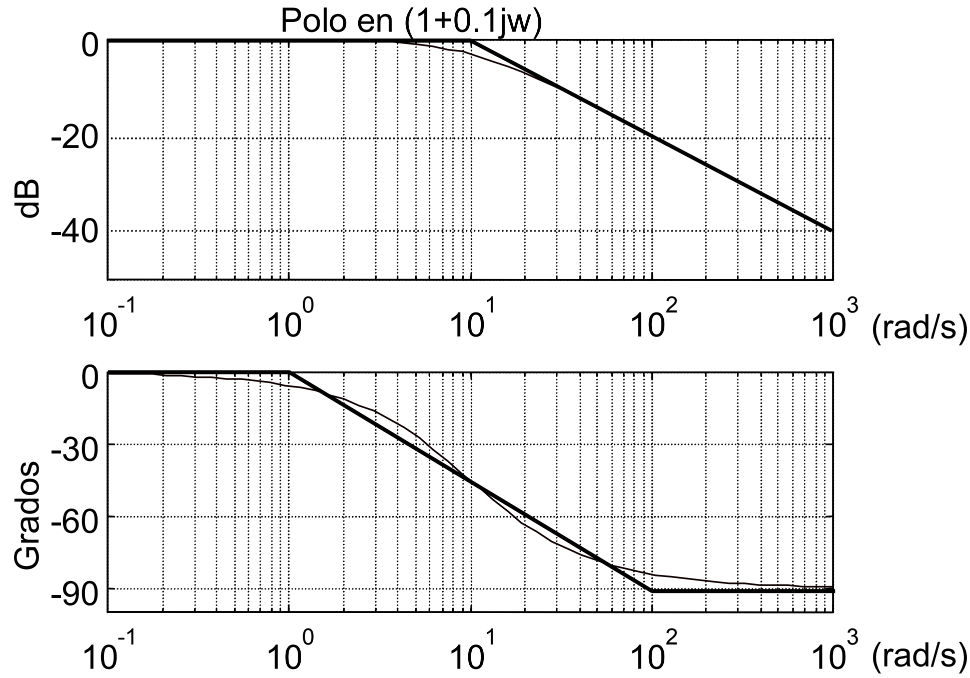
Asíntota con pendiente –20 dB/dec a partir de $\omega_{e1} = 10 \text{rad/s}$

Fase:

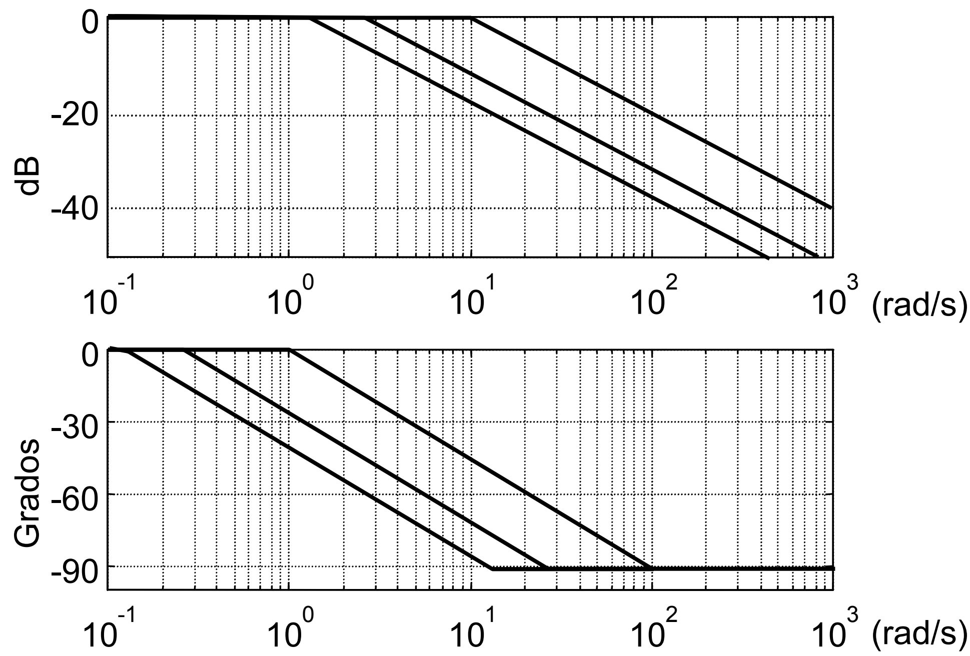
Asíntota a 0º una hasta $\dfrac{\omega_{e1}}{10} = 1 \text{rad/s}$

-45º en $\omega_{e1} = 10 \text{rad/s}$

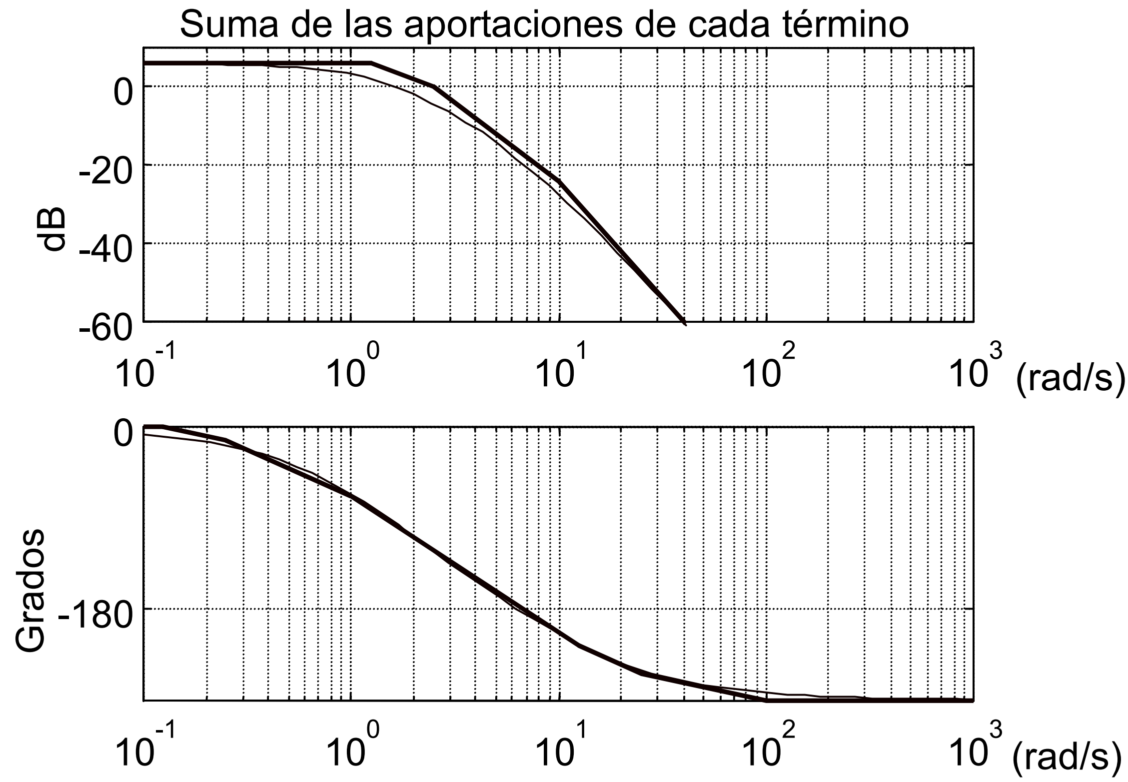
Asíntota a –90º a partir de $10 \cdot \omega_{e1} = 100 \text{rad/s}$



Representando conjuntamente las aportaciones de cada uno de los términos:

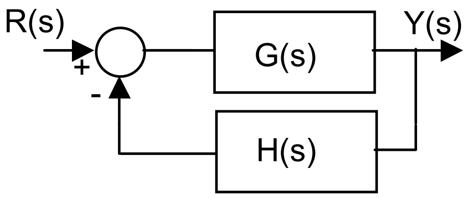


Y representando la suma de las aportaciones de cada uno de los téminos:



EJERCICIO 7.3.

Para el sistema de la figura siguiente:



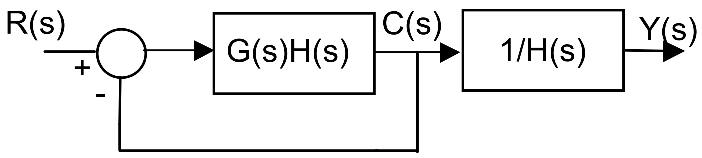
Donde la función de transferencia de lazo directo es: $G(s) = \dfrac{10}{s(s+10)}$

y la función de transferencia de la realimentación es: $H(s) = \dfrac{1}{(s+5)}$

Obtener la respuesta en frecuencia, en lazo cerrado, del sistema de la figura siguiente mediante el diagrama de Nichols. Indicar los valores de los parámetros más significativos de la respuesta en frecuencia anterior.

