

TEMA 2 ESPACIOS VECTORIALES. PROPIEDADES.(2019_20)

2.1 ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: Sea $O \neq V$ conjunto,

$(K, +, \cdot)$ cuerpo, "+" ley de composición interna,

"." ley de composición externa en V con dominio de operadores en K

$(V, +, \cdot K)$ es un **espacio vectorial sobre K** si:

1) $(V, +)$ grupo conmutativo

2) Además : i) $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V, \forall \lambda \in K$

ii) $(\lambda + \mu)\bar{u} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{u} \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall \bar{u} \in V$

iii) $(\lambda\mu)\bar{u} = \lambda(\mu\bar{u}) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall \bar{u} \in V$

iv) $1.\bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V$

Notación: 1) El cuerpo K : **cuerpo base** ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C})

2) Elementos de V : **vectores** $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \dots$ 3) Elementos de K : **escalares** λ, μ, \dots

EJEMPLOS: 1) El e.v. de los **vectores libres del espacio**.

2) El **e.v. nulo**. 3) Todo cuerpo es e.v. sobre si mismo.

4) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es e.v. sobre \mathbb{R}

2.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: $(V, +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K , $U \subset V$, $U \neq O$

U es un subespacio vectorial de V si

$(U, +, \cdot K)$ es un espacio vectorial sobre K

PROPOSICIÓN: (caracterización de s.v.)

Sea $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre K , $U \subset V$, $U \neq O$

U es un subespacio vectorial de V \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u} + \bar{v} \in U & \forall \bar{u}, \bar{v} \in U \\ \lambda\bar{u} \in U & \forall \bar{u} \in U, \forall \lambda \in K \end{cases} \Leftrightarrow \lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \in U \text{ donde } \bar{u}, \bar{v} \in U, \lambda, \mu \in K$$

OBSERVACIÓN: U es un s.v. de $V \Rightarrow \bar{0} \in U$

EJEMPLO: (Prb 1 Hoja 2_01)

1) Sea $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

$O = \{\bar{0}\}$ es s.v. de V . y V es s.v. de si mismo.

2) $U = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}$ es s.v. de \mathbb{R}^2

3) $U = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ es s.v. de \mathbb{R}^2

4) En \mathbb{R}^2 , $U = \{\text{vectores con origen en } O \text{ y extremo en la recta } r\}$

donde r es una recta que pasa por el origen. **U es un s.v. de \mathbb{R}^2**

5) En \mathbb{R}^2 , $A = \{\text{vectores con origen } O \text{ y extremo en la recta } r\} \cup$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

2.3 OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES:

INTERSECCION DE S.V.

DEFINICIÓN: Sea V e.v. sobre K , y sean U_1 y U_2 s.v de V

Se define $U_1 \cap U_2 = \{\bar{u} \in V / \bar{u} \in U_1 \text{ y } \bar{u} \in U_2\}$

PROPOSICIÓN: Sea V e.v. sobre K , y sean U_1 y U_2 s.v de V

Se puede asegurar que su intersección $U_1 \cap U_2$ es también un s.v. de V

De forma general

DEFINICIÓN Sea V e.v. sobre K , y sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia de s.v de V

Se define $\bigcap_{i \in I} U_i = \{\bar{u} \in V / \bar{u} \in U_i\}$

PROPOSICIÓN: Si V e.v. sobre K , y $\{U_i : i \in I\}$ una familia de s.v de V .

Entonces la intersección $\bigcap_{i \in I} U_i$ es también un s.v. de V .

EJEMPLO : (Prb 2 Hoja 2_0)

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e.v. sobre \mathbb{R} . Comprobar que son s.v. de \mathbb{R}^3

a) $U_1 = \{(x_1, x_2, 0) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, b) $U_2 = \{(x_1, 0, x_3) / x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ y c) $U_1 \cap U_2$

OBSERVACIÓN: La unión de s.v. no es en general un s.v.

