Tema 2. Probabilidad y Combinatoria

Estadística

Ángel Serrano Sánchez de León

Índice

- Sucesos aleatorios y Teoría de Conjuntos.
- Probabilidad.
  - Definición clásica.
  - Definición como frecuencia relativa.
  - Definición axiomática.
- Probabilidad condicionada: Probabilidad total y Teorema de Bayes.
- Repaso de Combinatoria: Variaciones, permutaciones, combinaciones.

Sucesos aleatorios

- **Experimento aleatorio:** aquel que puede dar lugar a varios resultados sin que podamos decir con antelación cuál saldrá.
- **Espacio muestral S:** conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.
  - Lanzamiento de un dado: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- **Suceso A:** Subconjunto de resultados tomados del espacio muestral.
  - **Suceso elemental:** aquel formado por un solo resultado.
    - Lanzamiento de un dado: A = {2}
  - **Suceso compuesto:** el que puede ser descompuesto en sucesos elementales.
    - Lanzamiento de un dado: A = {2, 6}

Sucesos aleatorios

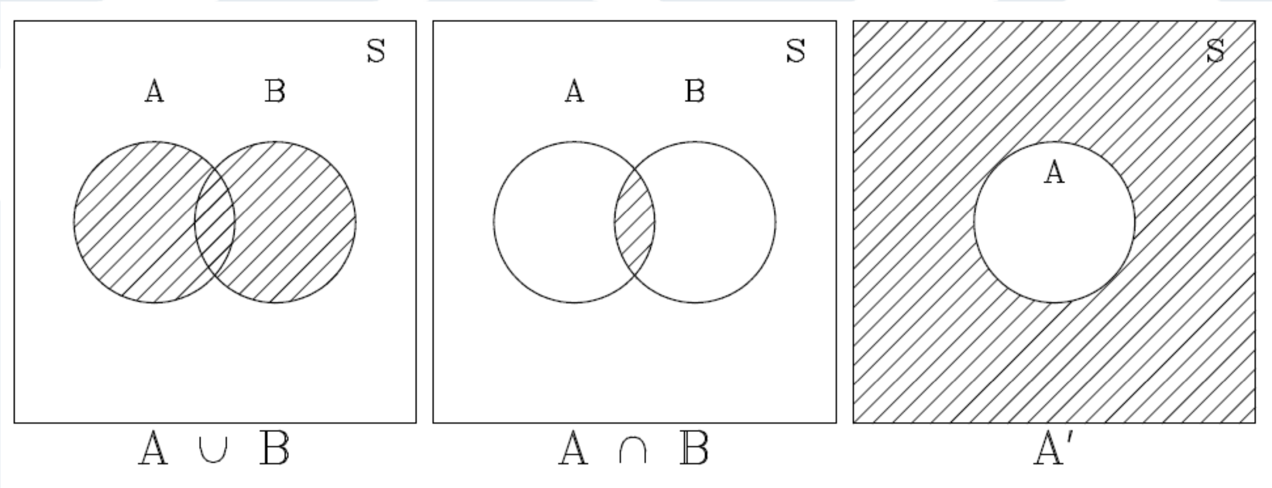
- **Suceso imposible:** aquel que no puede ocurrir nunca (conjunto vacío): $A = \varnothing$.
- **Suceso seguro:** aquel que ocurre siempre (igual al espacio muestral): $A = S$.
- **Suceso probable:** aquel que puede ocurrir o no.

Teoría de conjuntos

- **Unión de dos sucesos A y B ($A \cup B$):** suceso que ocurrirá siempre que ocurra el suceso A o el suceso B (➔ “OR”).
- **Intersección de dos sucesos A y B ($A \cap B$):** suceso que ocurrirá siempre que ocurran simultáneamente el suceso A y el B (➔ “AND”).
- **Complementario o negación del suceso A (A’):** suceso que ocurrirá cuando no ocurra el suceso A (➔ “NOT”).