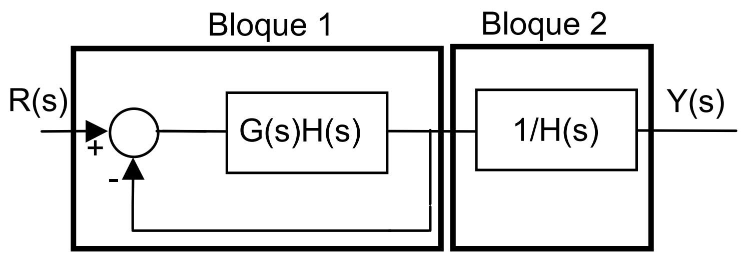
Mediante Nichols sólo se puede obtener la respuesta en lazo cerrado para el caso de que la realimentación sea unitaria. Por este motivo se tiene que modificar el diagrama de bloques hasta que quede con realimentación unidad.

Una forma posible es la mostrada en la siguiente figura.



Entonces, este sistema es equivalente al del enunciado, luego si obtenemos la respuesta en frecuencia para éste habremos obtenido la pedida.

Para calcular la respuesta en frecuencia mediante Bode y Nichols (métodos clásicos de control) consideramos que tenemos dos bloques es serie, de esta forma:



Sabemos que el módulo y la fase aportado por dos bloques en serie es el producto y la suma, respectivamente, de lo aportado por cada uno de ellos. Pero como, en este caso, vamos a trabajar con Bode y sabemos que representa los módulos en decibelios, también se sumarán los módulos. Ahora sólo debemos calcular las respuestas en frecuencia de cada bloque. Vemos cuales son los pasos necesarios:

- Bloque 1:
  - Bode de G(s)H(s).
  - Nichols, a partir del Bode de G(s)H(s).
  - Bode de lazo cerrado, a partir del Nichols.
- Bloque 2:
  - Bode de 1/H(s).

Respuesta en frecuencia del bloque:

- Bode de G(s)H(s)

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+10)(s+5)}$$

Que se puede poner como:

$$G(s)H(s) = \frac{0.2}{jw(1+0.1jw)(1+0.2jw)}$$

Aportación de cada término que la compone:

Ganancia:

Módulo: $M = 20\log(0.2) = -14\text{dB}$.

Fase: Cero.

Polo en origen:

Módulo: Recta de pendiente -20dB/dc y que pasa por 0dB para 1 rad/sg.

Fase: -90º.

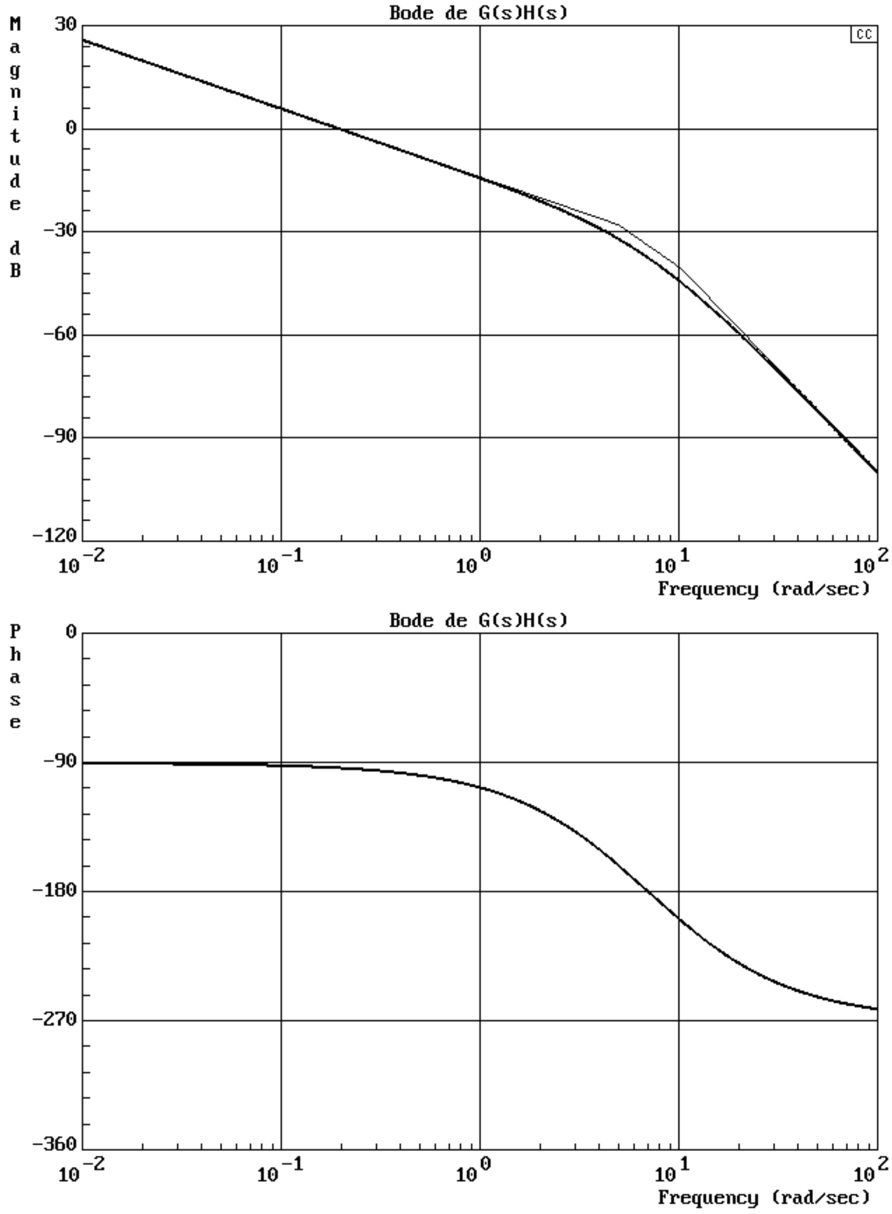
Polo en eje real (1+0.2jw):

Módulo: Recta de 0dB y Recta de pendiente -20 dB/dc.
Fase: 0º, -45º, y -90º.
Frecuencia esquina: We = 2 rad/sg.
Ajustes:-1db para We/2, -3dB para We y -1 dB para 2We.

Polo en eje real (1+0.1jw):

Módulo: Recta de 0dB y Recta de pendiente -20 dB/dc.
Fase: 0º, -45º, y -90º.
Frecuencia esquina = 10 rad/sg.
Ajustes:-1db para We/2, -3dB para We y -1 dB para 2We.

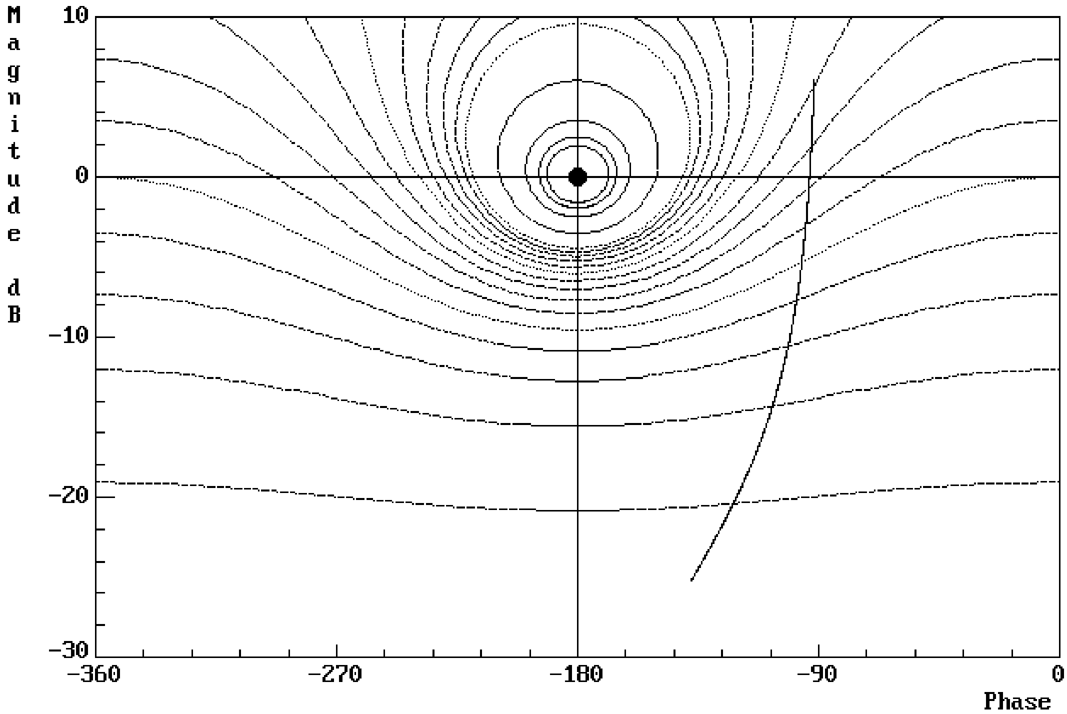
El Bode queda como se ve en la figura:



De aquí se va al diagrama de Black.