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\} \text{ es s.v. de } \mathbb{R}^2 \\ U_2 = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \text{ es s.v. de } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \text{ Pero } U_1 \cup U_2 \text{ no es s.v. de } \mathbb{R}^2$$

SUMA DE S.V.

DEFINICIÓN : Sea V e.v. sobre K , y sean U_1 y U_2 s.v de V

Se define $U_1 + U_2 = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 : \bar{u}_1 \in U_1 \text{ y } \bar{u}_2 \in U_2\}$

PROPOSICIÓN: Si V es e.v. sobre K , y U_1, U_2 son s.v. de V .

Entonces $U_1 + U_2$ es también un s.v. de V .

En general

DEFINICIÓN : Sea V e.v. sobre K , y sean U_1, \dots, U_n s.v. de V

Se define $\sum_{i=1}^n U_i = \{\bar{u}_1 + \dots + \bar{u}_n : \bar{u}_1 \in U_1, \dots, \bar{u}_n \in U_n\}$

PROPOSICIÓN: Sea V e.v. sobre K , y sean U_1, \dots, U_n s.v. de V

Entonces su suma $\sum_{i=1}^n U_i$ es s.v. de V es también un s.v. de V .

EJEMPLO: (Prb 3 Hoja 2_0) Sea $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e.v. sobre \mathbb{R} .

Comprobar que U_1 y U_2 son s.v. de \mathbb{R}^3 y determinar $U_1 + U_2$

1) $U_1 = \{(x, 0, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ y $U_2 = \{(0, y, 0) / y \in \mathbb{R}\}$

2) $U_1 = \{(\alpha, 2\alpha, 0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $U_2 = \{(\beta, 0, -\beta) / \beta \in \mathbb{R}\}$

OBSERVACIÓN: Sea V e.v. sobre K ; U_1, U_2 s.v. de V .

$U_1 \cap U_2$ es el mayor s.v. contenido en U_1 y U_2 .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2.4 SUMA DIRECTA. ESPACIOS SUPLEMENTARIOS

DEFINICIÓN: Sea V e.v. sobre K y sean U_1, \dots, U_n s.v. de V .

Se dice que $\sum_{i=1}^n U_i$ es **suma directa** y se nota $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

si cualquier vector del e.v. suma **puede expresarse**

de forma única como suma de los e.v. sumandos.

PROPOSICIÓN: Sea V e.v. sobre K y sean U_1, \dots, U_n s.v. de V .

1) Si $U_1 + \dots + U_n$ es **suma directa** entonces $U_i \cap U_j = \{\vec{0}\}$ si $i \neq j$

2) El recíproco no es cierto en general.

Sin embargo en el **caso particular de dos s.v**

PROPOSICIÓN: Si V e.v. sobre K y son U_1, U_2 s.v. de V .

$U_1 + U_2$ suma directa $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

Se expresa $U_1 \oplus U_2$

ESPACIOS SUPLEMENTARIOS

DEFINICIÓN: Sea V e.v. sobre K ; U_1, U_2 s.v. de V

Si $V = U_1 \oplus U_2$ se dice que U_1 y U_2 son **s.v. suplementarios de V**

Y evidentemente: $V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = U_1 + U_2 \\ U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\} \end{cases}$

EJEMPLOS: (Prb 4 Hoja 2_0)

Obtener $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ y razonar si son o no s.v. suplementarios.

1) $U_1 = \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\}$ s.v de \mathbb{R}^2 , $U_2 = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ s.v. de \mathbb{R}^2

2) $U_1 = \{(x, y, 0)/x, y \in \mathbb{R}\}$ s.v de \mathbb{R}^3 , $U_2 = \{(0, 0, z)/z \in \mathbb{R}\}$ s.v de \mathbb{R}^3

3) $U_1 = \{(x, y, 0)/x, y \in \mathbb{R}\}$ s.v de \mathbb{R}^3 , $U_2 = \{(x, 0, z)/x, z \in \mathbb{R}\}$ s.v de \mathbb{R}^3

2.5 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN: Sea V un e.v. sobre K ,

y consideremos el conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\} \subset V$.