Teoría de conjuntos

Diagramas de Venn:



6

Teoría de conjuntos (repaso)

Propiedad	Unión	Intersección
Neutro	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap S = A$
Complementario	$A \cup A' = S$	$A \cap A' = \varnothing$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Definición clásica de Probabilidad

- Si un suceso A tiene *e* posibilidades de ocurrir (casos favorables o de "éxito") en un total de *N* posibilidades, donde cada una de las cuales tiene las mismas oportunidades de ocurrir que las demás, llamamos **probabilidad** de que A ocurra a:

$$P(A) = \frac{e}{N}$$

- Probabilidad de que A no ocurra (o de que ocurra su complementario A'):

$$P(A') = \frac{N-e}{N} = 1 - \frac{e}{N} = 1 - P(A)$$

Ejemplos

- Probabilidad de salir cara en una moneda no trucada: 1/2.
- Probabilidad de que salga 5 en un dado no trucado: 1/6.
- Probabilidad de que salga 5 o 6 en un dado no trucado: 2/6 = 1/3.
- Probabilidad de que no salga 1 en un dado no trucado: 1 – 1/6 = 5/6.
- Probabilidad de que no salga 5 o 6 en un dado no trucado: 1 – 1/3 = 2/3.

Concepto clásico de Probabilidad

- Propiedades:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(S) = 1$$

$$P(\varnothing) = 0$$

Probabilidad como frecuencia relativa

- La definición anterior es un círculo vicioso porque en la propia definición aparece el concepto de sucesos con la misma probabilidad (=mismas oportunidades de ocurrir).
- Otra manera es definir la probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso A, f_A, cuando el número de observaciones es muy elevado (**probabilidad empírica**).
- La probabilidad sería el límite de la frecuencia relativa.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{N} = \lim_{n\to\infty} f_A$$

Ejemplo

- En 1900, el estadístico Karl Pearson lanzó una moneda 24000 veces, para lo cual necesitó 40 interminables horas. Obtuvo estos resultados:
  - 12012 caras
  - 11988 cruces
- Luego la probabilidad empírica de salir cara resultó:

$$P(cara) = \frac{12012}{24000} = 0,5005$$

- Muy próxima al valor teórico:

$$P(cara) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Karl Pearson (1857–1936), in 1890

12

Definición axiomática de probabilidad

- Dado un experimento aleatorio con un espacio muestral S y representando por A a un suceso, se define la **probabilidad** P(A) como una función real que hace corresponder a cada A un número real de forma que se cumplen los tres **axiomas** siguientes:

1. Para cada suceso A:

$$P(A) \geq 0$$

2. Para el suceso seguro S:

$$P(S) = 1$$

3. Dados dos sucesos A y B incompatibles (A ∩ B = Ø):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

13

Propiedades

- A partir de estos 3 axiomas se pueden demostrar todas las propiedades de la probabilidad, algunas de las cuales ya hemos visto.
- Alguna más:
  - Suceso contenido en otro:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

  - Probabilidad de la unión de 2 sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

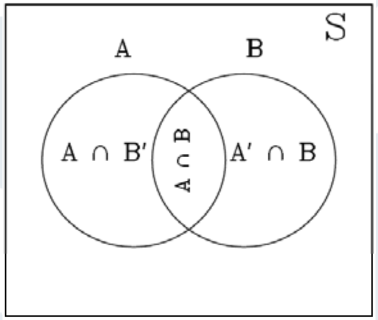
  - Probabilidad de la unión de 3 sucesos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Probabilidad condicionada

- **Probabilidad de A condicionada a B (probabilidad condicionada de A dado B):** probabilidad de que ocurra A en el caso de que previamente ocurra B.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



- Probabilidad de la intersección de 2 sucesos:

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

Sucesos dependientes e independientes

- Cuando que ocurra o no el suceso B no influye en el suceso A, se llaman **sucesos independientes**:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- No confundir sucesos independientes con sucesos incompatibles (intersección nula).
- **Sucesos dependientes:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema de la probabilidad total

- Sea un conjunto de sucesos A$_i$, i = 1, … , n, tales la unión de todos ellos es el suceso seguro y además son incompatibles entre sí.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \qquad \text{y} \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \ \text{ para } i \neq j$$

- El **teorema de la probabilidad total** dice que la probabilidad de que ocurra un suceso B es la suma de las probabilidades de los sucesos A$_i$ por las probabilidades de B condicionadas a cada A$_i$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Ejemplo

- En unas elecciones las probabilidades de que ganen tres partidos A1, A2 y A3 son 0,5, 0,3 y 0,2 respectivamente. Si ganara A1, la probabilidad de que suban los impuestos es 0,8, mientras que en los casos en que salgan elegidos A2 y A3 son 0,2 y 0,5 respectivamente. ¿Cual es la probabilidad de que suban los impuestos?

$$P(A_1) = 0{,}5, \quad P(A_2) = 0{,}3, \quad P(A_3) = 0{,}2$$

Sea B subida de impuestos:

$$P(B|A_1) = 0{,}8, \quad P(B|A_2) = 0{,}2, \quad P(B|A_3) = 0{,}5$$

Por el teorema de la probabilidad total,

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3) =$$
$$= 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}56$$