- Nichols:

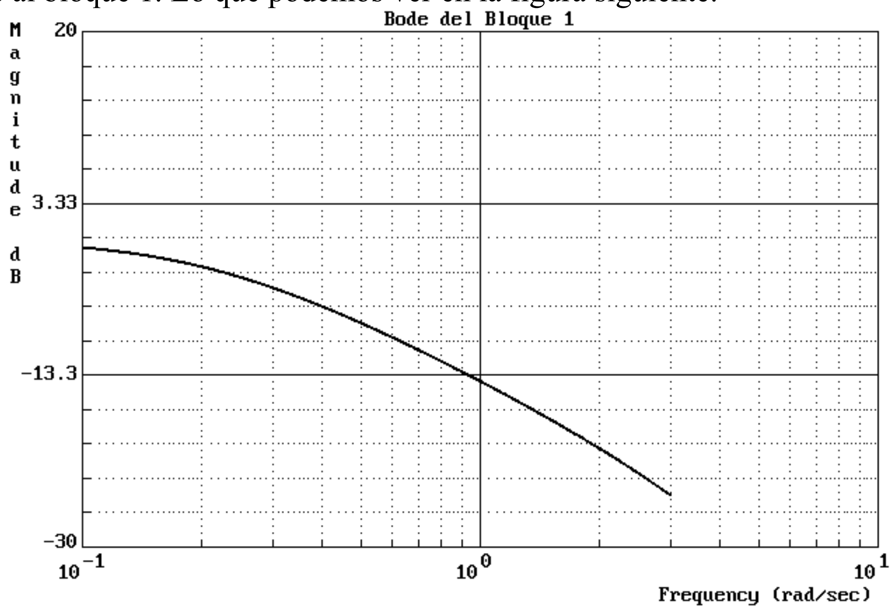
Ocurre que el ábaco de Black utilizado sólo tiene hasta -24 dB, con lo cual sólo se pueden tomar unos pocos valores en un intervalo de frecuencia que llega hasta los 3rad/sg. En la gráfica sólo se toman valores entre -0.1 y 3 rad/sg.

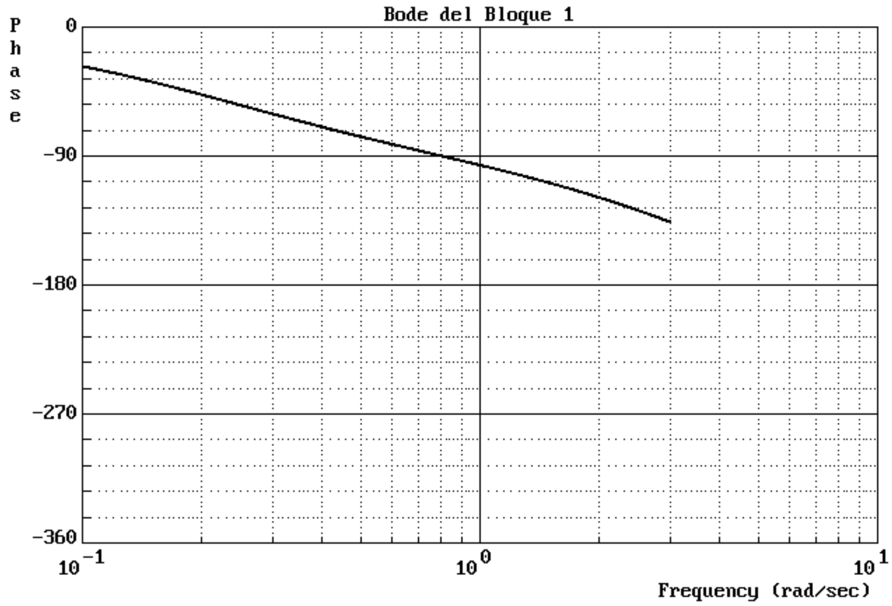


Debido a que sólo se van a tomar valores entre 0.1 y 3 rad/sg (se podrían haber tomado desde frecuencias más bajas que 0.1, pero no es de interés) sólo se va a poder obtener la respuesta del sistema total (Bloque1 y Bloque 2) para este intervalo de frecuencias.

- Bode del bloque 1:

Con los puntos obtenidos en Black volvemos al Bode para dibujar el lazo cerrado perteneciente al bloque 1. Lo que podemos ver en la figura siguiente.





- Respuesta en frecuencia del bloque 2:

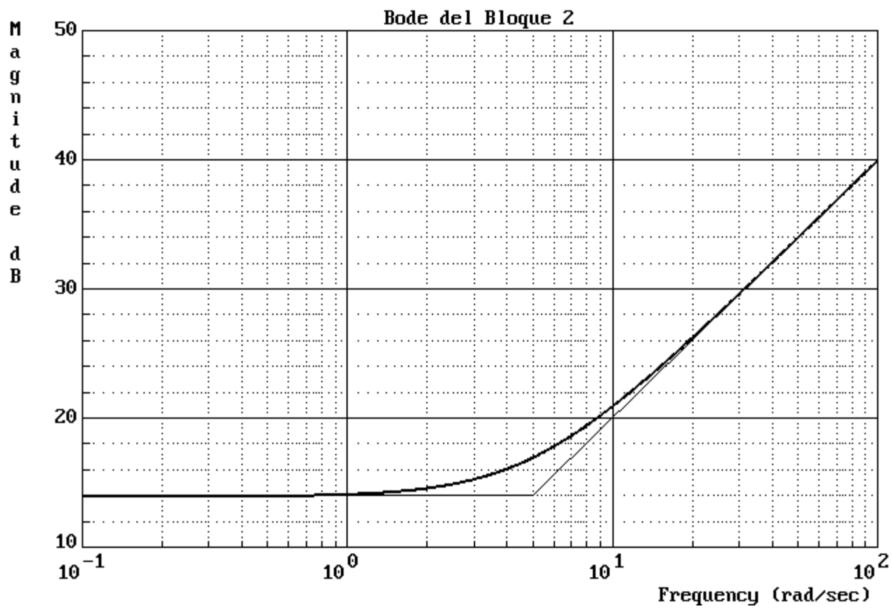
La función de transferencia del bloque 1 es:

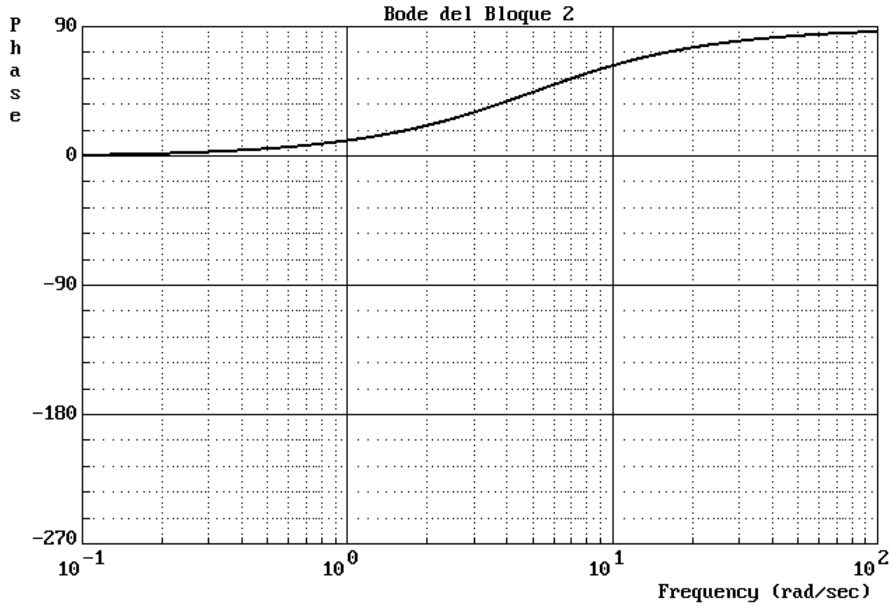
$$\frac{1}{H(s)} = (s+5)$$

Que poniéndola en frecuencia:

$$\frac{1}{H(jw)} = 5(1+0.2jw)$$

Realizamos su Bode:

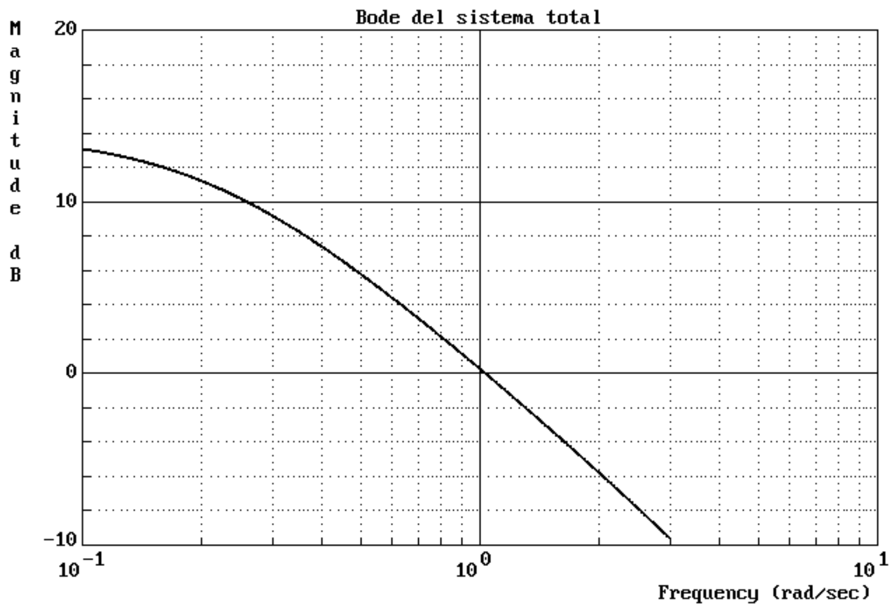




- <u>Respuesta en frecuencia del sistema total:</u>

Como se ha visto antes, la respuesta en frecuencia del sistema total es la suma de los Bodes del Bloque 1 y del Bloque 2. Ocurre, como también se ha visto antes, que esta respuesta sólo se puede obtener entre 0.1 y 3 rad/sg ya que lo ha limitado el gráfico de Black.