Se define **combinación lineal (C.L)** de $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ a toda expresión de la forma :

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n \quad \text{donde } \lambda_i \in K, \quad i = 1, \dots, n$$

DEFINICIÓN: Sea V e.v. sobre K y consideremos el conjunto $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\} \subset V$.

Se dice que \bar{v} es **combinación lineal ó depende linealmente** de $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ si

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \quad \text{tal que.} \quad \bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n$$

OBSERVACIONES:

1) Cualquier vector de $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ depende linealmente de ellos mismos.

$$\bar{u}_i = 0 \cdot \bar{u}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{u}_{i-1} + 1 \cdot \bar{u}_i + 0 \cdot \bar{u}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2) $\bar{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$.

$$\bar{0} = 0 \cdot \bar{u}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{u}_i + \dots + 0 \cdot \bar{u}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$3) (\mathbb{R}^4, +, \cdot) \text{ e.v. sobre } \mathbb{R}, \quad \underbrace{(0, -2, -1, 0)}_{\bar{v}} = \underbrace{(3, -1, 0, 1)}_{\bar{u}_1} - 2 \underbrace{(1, 0, 1, 0)}_{\bar{u}_2} - \underbrace{(1, 1, -1, 1)}_{\bar{u}_3}$$

\bar{v} es combinación lineal de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$

DEFINICIÓN: Sean V e.v. sobre K y el conjunto finito de vectores A

$A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \subset V$. Se define **s.v engendrado o generado** por A a

$L(A) = L(\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}) = \{\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \mid \lambda_i \in K, i = 1, \dots, n\}$

Se dice en ese caso que A es **sistema generador (S.G.)**

PROPOSICIÓN: Sean V e.v. sobre K , y $A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \subset V$. Se prueba que

$L(A) = L(\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}) = \{\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \mid \lambda_i \in K, i = 1, \dots, n\}$

es un **subespacio vectorial (s.v.)**

EJEMPLOS: (Prb 5 Hoja 2_0)

Obtener $L(A_i)$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas en cada caso.

1) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ e.v. sobre \mathbb{R} , $A_1 = \{(-1, 2)\}$, $A_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

2) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e.v. sobre \mathbb{R} , $A_3 = \{\bar{u}_1 = (1, 0, 0), \bar{u}_2 = (0, 1, 0), \bar{u}_3 = (0, 0, 1)\}$

$$A_4 = \{\bar{u}_1 = (1, 0, 0), \bar{u}_2 = (0, 1, 0)\}, \quad A_5 = \{\bar{u}_1 = (1, 0, 0)\},$$

3) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e.v. sobre \mathbb{R} , $A_6 = \{\bar{u}_1 = (1, 1, 1), \bar{u}_2 = (-1, 2, 3), \bar{u}_3 = (1, 4, 5)\}$, $A_7 = \{\bar{u}_1 = (1, 1, 1), \bar{u}_2 = (-1, 2, 3)\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2.6 INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

OBSERVACIONES:

1) Observemos para cualquier conjunto de vectores de $(V, +, \cdot K)$, $S = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, el vector nulo $\bar{0}$ es siempre C.L. de los vectores de S .

$$\text{En efecto } \bar{0} = 0\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + \dots + 0\bar{u}_n$$

2) Consideros ahora los vectores de \mathbb{R}^3 , $S = \{(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, 2, 0)\}$ como en 1) se obtiene la c.l. $(0, 0, 0) = 0(3, 2, 4) - 0(1, 0, 2) - 0(1, 2, 0)$

pero también $(0, 0, 0) = (3, 2, 4) - 2(1, 0, 2) - (1, 2, 0)$

y tambien $(0, 0, 0) = \frac{1}{2}(3, 2, 4) - (1, 0, 2) - \frac{1}{2}(1, 2, 0)$

Observemos por tanto que para este conjunto de vectores S , existen **distintas C.L.** que obtienen el vector $\bar{0}$. Se dice en este caso que los vectores $S = \{(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, 2, 0)\}$ forman un sistema **linealmente dependiente**.

