Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física) Junio de 2013.

- Es necesario superar el 40 % de la nota máxima de cada parte para compensar.
- **Cuestiones:** Hasta 1,5 puntos cada una (total: 3 puntos). **Conteste breve y razonadamente**, ajustándose a la pregunta y explicando.
- **Problemas:** Hasta 3,5 puntos cada uno (total problemas: 7 puntos) Debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicar los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** notación y fórmulas que utilice.
- No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
- **No se permite ni calculadora ni material auxiliar alguno**. **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIONES (para los alumnos que no hayan realizado la evaluación continua)

1.- La energía potencial de interacción entre los iones de una molécula diatómica homonuclear viene dada por $U(r) = D\left(1 - \exp[-a(r - r_0)]\right)^2$, donde r es la distancia entre los iones, a una contante positiva y D una energía también positiva.
a) Represente esquemáticamente $U(r)$, interpretando físicamente las constantes D y r_0.
b) Obtenga la frecuencia de vibración de los núcleos en función de D, a, r_0 y la masa M de cada ion.

2.- Es sabido que el nivel $n = 2$ de un átomo de hidrógeno es un nivel degenerado. Supongamos, sin embargo, que además del potencial culombiano, sobre el electrón actúa un potencial adicional no central $V_p = f(r)\, x\, y$, donde $f(r)$ es una función de r que tiende a cero rápidamente cuando $r \to \infty$.
(a) ¿En cuántos niveles de energía diferentes se romperá el nivel $n = 2$ a primer orden de perturbaciones?
(b) ¿Cuál será la degeneración de cada uno de esos niveles de energía diferentes?
(c) Llamando A al valor de la corrección a la energía para uno de ellos, ¿cuáles serán las correcciones para los demás?
Nota: la función de onda de un nivel n, l, m tiene la expresión $\psi_{nlm} = R_{nl} Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ y los armónicos esféricos para $l = 1$ son $Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{3/(4\pi)}\cos\theta$ y $Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{3/(8\pi)}\sin\theta\exp(\pm i\varphi)$.

PROBLEMAS

1.- Un determinado sistema está formado por una partícula de spin 1/2, y el Hamiltoniano que describe su energía tiene la forma: $\hat{H}_0 = \frac{1}{2\alpha}\left(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2\right) + \frac{1}{4\alpha}\hat{S}_z^2$, donde $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ son las componentes cartesianas del operador de spin.
a) Encuentre la matriz de representación del Hamiltoniano $\hat{H}_0$ en la base de estados ortonormales $\mathbb{B} = \left\{|++\rangle, |+-\rangle\right\}$ en la que $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_z$ son diagonales.
b) Encuentre los autovalores y autovectores de $\hat{H}_0$ en esa base.
c) Supongamos que sobre la partícula actúa un campo magnético que tiene la forma: $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Encuentre la forma del hamiltoniano asociado a la interacción del espín de la partícula con este campo magnético y su representación en la base de los autoestados de $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_z$. Discuta bajo qué condiciones físicas esta representación es diagonal.

2.- Sean dos potenciales $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$ tales que $V_1(\vec{r}) < V_2(\vec{r})$ para todo $\vec{r}$.
a) Usando el principio variacional, demostrar que la energía fundamental de una partícula de masa m bajo el potencial V_1 es menor que la energía fundamental de la misma partícula bajo el potencial V_2.
b) A partir del resultado anterior, demostrar que si una partícula está sometida a la acción de un potencial central, la energía del estado de menor energía con momento angular l es menor que la del estado de menor energía con momento angular $l + 1$.

Datos que podrían ser útiles: $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s, 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg

$\int x^2 \cos^2 x\, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Operadores de momento angular $\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ $\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$