La respuesta total del sistema en este margen de frecuencias es la mostrada en la figura:



Los parámetros más interesantes van a ser:
La frecuencia de resonancia, el ancho de banda y la frecuencia de corte.
Desde el diagrama anterior se obtiene:

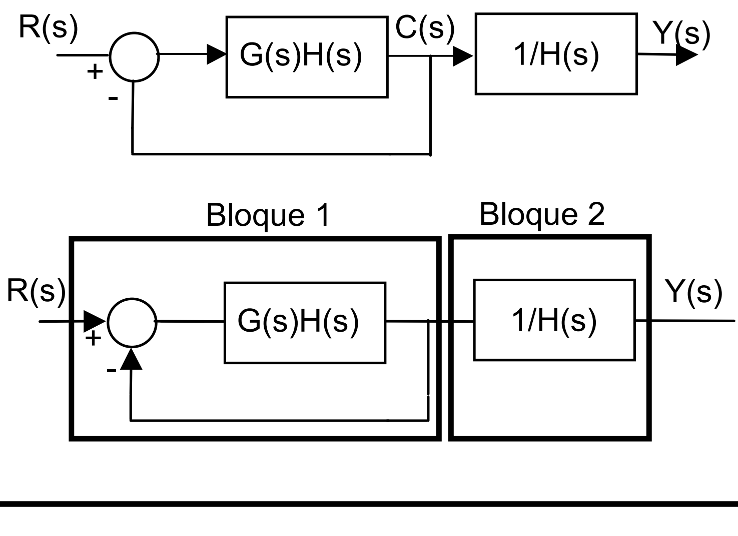
Frecuencia de resonancia no definida para este intervalo de espectro.
Ancho de banda desde 0 rad/sg hasta la frecuencia de corte.
Frecuencia de corte entorno a los 1.5 rad/sg.

EJERCICIO 7.4.

Repetir el ejercicio 7.3 para el sistema formado por las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)}$$



- Bloque 1:
  - Bode de G(s)H(s).
  - Nichols, a partir del Bode de G(s)H(s).
  - Bode de lazo cerrado, a partir del Nichols.
- Bloque 2:
  - Bode de 1/H(s).

- Respuesta en frecuencia del bloque 1: Bode de G(s)H(s) $G(s)H(s) = \dfrac{4}{s(s+1)(s+2)}$

Que se puede poner como: $G(s)H(s) = \dfrac{2}{jw(1+jw)(1+0.5jw)}$

Aportación de cada término que la compone:

Ganancia:

Módulo: $M = 20\log(2) \approx 6dB$.

Fase: Cero.

Polo en origen:

Módulo: Recta de pendiente -20dB/dc y que pasa por 0dB para 1 rad/sg.

Fase: -90º.

Polo en eje real (1+jw):

Módulo: Recta de 0dB y Recta de pendiente -20 dB/dc.

Fase: 0º, -45º, y -90º.

Frecuencia esquina: We = 1 rad/sg.

Ajustes:-1db para We/2, -3dB para We y -1 dB para 2We.

Polo en eje real (1+0.5jw):

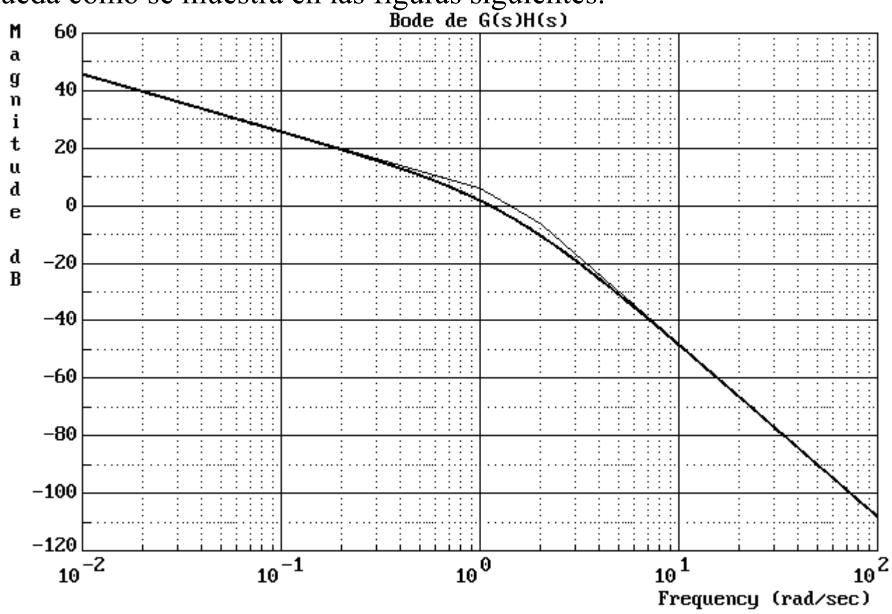
Módulo: Recta de 0dB y Recta de pendiente -20 dB/dc.

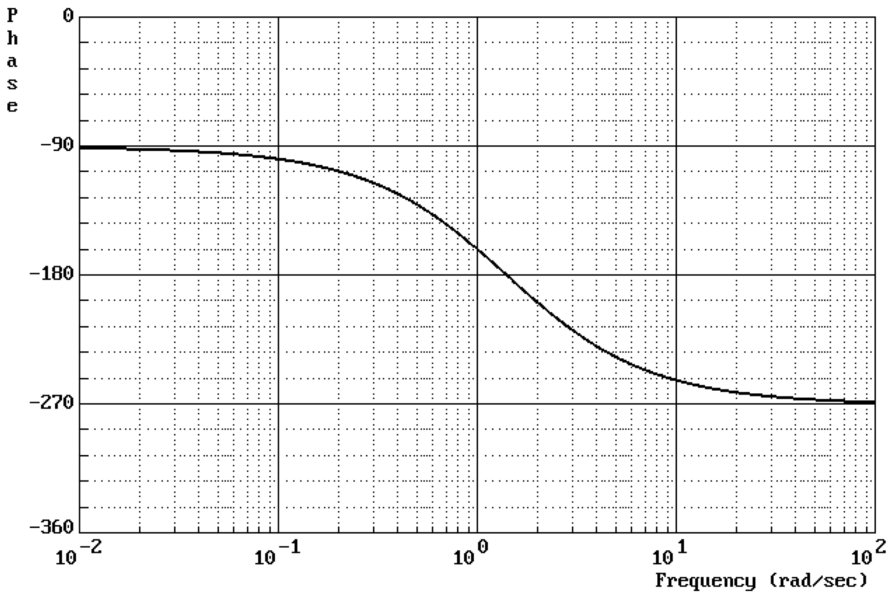
Fase: 0º, -45º, y -90º.

Frecuencia esquina = 2 rad/sg.

Ajustes:-1db para We/2, -3dB para We y -1 dB para 2We.

El Bode queda como se muestra en las figuras siguientes.

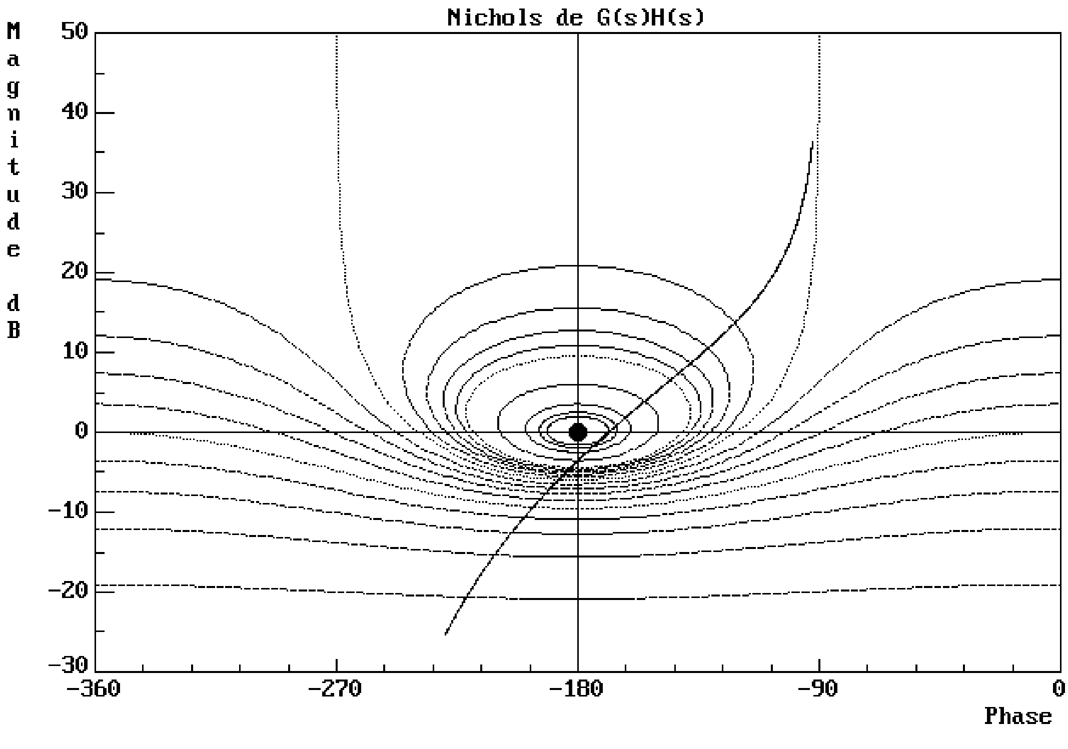




De aquí vamos al diagrama de Black.

