Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física). Prueba Personal. Septiembre de 2013

Es necesario superar el 40 % de la nota máxima de cada parte para compensar.
Cuestiones: Hasta 1,5 puntos cada una (total cuestiones: 3 puntos). **Conteste breve y razonadamente**, ajustándose a la pregunta y explicando su respuesta.
Problemas: Hasta 3,5 puntos cada uno (total problemas: 7 puntos). Debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando los pasos y discutiendo los resultados**. Defina **todas** las variables que use y **explique** la notación y las fórmulas que utilice.
No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
No se permite ni calculadora ni material auxiliar alguno. **Tiempo:** dos horas.

CUESTIONES
(solamente para los alumnos que no hayan realizado la evaluación continua)

1.- Cualquier matriz cuadrada de rango 2 puede escribirse en la forma $A = a_0\sigma_0 + a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z$, donde por uniformidad hemos llamado $\sigma_0 = I$ y donde σ_x, σ_y, σ_z son las matrices de Pauli.
Demostrar que $a_i = (1/2)\mathrm{Tr}\,(A\sigma_i)$ para $i = 0, x, y, z$.

2.- La distancia típica d entre los núcleos de una molécula diatómica es del mismo orden de magnitud que el radio de Bohr a_B. Por otra parte, sabemos que para duplicar esa distancia sería necesaria una energía del orden de las energías de enlace electrónico, es decir, $ka_B^2 \sim E_{el}$ (siendo k la constante elástica del oscilador asociado al movimiento vibratorio de la molécula) ya que para esa distancia doble la molécula está prácticamente disociada.
De acuerdo con esto, ¿cuál es el orden de magnitud de la amplitud $A_{\rm osc}$ de las oscilaciones nucleares?

PROBLEMAS

1.- Un electrón a una distancia x de una superficie de helio líquido siente un potencial

$$V(x) = \begin{cases} -K/x & \text{si} \quad x > 0 \\ \infty & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

donde K es una constante positiva.
a) Obtener el estado fundamental y su energía (olvidar el espín del electrón)
Sugerencia: Resolver la ecuación de Schrödinger por analogía con la ecuación radial reducida para el átomo de hidrógeno.
b) Si se aplicase un campo eléctrico uniforme y estático en la dirección x, ¿cuál es la modificación a la energía del estado fundamental en primer orden en teoría de perturbaciones?

2.- Consideremos el potencial de Yukawa

$$V(r) = -\frac{g^2}{r}\exp(-\alpha r) \qquad \alpha > 0 \qquad g > 0.$$

Para un g determinado, y utilizando el método variacional, encontrar cuál es el máximo valor de α que permite asegurar la existencia de estados ligados en dicho potencial (es decir, estados con energía $E < 0$).
(Sugerencia: tomar una función de prueba $\psi(r) = A\exp(-\beta r) = A\exp(-\alpha\lambda r)$, siendo $\lambda = \beta/\alpha$ un parámetro adimensional).
Fórmula útil: $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = n!/a^{n+1}$

Datos que podrían ser útiles: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s, 1 eV $= 1{,}6\times10^{-19}$ J $m_p = 1{,}67\times10^{-27}$ kg
$m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg, $R_\infty = 109737$ cm^{-1}, $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C, $N_A = 60{,}2\times10^{22}$, $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J K^{-1}
$\mu_b = e\hbar/(2m_e) = 9{,}27\times10^{-24}$ J T^{-1}, $c = 3\times10^8$ m s^{-1}, $a_o = 4\pi\epsilon_o\hbar^2/me^2 \simeq 0{,}52$ Å, $\lambda_C = h/(m_e c) = 0{,}024$ Å
$1/(4\pi\epsilon_o) = 9\times10^9$ m^3 kg s^{-2} C^{-2}

Integrales que podrían ser útiles:

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$ $\quad\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = 1/(2a)$ $\quad\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/a^3}$
$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx = 1/(2a^2)$ $\quad\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi/a^5}$ $\quad\int_0^\infty x^5e^{-ax^2}dx = 1/a^3$
$\int_0^\infty r^ne^{-ar}dr = n!/a^{n+1}$ $\quad\int_0^t \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t)$ $\quad\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$
$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$ $\quad\int x\cos^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$
$\int x^2\cos^2 x\, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Operadores de momento angular $\qquad \nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ $\qquad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$