Teoría de la Comunicación

Problemas de repaso de procesos estocásticos

Ejercicio 1
Sean X e Y dos VA.s independientes entre sí y distribuidas ambas de forma gaussiana con media 0 y varianza 1/2. Calcule la fdp de Z, siendo $Z = X + Y$.

Ejercicio 2
Sean X e Y dos VA.s independientes entre sí y distribuidas ambas de forma uniforme U(1,2). Calcule el valor medio de Z = XY.

Ejercicio 3
Sean X e Y dos VA.s discretas independientes entre sí y distribuidas ambas de forma uniforme U(1,10). Si $f_{xy}(x,y)$ es la función de masa conjunta, calcule $f_{xy}(2,5)$ y $f_{xy}(2,11)$.

Ejercicio 4
Sea el proceso estocástico $X[n]$ definido por el conjunto de todas las posibles realizaciones $x[n]$, $1 \leq n \leq 10$, generadas mediante 10 lanzamientos independientes de un dado de 6 caras y valores $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Obtenga:

a) La función de distribución de la magnitud de $X[n]$ en el instante de tiempo n_1. ¿Cuál es la probabilidad de observar una realización tal que $x[1] = 3$?
b) La fdp conjunta en los instantes de tiempo n_1 y n_2. ¿Cuál es la probabilidad de observar una realización tal que $x[1] = 3$ y $x[10] = 3$?
c) La probabilidad de obtener una realización $x[n] = 1$, para todo $1 \leq n \leq 10$.
d) La probabilidad de obtener una realización $x[n] > 3$, para todo $1 \leq n \leq 10$.

Ejercicio 5
Sea el proceso estocástico $X[n]$ definido por el conjunto de todas las posibles realizaciones $x[n]$, generadas mediante medidas independientes de un proceso uniforme cuyos valores se distribuyen como X~U(-1,1). Obtenga:

a) La función de distribución de la magnitud de $X[n]$ en el instante de tiempo n_1.
b) La función de distribución de la magnitud conjunta de $X[n]$ en los instantes de tiempo n_1 y n_2, donde $n_1 \neq n_2$.
c) $P(0 < X[n_1] \leq 0.5)$ dado un instante de tiempo n_1.
d) $P(0 < X[n_1] \leq 0.5,\ 0 < X[n_2] \leq 0.5)$, dados dos instantes de tiempo n_1 y n_2.

Ejercicio 6
La fdp para cada instante temporal del proceso estocástico, estacionario y ergódico, $X(t)$, es una función uniforme X~U(1, 2). Obtenga:

a) La función de distribución de la magnitud de x(t).
b) La fracción de tiempo durante el cual $x(t) > 1.5$.
c) La fracción de tiempo durante el cual $x(t) < 1.75$.
d) El valor medio de $x(t)$.

Ejercicio 8
¿Cuál es la autocorrelación $R_{yy}(\tau)$ de un proceso i.i.d $Y[n]$ cuyas muestras se distribuyen según Y~$N(m_y, \sigma_y^2)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 9
Sea el proceso $Z[n]$, definido como la suma de los procesos de los ejercicios anteriores, es decir, $Z[n] = X[n] + Z[n]$. ¿Cuál es su autocorrelación $R_{zz}(\tau)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 10
Sea el proceso $Z[n]$ cuyas realizaciones se distribuyen según una variable aleatoria Z. Si Z es función de la variable aleatoria Y~$N(m_y, \sigma_y^2)$, en concreto $Z = aY+b$, donde a y b son constantes, ¿cuál es su autocorrelación $R_{zz}(\tau)$? ¿Cuál es su autocovarianza?

Ejercicio 11
Sea el proceso incorrelacionado $X[n]$ cuyas muestras se distribuyen según X~$N(0,\sigma_x^2)$. Si definimos el proceso $Z[n]$ como $Z[n] = X[n] + X[n\text{-}1]$, es decir, una muestra de en una realización $z[n]$ contiene la suma de dos muestras consecutivas de la realización $x[n]$. ¿Cuál es la función de autocorrelación de $Z[n]$?