- Nichols:

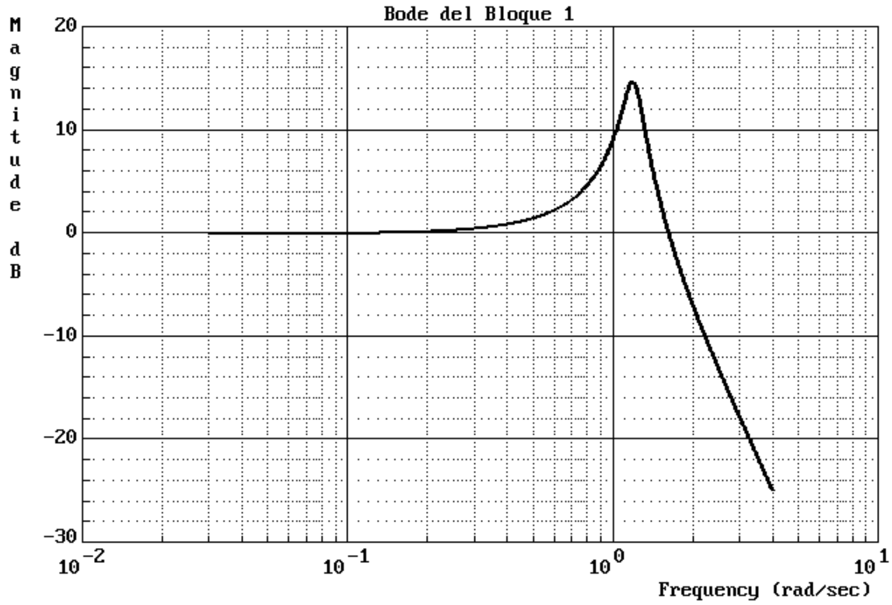
Ocurre que el ábaco de Black empleado sólo tiene hasta -24 dB, con lo cual sólo podemos tomar unos pocos valores en un intervalo de frecuencia que llega hasta los 3rad/sg. En la gráfica puede verse que sólo se toman valores entre 0.03 y 4 rad/sg.

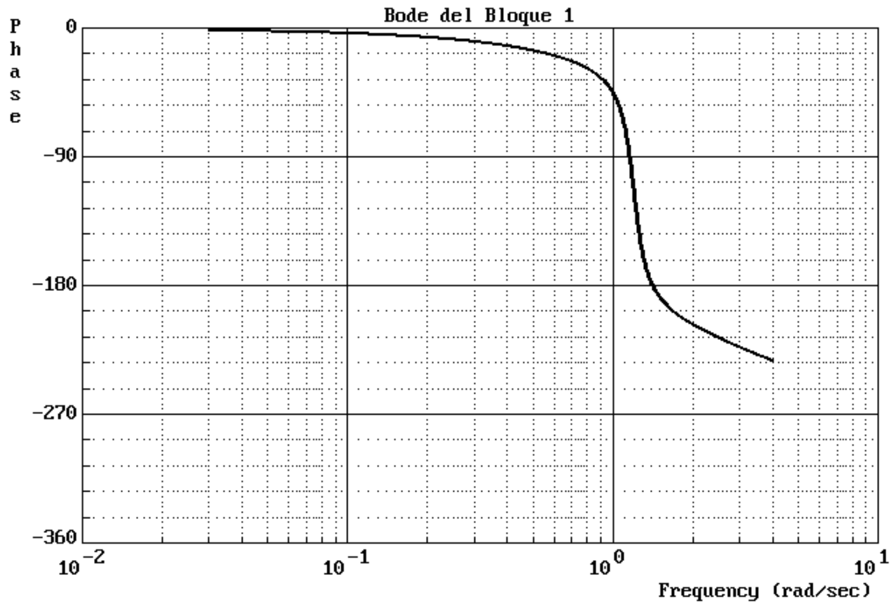


Debido a que sólo se van a tomar valores entre 0.03 y 4 rad/sg sólo se va a poder obtener la respuesta del sistema total (Bloque1 y Bloque2) para este intervalo de frecuencias.

- Bode del bloque1:

Con los puntos obtenidos en Black volvemos al diagrama de Bode para dibujar el lazo cerrado perteneciente al bloque 1. Lo que se puede ver en la figura siguiente.





- <u>Respuesta en frecuencia del blolque2</u>:

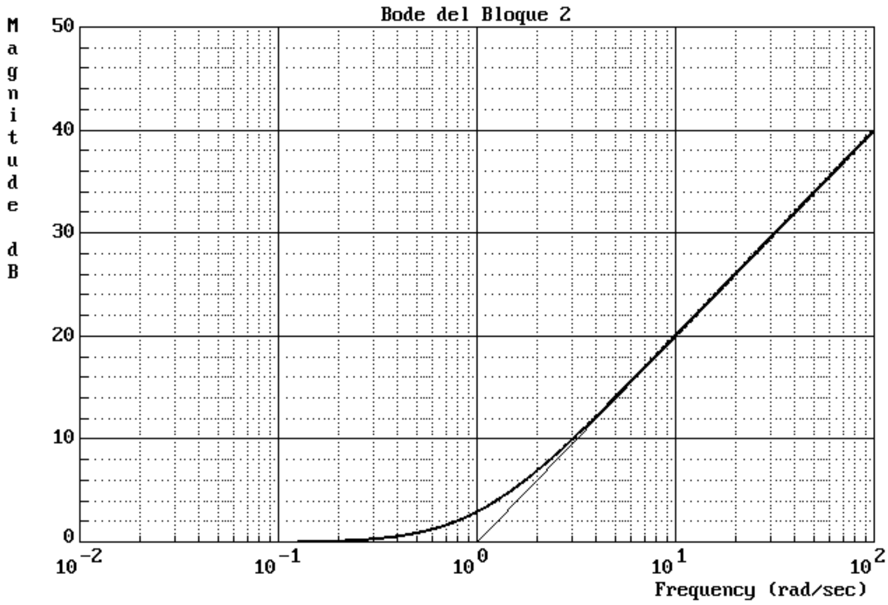
La función de transferencia del bloque 1 es:

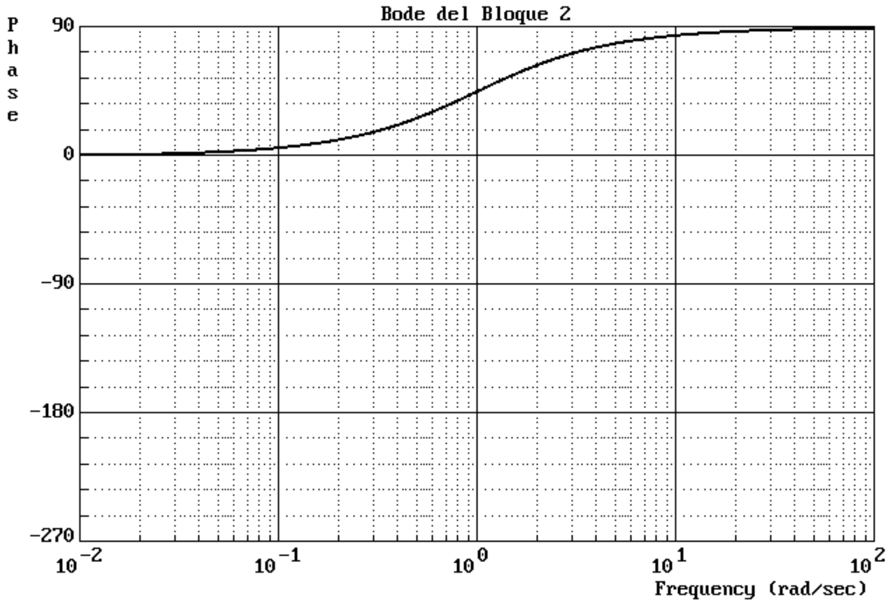
$$\frac{1}{H(s)} = (s+1)$$

Que poniéndola en frecuencia:

$$\frac{1}{H(jw)} = (1+jw)$$

Se representa el diagrama de Bode correspondiente.



