

Alumnos con evaluación continua: Deben procurar contestar tanto a la cuestión como a los problemas.

Alumnos con solamente examen presencial: Debe superar el 40% de la nota máxima de cada parte por separado.

Cuestiones: conteste breve y razonadamente, ajustándose a la pregunta y explicando lo que hace.

Problemas: debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando con claridad los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** la notación y las fórmulas que utilice.

No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).

Solamente se permite el uso de un libro de Tablas y Fórmulas matemáticas, sin añadido alguno.

CUESTIONES (puntuación: hasta 1,5 puntos por cuestión)

C1.- (para todos los estudiantes)

La función de onda radial para un átomo de hidrógeno en el estado $n = 2$, $\ell = 1$ es

$$R_{21}(r) = \left(1/\sqrt{24a_0^5}\right) r \exp(-r/2a_0).$$

Calcule el valor esperado $\langle r \rangle_{21}$ y compárelo con el valor $r_{\text{máx}}$ para el que es máxima la probabilidad de encontrar el electrón.

C2.- (solamente deben responderla los estudiantes que no hayan realizado la evaluación continua)

Sea un sistema compuesto de dos partículas de espín $1/2$. La primera partícula se encuentra en el estado $|\uparrow\rangle$, autoestado de S_z con valor propio $+1/2$; y la segunda partícula se encuentra en el estado $|\rightarrow\rangle$, autoestado de S_x con valor propio $+1/2$.

Calcule la probabilidad de encontrar el valor 0 en una medida del espín **total** del sistema.

PROBLEMAS (puntuación: hasta 3,5 puntos por problema)

P1.- (para todos los estudiantes)

Sea un rotor tridimensional, cuyo hamiltoniano es $\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2}{2I_x} + \frac{\hat{L}_y^2}{2I_y} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}$, con momentos principales de inercia $I_x = I_y = I \neq I_z$.

(a) Calcule sus niveles energéticos.

(b) Supongamos ahora que hay un pequeño cambio en los momentos principales, de modo que ya no hay dos iguales sino que $I_x - I_y = \Delta$ e $I_x + I_y = 2I$, con $(\Delta/2I) \ll 1$. Calcule las nuevas energías de los niveles $\ell = 0$ y $\ell = 1$ a primer orden en Δ .

Sugerencia: exprese el hamiltoniano de perturbación en función de los operadores L_+ y L_- .

P2.- (para todos los estudiantes)

Un electrón está sometido a un campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. En el instante $t = 0$ el espín del electrón se encuentra a lo largo de la dirección positiva del eje X, es decir $s_x = 1/2$.

a) Calcule la evolución temporal de los valores medios de las componentes del espín.

b) A partir de esos valores medios, calcule la probabilidad de encontrar en un instante cualquiera t los valores siguientes:

- i) $s_x = 1/2$; $s_x = -1/2$
- ii) $s_y = 1/2$; $s_y = -1/2$
- iii) $s_z = 1/2$; $s_z = -1/2$

Formulario para examen de *Física Cuántica II*

• Datos que podrían ser útiles:

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$R_\infty = 109737 \text{ cm}^{-1} \quad k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad N_A = 60,2 \times 10^{22} \quad a_o = \frac{4\pi\epsilon_o\hbar^2}{me^2} \simeq 0,52 \text{ Å}$$

$$\lambda_C = h/(m_e c) = 0,024 \text{ Å} \quad \mu_b = e\hbar/(2m_e) = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \quad 1/(4\pi\epsilon_o) = 9 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \text{ C}^{-2}$$

• Integrales que podrían ser útiles:

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(t) \quad \int_0^\infty x^m \exp(-ax^2) dx = \begin{cases} \frac{n!}{2a^{n+1}} & \text{si } m = 2n + 1 \text{ (} m \text{ impar)} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} & \text{si } m = 2n \text{ (} m \text{ par)} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1} \quad \int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} \quad \int x \cos^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} \cos(2x)$$

$$\int x^2 \cos^2 x dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4} \cos(2x) + \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \sin(2x)$$

• Operadores

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \hat{L}_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

• Matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Perturbaciones independientes del tiempo

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{H}_p | \psi_n^{(0)} \rangle \quad |\psi_n^{(1)}\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_k^{(0)} | \hat{H}_p | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |\psi_k^{(0)}\rangle \quad E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \psi_k^{(0)} | \hat{H}_p | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

• Perturbaciones dependientes del tiempo

$$\lambda A_{ik}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\Omega_{ki}(\tau-t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau) | \psi_i^{(0)} \rangle d\tau \quad \text{con } \Omega_{ki} = (E_k^{(0)} - E_i^{(0)})/\hbar$$

$$\lambda^2 A_{ik}^{(2)}(t) = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^\tau d\tau' e^{i\Omega_{kn}(\tau-t_0)} e^{i\Omega_{ni}(\tau'-t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau) | \psi_n^{(0)} \rangle \langle \psi_n^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau') | \psi_i^{(0)} \rangle$$

Para perturbaciones periódicas, $\widehat{W}(t) = \widehat{W} \sin \omega t$, $P_{n \rightarrow m}^{\text{Born}}(t) \simeq \left| \frac{\langle m | \hat{W} | n \rangle t}{2\hbar} \right|^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega - |\Omega_{mn}|}{2} t \right)}{\left(\frac{\omega - |\Omega_{mn}|}{2} t \right)^2}$

• Oscilador armónico

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{P}_x \right), \quad \hat{a} \phi_n(x) = \sqrt{n} \phi_{n-1}(x); \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{P}_x \right), \quad \hat{a}^\dagger \phi_n(x) = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}(x) \quad (1)$$

• Átomo hidrogenoide

$$R_{nl}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2 a_0^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right) \exp \left(-\frac{Zr}{na_0} \right) \quad L_{q-p}^p(u) = (-1)^p \frac{d^p}{du^p} L_q(u)$$