Ejercicio 12
Sean dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, con funciones de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente. Demuestre que la correlación cruzada entre ambos procesos es el producto de las medias de $X(t)$ e $Y(t)$ (es decir, $m_x \cdot m_y$) para cualquier desplazamiento τ, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Condición 1: $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos estacionarios.
- Condición 2: $X(t)$ e $Y(t)$ son procesos independientes entre sí.

En su demostración, no olvide indicar de forma explícita y clara en qué momento utiliza estas dos condiciones.

Ejercicio 13
Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos estacionarios con fdps uniformes U_X~$(0,4)$ y U_Y~$(4,8)$, respectivamente. Si los dos procesos son independientes entre sí:

a) ¿Están $X(t)$ e $Y(t)$ incorrelacionados mutuamente?
b) Calcule la covarianza entre $X(t)$ e $Y(t)$.
c) Calcule la correlación cruzada entre $X(t)$ e $Y(t)$.
d) Calcule la potencia media del proceso $Z(t) = X(t)$ e $Y(t)$, justificando cada paso.

Ejercicio 14
Calcula la energía y la autocorrelación de la señal cuadrada $x(t)$ definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & resto \end{cases}$$

Ejercicio 16
Sea $N(t)$ un proceso de ruido gaussiano e incorrelacionado, cuya magnitud se distribuye con media 0 y varianza σ^2. Calcula la distribución de la magnitud (como función del tiempo, es decir, en cada instante t), la media temporal de una realización, la media estadística en el instante t_1, la potencia media, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de la señal:

$$s(t) = \cos(2\pi f t) + n(t)$$

Ejercicio 17
Sea X(t) un proceso estocástico estacionario con muestras independientes y cuyos instantes temporales siguen una distribución normal de media 2 y varianza 3. Si se introduce en un canal de comunicaciones modelado como un sistema LTI con respuesta al impulso:

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{10}\delta(t-2)$$

¿Cuál es la función de distribución de la magnitud del proceso a la salida del canal?

Ejercicio 18
Calcule la función de autocorrelación, autocovarianza y la potencia de los siguientes procesos estocásticos, supuestos ergódicos y con muestras independientes
a) $X_1 \sim N(0,3)$.
b) $X_2 \sim N(2,3)$.
c) $X_3 \sim U(-0.5, 0.5)$.
d) $X_4 \sim U(3,5)$.
e) $X_5 = X_1 + X_2$, con X_1 y X_2 independientes.
f) $X_6 = X_1 + X_2$, donde X_1 y X_2 son estadísticamente dependientes.
g) $X_7 = X_2 + Y_1$, con $Y_1 \sim N(2,3)$ y X_2 e Y_1 independientes.
h) $X_8 = 2 \cdot X_2$.
i) $X_9 = X_3 + X_4$, con X_3 y X_4 independientes.
j) $X_{10} = X_2 + X_4$, con X_2 y X_4 independientes.

Ejercicio 19
Sea un proceso estocástico ergódico con fdp $f(x) = 0{,}25\ \delta(t) + 0{,}5\ \delta(t-1) + 0{,}25\ \delta(t-2)$ y muestras independientes. Calcule:
a) La probabilidad de que $x > 0.5$ en la primera realización.
b) La probabilidad de que $x > 0.5$ en $t = 1$.
c) La fracción de tiempo en la que el proceso toma valores $x > 0.5$
d) La probabilidad de que $x = 1$.
e) La media del proceso.
f) La varianza del proceso.
g) La potencia media del proceso.
h) La autocorrelación del proceso.
i) La autocovarianza del proceso.

Ejercicio 22

Una vez medida una realización completa de un proceso estocástico ergódico de media=1, se ha calculado que $\langle x^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt = 3$ para esa realización. Calcule el valor de la varianza de la VA. correspondiente al proceso en t = 3 (es decir, var(X(3)).