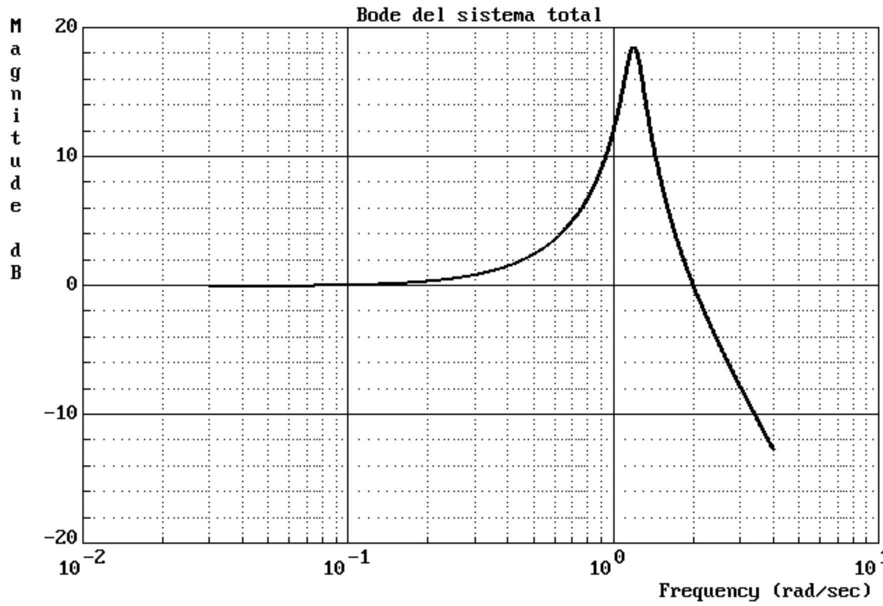


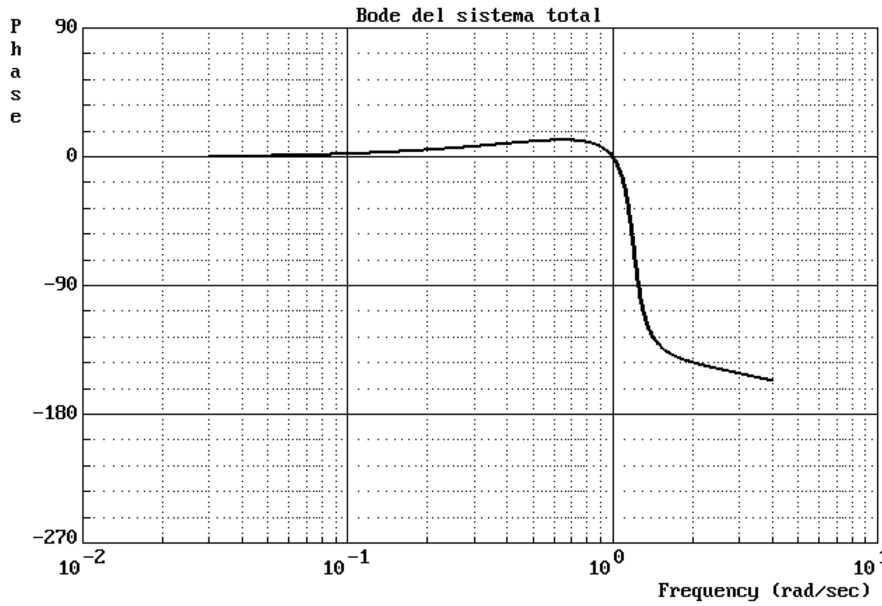
Como se ha visto antes, la respuesta en frecuencia del sistema total es la suma de los diagramas de Bode del Bloque 1 y del Bloque 2.

Ocurre, como también hemos visto antes, que esta respuesta sólo se puede obtener entre 0.03 y 4 rad/sg ya que nos lo ha limitado el gráfico de Black.

La respuesta total del sistema en este margen de frecuencias es la que está en la página siguiente.

- Respuesta en frecuencia del sistema total.





Del diagrama anterior obtenemos:

Frecuencia de resonancia : 1.2 rad/sg..

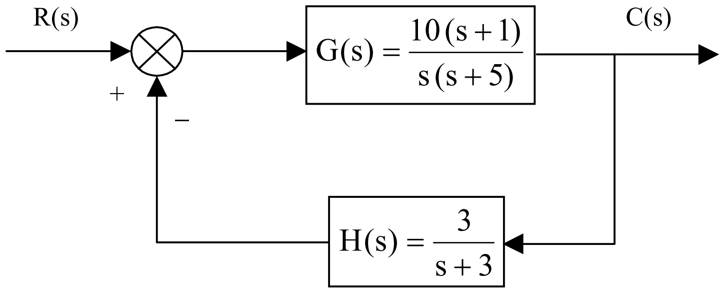
Ancho de Banda desde 0 rad/sg hasta la frecuencia de corte.

Frecuencia de corte entorno a los 2.3 rad/sg.

Ver que estos parámetros varían un poco en función de si se obtiene de los resultados obtenidos por los diagramas de Bode asintóticos o reales.

EJERCICIO 7.5.

En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control:



Dibujar los diagramas de Bode de la respuesta frecuencial de lazo cerrado.

Se comienza hallando la respuesta en frecuencia de un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s)\,H(s) = \frac{10\,(s+1)}{s\,(s+5)} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{30\,(s+1)}{s\,(s+3)\,(s+5)}$$

Pasando al dominio de la frecuencia:

$$G\,H(j\omega) = \frac{30\,(j\omega+1)}{(j\omega)\cdot 3\left(\dfrac{j\omega}{3}+1\right)\cdot 5\left(\dfrac{j\omega}{5}+1\right)} = \frac{2\,(j\omega+1)}{j\omega\left(\dfrac{j\omega}{3}+1\right)\left(\dfrac{j\omega}{5}+1\right)}$$

Se obtiene $K_{Bode} = 2$
frecuencias de corte: 1, 3 y 5 rad/s.

Tablas de pendientes:

DIAGRAMA DE AMPLITUD

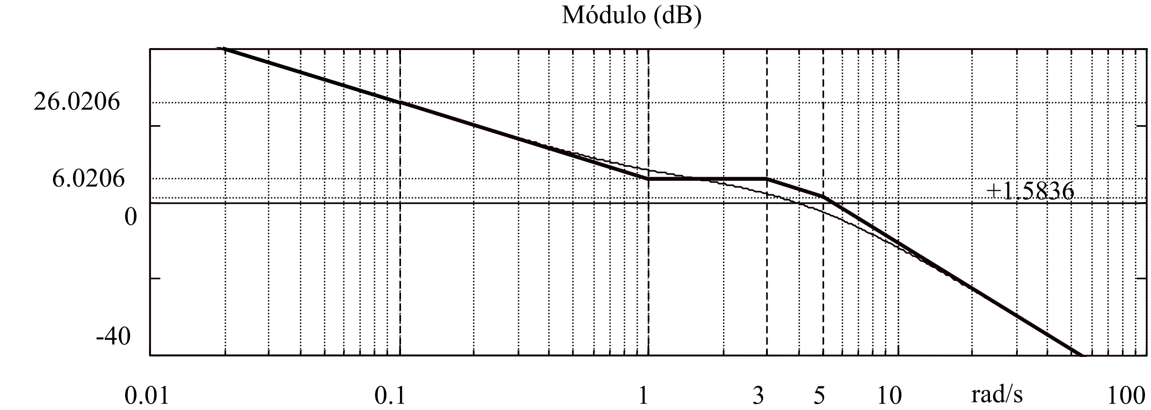
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$\dfrac{2}{j\omega}$	(0.1, 1]	H	-20 * tipo = -20
$\dfrac{2\,(j\omega+1)}{j\omega}$	[1, 3]	+20	0
$\dfrac{2\,(j\omega+1)}{j\omega\left(\dfrac{j\omega}{3}+1\right)}$	[3, 5]	-20	-20
$\dfrac{2\,(j\omega+1)}{j\omega\left(\dfrac{j\omega}{3}+1\right)\left(\dfrac{j\omega}{5}+1\right)}$	[5, 100)	-20	-40

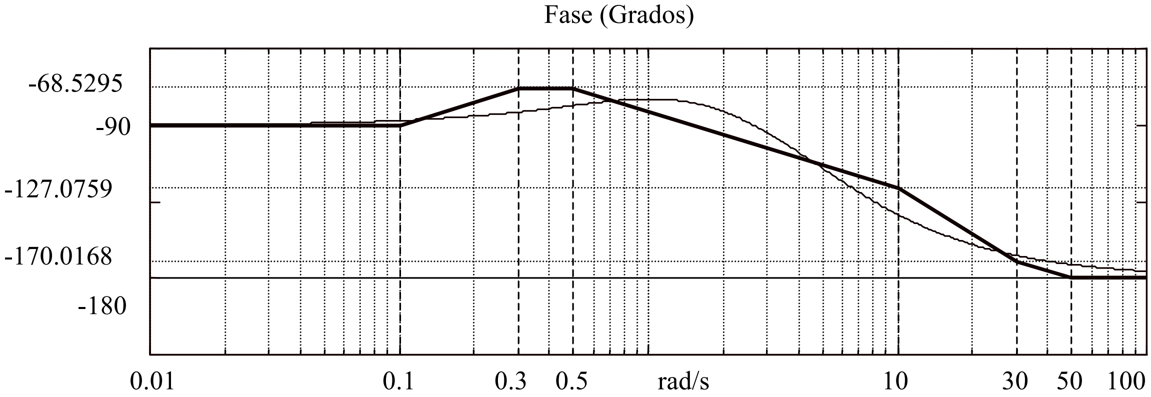
ℵ Aportación = $20 \cdot [\log K_{Bode} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 2 - \log 0.1] = 26.0206 \text{ dB}$