DEFINICIÓN:

Los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ son **linealmente independientes (L.I.)**

si y solo si (por definición)

$$\bar{0} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_n\bar{u}_n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Si los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ **no son L.I.**

se dice que son **linealmente dependientes (L.D.)**

DEFINICIÓN:

Los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ son **linealmente dependientes (L.D.)**

si y solo si (por definición)

Existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ **no todos nulos** tales que $\bar{0} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_n\bar{u}_n$

EJEMPLO

En \mathbb{R}^2 los vectores $\{(1, 2), (0, 1)\}$ son l.i. y $\{(1, 2), (0, 1), (1, 1)\}$ son l.d.

PROPOSICIÓN: Propiedades de la dependencia lineal

Sea V un e.v. sobre K . Se verifican las siguientes propiedades

- 1) $\bar{0}$ es C.L. de cualquier sistema de vectores.
- 2) Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ entonces $\{\bar{u}\}$ es L.I.
- 3) Cualquier sistema de vectores que contenga el vector $\bar{0}$ es L.D.
- 4) Un conjunto con dos vectores iguales forma un sistema L.D.
- 5) Añadiendo vectores a un conjunto L.D. se obtiene un conjunto L.D.
- 6) Cualquier subconjunto de un conjunto L.I. es un conjunto L.I.

EJEMPLOS: Recordar Prb 5 Hoja 2_0)

TEOREMA de la dependencia lineal:

Un conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es L.D. si al menos

uno de ellos es combinación C. L. de los demás

EJ: (Prb 6 Hoja 2_0) Probar si los siguientes sistemas de vectores son o no L.D.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

2.7 BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

DEFINICIÓN El conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ forman una **base** del espacio vectorial $(V, +, \cdot K)$ si es un **sistema generador (S.G.)** que es **L.I.**, es decir,

$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es **base** de $V \Leftrightarrow B$ es **S.G.** y B es **L.I.**

Se puede afirmar por tanto, para que B sea una **base** de V debe verificarse

I) $\forall \bar{u} \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ con $\bar{u} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n$

II) $\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

EJEMPLO: (Prb 7 Hoja 2_0) En \mathbb{R}^3

1) $B = \{(1, 0, 1), (1, -1, 1), (2, 1, 2)\}$ **no forman una base** son L.D.

2) $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ **es una base** L.I. que es S.G.

3) En \mathbb{R}^3 $B_1 = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (-3, 2, 1)\}, B_2 = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (3, 4, 5)\},$

$B_3 = \{(1, -1, 0), (1, 2, 7), (1, 2, 1), (1, 0, 1)\}, B_4 = \{(0, 0, 0), (1, 2, 3)\}$

DEFINICIÓN: Se dice que un e.v. es de **dimensión finita** si y solo si tiene un **sistema generador finito**

TEOREMA :

Todo e.v de dimensión finita distinto de $\{\bar{0}\}$, tiene al menos una base

TEOREMA : Todas las bases de un e.v. de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

DEFINICIÓN: La **dimensión de un e.v** de dimensión finita es el número de vectores de cualquiera de sus bases

Si la dimensión del e.v. V es n se designará por V_n

EJEMPLO: Bases canónicas

a) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ **es una base** de \mathbb{R}^3 .

b) $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ **es una base** de \mathbb{R}^4 .

Luego $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ y $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

EJEMPLO: (Prb 8 Hoja 2_0) Comprobar que B es una base del e.v. dado

a) $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ **es una base** de \mathbb{R}^3 .

b) $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ **es una base** de \mathbb{R}^4 .