Teorema de Bayes

- Dado el conjunto completo de sucesos A_i, i = 1, ..., n, y un suceso B. El **teorema de Bayes** relacionada la probabilidad de un suceso A_i condicionada al suceso B:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

- $P(A_i)$ = probabilidades a priori
- $P(B|A_i)$ = probabilidad de B en la hipótesis A_i
- $P(A_i|B)$ = probabilidades a posteriori
- $P(B)$ = probabilidad total de B

Ejemplo

- Una fábrica de hardware informático utiliza 3 tipos de máquinas (A, B y C) para construir memorias USB. Con la máquina A se fabrica el 45% de las memorias, con la B el 30% y con la C el resto.

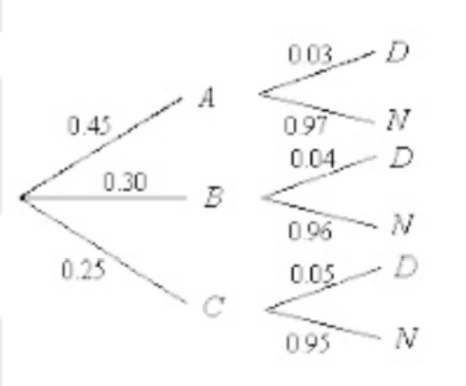
$$P(A) = 0{,}45, \quad P(B) = 0{,}30, \quad P(C) = 0{,}25$$

- El 3% de las memorias fabricadas con la máquina A resultan defectuosas, mientras que para las máquinas B y C estos porcentajes son el 4% y el 5%, respectivamente. Sea D = pieza defectuosa.

$$P(D|A) = 0{,}03, \quad P(D|B) = 0{,}04, \quad P(D|C) = 0{,}05$$

Ejemplo

- El árbol de probabilidades es el siguiente:



- Probabilidad de que una memoria defectuosa cogida al azar sea de la máquina A:

$$P(A|D)=\frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}=\frac{0{,}45\times 0{,}03}{0{,}45\times 0{,}03+0{,}30\times 0{,}04+0{,}25\times 0{,}05}=\frac{0{,}0135}{0{,}038}=0{,}355$$

Repaso de Combinatoria

- **Factorial de un número entero *n*:**

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

- Ej.: 5! = 120, 10! = 3628800
- Por definición se establece: 0! ≡ 1
- **Aproximación de Stirling** (caso $n >> 1$):

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\; n^{n}\; e^{-n}$$

- Ej.: $50! \approx \sqrt{2\pi\cdot 50}\; 50^{50}\; e^{-50} = 3{,}036345\ldots\cdot 10^{64}$
  - Valor exacto: $3{,}041409\cdot 10^{64}$

22

Repaso de Combinatoria

- **Variaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*** (con $n \leq m$): subconjuntos de n elementos tales que dos de ellos son diferentes si los elementos son distintos, o bien si el orden de los elementos son distintos.

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- Ej.: considerando las 4 letras A, B, C, D, tomadas de 2 en 2.

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

AB, AC, AD,
BA, BC, BD,
CA, CB, CD,
DA, DB, DC

Repaso de Combinatoria

- **Variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n*** (con $n \leq m$): igual que en el caso anterior, pero se pueden repetir los elementos.

$$V_m^n = m^n$$

- Ej.: considerando las 4 letras A, B, C, D, tomadas de 2 en 2 con repetición.

$$V_4^2 = 4^2 = 16$$

AA, AB, AC, AD,
BA, BB, BC, BD,
CA, CB, CC, CD,
DA, DB, DC, DD

Repaso de Combinatoria

- **Permutaciones de *n* elementos:** variaciones de *n* elementos tomados de *n* en *n*.

$$P_n = V_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

- Ej.: considerando las 4 letras A, B, C, D.

$$P_4 = 4! = 24$$

ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB,
BACD,BADC,BCAD,BCDA,BDAC,BDCA,
CABD,CADB,CBAD,CBDA,CDAB,CDBA,
DABC,DACB,DBAC,DBCA,DCAB,DCBA

Repaso de Combinatoria

- **Combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*:** son como las variaciones pero ahora el orden de los elementos no importa. Se expresan mediante **números combinatorios**:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

(se lee *m* sobre *n*)

- Ej.: considerando las 4 letras A, B, C, D, tomadas de 2 en 2.

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

AB, AC, AD, BC, BD, CD