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (º)	Pendiente (º/dec)
$\frac{2}{j\omega}$	(0.01, 0.1]	-90º * tipo = -90º * 1 = -90º	0º
$\frac{2(j\omega+1)}{j\omega}$	[0.1, 0.3]	+45º	+45º
$\frac{2(j\omega+1)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)}$	[0.3, 0.5]	-45º	0º
$\frac{2(j\omega+1)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)}$	[0.5, 10]	+45º	-45º
$\frac{2}{j\omega\left(\frac{j\omega}{3}+1\right)\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)}$	[10, 30]	-45º	-90º
$\frac{2}{j\omega\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)}$	[30, 50]	+45º	-45º
$\frac{2}{j\omega}$	[50, 100)	+45º	0º

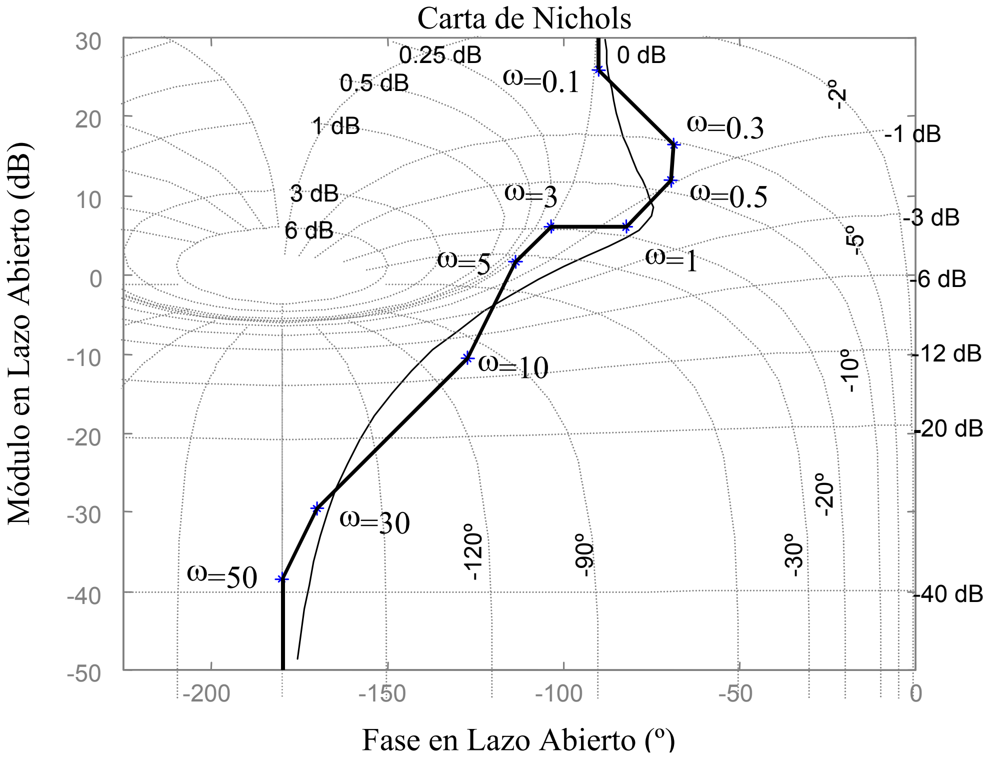
Con estos datos, ya se pueden dibujar los diagramas asintóticos de Bode.





Tomando valores de módulo y fase para cada valor de frecuencia, obtenemos la siguiente tabla de valores:

Frecuencia	Módulo (dB)	Fase (º)
0.01	46.0206	-90
0.1	26.0206	-90
0.3	16.4782	-68.5295
0.5	12.0412	-68.5295
1	6.0206	-82.0759
3	6.0206	-103.5464
5	1.5836	-113.5296
10	-10.4576	-127.0759
30	-29.5425	-170.0168
50	-38.4164	-180
100	-50.4576	-180



Se halla ahora la respuesta en frecuencia del bloque 2:

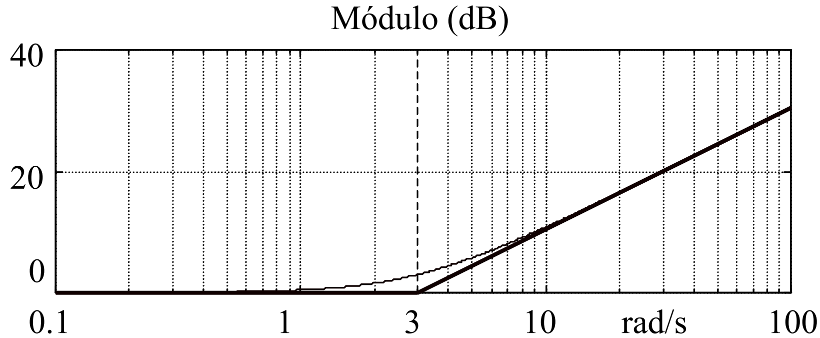
Su función de transferencia es: $\dfrac{1}{H(s)} = \dfrac{s+3}{3}$

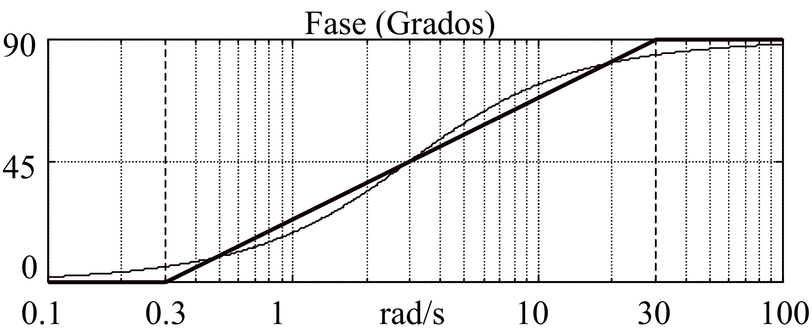
haciendo el cambio: $s \to j\omega$ se tiene: $\dfrac{1}{H(j\omega)} = \dfrac{j\omega + 3}{3} = \dfrac{j\omega}{3} + 1$

$K_B = 1$

Frecuencia de corte: 3

Luego los diagramas de Amplitud y Fase, quedan:

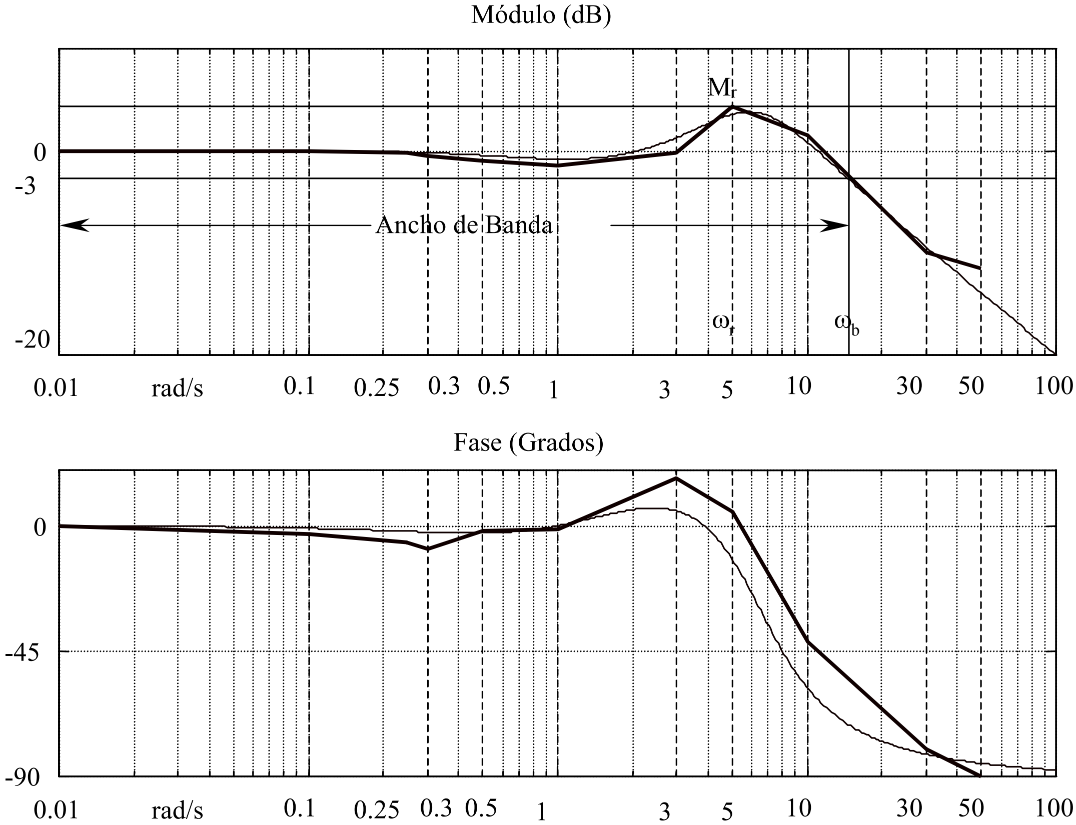




Ahora sumando ambas representaciones en frecuencia se obtiene la siguiente tabla:

Frecuencia (rad/s)	Módulo total (dB)	Fase total
ω = 0.01	0 + 0 = 0	0 + 0 = 0
ω = 0.1	0 + 0 = 0	-3 + 0 = -3
ω = 0.25	-0.25 + 0 = -0.25	-6 + 0 =-6
ω = 0.3	-0.55 + 0 = -0.55	-8 + 0 = -8
ω = 0.5	-1 + 0 = -1	-12 + 9.98 = -2.02
ω = 1	-1.5 + 0 = -1.5	-25 + 23.53 = -1.47
ω = 3	-0.2 + 0 = -0.2	-28 + 45 = 17
ω = 5	-0.1 + 4.44 = 4.34	-50 + 54.98 = 4.98
ω = 10	-9 + 10.46 = 1.46	-110 + 68.53 = -41.47
ω = 30	-30 + 20 = -10	-170 + 90 = -80
ω = 50	-36 + 24.44 = -11.56	-180 + 90 = -90

Representando dichos valores en los diagramas Módulo-Frecuencia y Fase-Frecuencia, tenemos la respuesta en frecuencia (asintóticos) en lazo Cerrado del sistema:



El ancho de Banda (BW) del sistema en lazo cerrado es la frecuencia en la cual la curva G(jω) intercepta al lugar geométrico M=0.707 (-3 dB). Luego de acuerdo con el gráfico el ancho de banda será aproximadamente de 15 $^{rad}/_{seg}$.

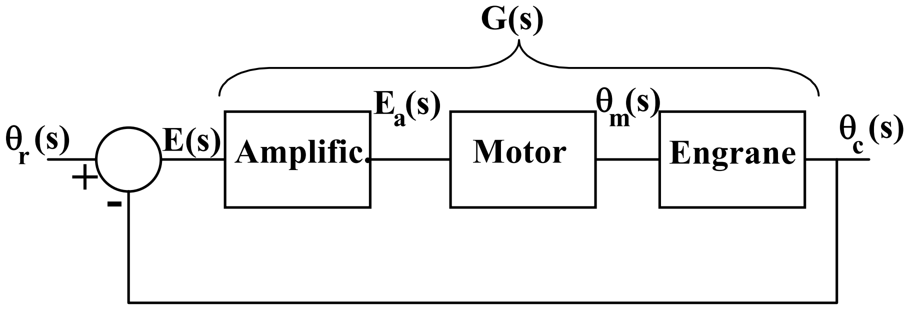
Para el pico de resonancia (M_r), obtenemos: $M_r = 4.34$ dB**.**

La frecuencia de resonancia (ω_r) corresponde con la frecuencia para la cual se produce el pico de resonancia, $\omega_r = 5$ $^{rad}/_{seg}$.

EJERCICIO 7.6.

Para el sistema del ejercicio 1.9. calcular la respuesta en frecuencia (Diagramas de Bode) del lazo abierto y del lazo cerrado.

En el ejercicio 1.9 se llegó a que el diagrama de bloques del sistema era:



Y la función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{50000}{s(s^2 + 50.5s + 1725)}$$

Sustituyendo s por jw y ordenando de forma conveniente:

$$G(jw) = \frac{28.98}{jw\left(1 + 0.029jw + \left(\frac{jw}{41.53}\right)^2\right)}$$

Aportación de cada término:

- <u>Ganancia</u>:
  - Módulo: $M = 20\log(28.98) = 29.2$ dB
  - Fase: 0º.

- <u>Polo en origen</u>:
  - Módulo: Recta de pendiente -20db/dc, pasa por 0 dB a la frecuencia de 1rad/sg.
  - Fase: Recta horizontal de -90º (constante con la frecuencia).

- <u>Polos Complejos conjugados</u>:
  - La forma del módulo y la fase depende del valor del amortiguamiento.
    - Valor del amortiguamiento: 0.6
    - Valor de la frecuencia natural : 41.53.

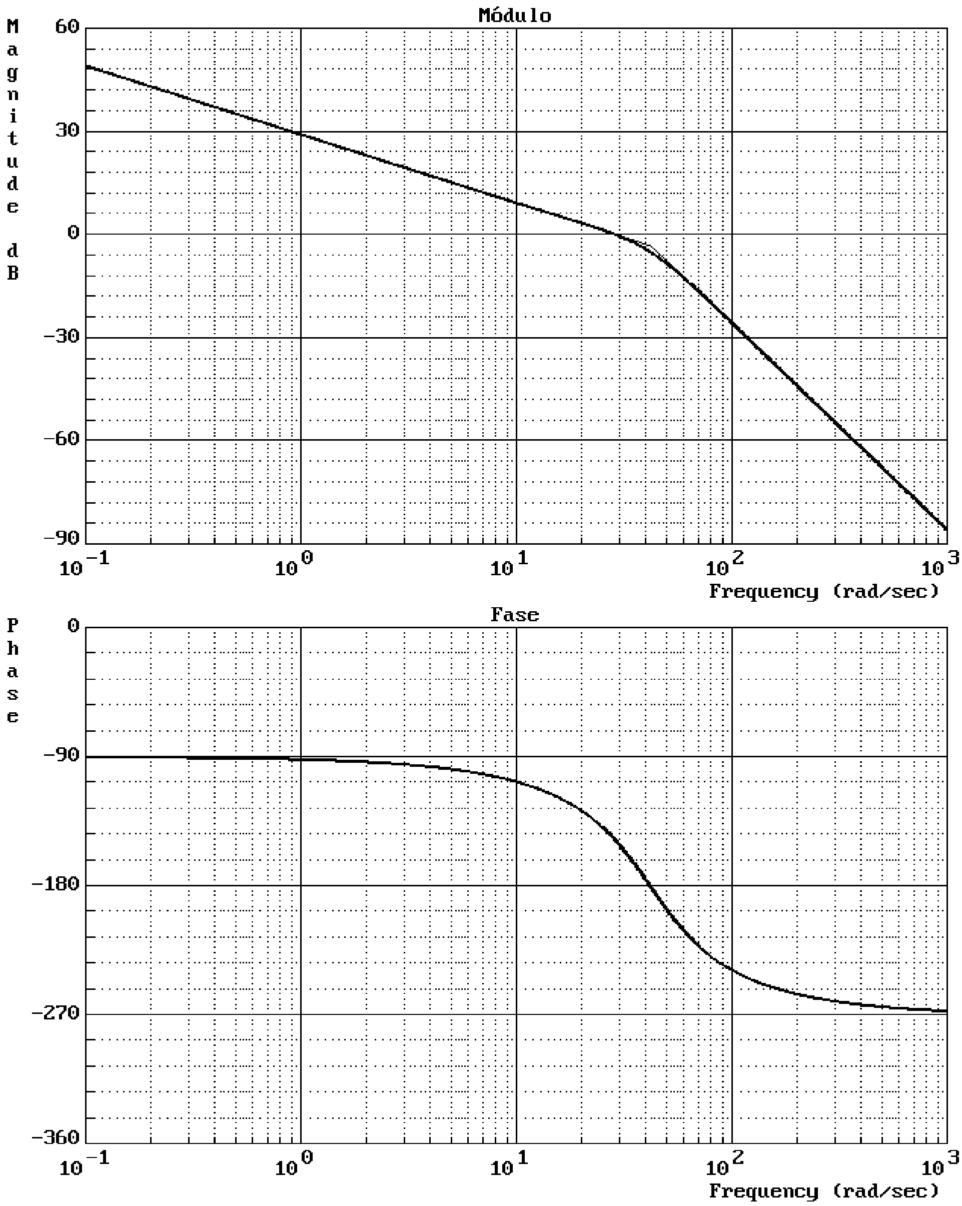
Módulo:

Asintóticamente: Recta de 0 db debajo de 41.53 rad/sg y recta de -40 db/dc por encima.
Correcciones (mediante curvas, para amortiguamiento de 0.6):
-2dB en wn y -0.5 dB para 0.6wn.

Fase:

Asintóticamente:
Recta de 0º una década por debajo de wn, -90º en wn y -180º una década por encima de wn.
Correcciones (mediante curvas, para amortiguamiento de 0.6):
-70º para 0.8wn, -30º para 0.4wn, -165º para 2wn.

Sumando las contribuciones de los tres términos se obtiene el siguiente diagrama de Bode.



En el diagrama de Bode podemos apreciar dos de los más importantes parámetros del sistema:

Margen de Fase = 30.6º a 29.2 rad/sg.
Margen de Ganancia = 4.82 db a 41.5 rad/sg.