Luego $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ y $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

TEOREMA : extensión a una base

Sea el conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k\}$ L.I. del espacio

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

DEFINICIÓN: coordenadas de un vector

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ de la C.L. del vector \bar{u} , **únicos** respecto de la base B , se denominan **coordenadas del vector** \bar{u} en esa base.

EJEMPLO :(Prb9 Hj 2_0)

Consideremos las bases B de R^3 y R^4 del Prb8 anterior

a) $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ **es una base** de R^3 .

b) $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ **es una base** de R^4 .

Obtener las coordenadas de los vectores \bar{v} en la base B conociendo sus coordenadas en la base canónica

a) $\bar{v} = (2, -2, 0)$ **b)** $\bar{v} = (1, -2, 0, 1)$

TEOREMA : dimensión y suma de subespacios

Si U_1 y U_2 son subespacios de $(V_n, +, \cdot K)$, se verifica que

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

TEOREMA : dimensión y suma de subespacios

Si U_1 y U_2 son subespacios de $(V_n, +, \cdot K)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

se verifica $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

EJEMPLO :(Prb10 Hoja 2_0)

Consideremos los s.v. de R^4

$U = L(\{(1, -1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\})$

$$V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas y una base de U y V .

b) Determinar $U + V$ y $U \cap V$ y obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas y una base de U y V .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Observemos que en las columnas de matriz P

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_B$$
 son las coordenadas de \bar{v}_1 en B.

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_B$$
 son las coordenadas de \bar{v}_2 en B

$$\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_B$$
 son las coordenadas de \bar{v}_n en B

EJEMPLO : (Prb11 Hoja 2_0 y Prb14 Hoja 2_2)

A) Consideramos el e.v. \mathbb{R}^2 , las bases $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

siendo

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = c_{11}\bar{u}_1 + c_{21}\bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 = c_{12}\bar{u}_1 + c_{22}\bar{u}_2 \end{cases}$$

Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a B.

B) En \mathbb{R}^2 , $B = C_{\mathbb{R}^2}$, $B' = \{\bar{u}_1 = (1, 1)_{C_{\mathbb{R}^2}}, \bar{u}_2 = (1, 0)_{C_{\mathbb{R}^2}}\}$ y

$$B'' = \{\bar{v}_1 = (1, 2)_{C_{\mathbb{R}^2}}, \bar{v}_2 = (-1, 1)_{C_{\mathbb{R}^2}}\}$$

b₁ Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a $C_{\mathbb{R}^2}$ y de $C_{\mathbb{R}^2}$ a B'

b₂ Obtener las ecuaciones del cambio de base B'' a $C_{\mathbb{R}^2}$ y de $C_{\mathbb{R}^2}$ a B''

b₃ Obtener las ecuaciones del cambio de base B'' a B' y de B' a B''

EJEMPLO : (Prb12 Hoja 2_0 y Prb15 Hoja 2_2)

Consideremos en \mathbb{R}^3 la base canónica $C_{\mathbb{R}^3}$ y las bases

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}, B' = \{(1, 3, 2), (0, 1, -1), (1, 0, 0)\}.$$

i) Ecuaciones del cambio de base de la base B y B' a la base $C_{\mathbb{R}^3}$.

ii) Matriz del cambio de coordenadas de $C_{\mathbb{R}^3}$ a B y de $C_{\mathbb{R}^3}$ a B'

ii) Coord del vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ en B si $(1, 0, 3)_{C_{\mathbb{R}^3}}$ son sus coord en la base $C_{\mathbb{R}^3}$.

iii) Coord del vector $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ en $C_{\mathbb{R}^3}$ si $(-1, 1, 2)_B$ son sus coordenadas en B.

iv) Matriz del cambio de base de B a B' y la matriz del cambio B' a B.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99