Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física) Junio de 2014

Alumnos con evaluación continua: Deben procurar contestar tanto a la cuestión como a los problemas.
Alumnos con solamente examen presencial: Debe superar el 40 % de la nota máxima de cada parte por separado.
Cuestiones: conteste breve y razonadamente, ajustándose a la pregunta y explicando lo que hace.
Problemas: debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando con claridad los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** la notación y las fórmulas que utilice.
No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
Solamente se permite el uso de un libro de Tablas y Fórmulas matemáticas, sin añadido alguno.

CUESTIONES (puntuación: hasta 1,5 puntos por cuestión)

C1.- (para todos los estudiantes)
Sea una matriz de dimensión 2×2, $[Q]=\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$, donde $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ es un vector y $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ son las matrices de Pauli. Demostrar que $\det\,[Q]^n=(-1)^n\,|\vec{a}|^{2n}$.

C2.- (solamente deben responderla los estudiantes que <u>no</u> hayan realizado la evaluación continua)
Siendo $\widehat{H}_0$ el hamiltoniano de un sistema físico, consideremos la perturbación estacionaria $\widehat{W}$. Demostrar que, independientemente de la degeneración de los niveles energéticos del hamiltoniano sin perturbar $\widehat{H}_0$, si $\widehat{H}_0$ y $\widehat{W}$ son observables compatibles la teoría de perturbaciones a primer orden es exacta.

PROBLEMAS (puntuación: hasta 3,5 puntos por problema)

P1.- (para todos los estudiantes)
Utilizando el principio variacional y una función de prueba de la forma $\psi(r)=C\exp(-\kappa r)$, con $\kappa>0$, obtener una condición suficiente para la existencia de un estado ligado en un potencial esférico definido negativo $\big($ esto es, $V(r)<0$ $\big)$ que cumple que $V(r)\to 0$ cuando $r\to\infty$.
Aplicar esta condición general a los casos concretos:
a) $V(r)=-\alpha\,\delta(r-a)$;
b) $V(r)=-V_0\,\exp(-r/a)$.
¿Cuál sería el κ óptimo para obtener la mejor aproximación?

P2.- (para todos los estudiantes)
Una partícula de masa m sin espín se encuentra confinada en el plano XY mediante un potencial armónico isótropo de frecuencia natural ω_0. Simbolicemos por $|n_x,n_y\rangle$ los estados propios del oscilador bidimensional. Estando la partícula en el estado $|1,0\rangle$ empieza a actuar en $t=0$ la perturbación dependiente del tiempo $\widehat{W}=\lambda\omega_0^2\widehat{L}_z t$, donde $\widehat{L}_z$ es el momento angular y λ es una constante positiva no necesariamente pequeña. Dicha perturbación se desconecta en el instante $t_{\text{fin}}=1/\omega_0$.
¿Cuál será el estado del sistema una vez que ha dejado de actuar la perturbación?
Sugerencia: Reducir el problema a un sistema de dos estados que tiene solución exacta.

Datos que podrían ser útiles: $h=6{,}63\times10^{-34}$ J s, 1 eV $=1{,}6\times10^{-19}$ J $m_p=1{,}67\times10^{-27}$ kg
$m_e=9{,}11\times10^{-31}$ kg, $R_\infty=109737$ cm^{-1}, $e=1{,}6\times10^{-19}$ C, $N_A=60{,}2\times10^{22}$, $k_B=1{,}38\times10^{-23}$ J K^{-1}
$\mu_b=e\hbar/(2m_e)=9{,}27\times10^{-24}$ J T^{-1}, $c=3\times10^8$ m s^{-1}, $a_o=4\pi\epsilon_o\hbar^2/me^2\simeq 0{,}52$ Å, $\lambda_C=h/(m_e c)=0{,}024$ Å
$1/(4\pi\epsilon_o)=9\times10^9$ m^3 kg s^{-2} C^{-2}

Integrales que podrían ser útiles:
$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$ $\quad\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx=1/(2a)$ $\quad\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{4}\sqrt{\pi/a^3}$
$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx=1/(2a^2)$ $\quad\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx=\frac{3}{8}\sqrt{\pi/a^5}$ $\quad\int_0^\infty x^5e^{-ax^2}dx=1/a^3$
$\int_0^\infty r^n e^{-ar}dr=n!/a^{n+1}$ $\quad\int_0^t\exp(-x^2)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t)$ $\quad\int x^2e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$
$\int\cos^2x\,dx=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{x}{2}$ $\quad\int x\cos^2x\,dx=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\cos(2x)$
$\int x^2\cos^2x\,dx=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{4}\cos(2x)+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Formulario para examen de ***Física Cuántica II***

- **Matrices de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Átomo hidrogenoide**

$$R_{nl}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2 a_0^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l \mathrm{L}_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) \qquad \mathrm{L}_{q-p}^{p}(u) = (-1)^p \frac{d^p}{du^p}\mathrm{L}_q(u)$$

- **Perturbaciones independientes del tiempo**

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle \psi_k^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\left\langle \psi_k^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \left|\psi_k^{(0)}\right\rangle$$

- **Perturbaciones dependientes del tiempo**

$$\lambda A_{ik}^{(1)}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{i}\Omega_{ki}(\tau-t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(t) | \psi_i^{(0)} \rangle d\tau \qquad \text{con} \qquad \Omega_{ki} = \left(E_k^{(0)} - E_i^{(0)}\right)/\hbar$$

$$\lambda^2 A_{ik}^{(2)}(t) = -\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' e^{\mathrm{i}\Omega_{kn}(\tau-t_0)} e^{\mathrm{i}\Omega_{ni}(\tau'-t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau) | \psi_n^{(0)} \rangle \langle \psi_n^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau') | \psi_i^{(0)} \rangle$$

Para perturbaciones periódicas, $\widehat{W}(t) = \widehat{W}\sin\omega t$,

$$P_{n\to m}^{\mathrm{Born}}(t) \simeq \left|\frac{\langle m|\hat{W}|n\rangle t}{2\hbar}\right|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega-|\Omega_{mn}|}{2}\right)t}{\left(\frac{\omega-|\Omega_{mn}|}{2}t\right)^2}$$

- **Oscilador armónico**

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\widehat{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\widehat{P}_x\right) \qquad \widehat{a}\,\phi_n(x) = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}(x)$$

$$\widehat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\widehat{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\widehat{P}_x\right) \qquad \widehat{a}^{+}\phi_n(x) = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}(x)$$

- **Operadores**

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$