Matemáticas II (GIB) - 2/7/2013 **Final Extraordinario.**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 180 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 60 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	NO	
1.	☐	x	Si $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \sqrt{2}\right\}$, entonces, $\min A = \sqrt{2}$.
2.	x	☐	Si el conjunto A es numerable, y $B \subset A, B \neq \emptyset$ no es finito, entonces B es numerable.
3.	☐	x	Si $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
4.	☐	x	Si $f : S \to T$ es sobreyectiva, entonces la función $g : S \to f(S), x \mapsto g(x) = f(x)$ es invertible.
5.	x	☐	Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. Entonces $\forall \delta > 0, B(-1; \delta) \cap A \neq \emptyset$.
6.	☐	x	Si $\{a_n\}$ es acotada, entonces cualquier $\{a_{n_k}\}$ es convergente.
7.	x	☐	Si $f \in C[a, b]$, con $a < b$, entonces necesariamente la imagen $f([a, b])$ es un intervalo cerrado.
8.	x	☐	Si las funciones $f + g$ y f son derivables en $a \in \mathbb{R}$, entonces la función g es derivable en $a \in \mathbb{R}$.
9.	x	☐	La suma superior de la función $\operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$ para la partición $P = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ vale π.
10.	☐	x	Si $p > 1$ entonces $\int_0^2 \frac{1}{x^p} dx$ es convergente.
11.	x	☐	La dirección de máximo crecimiento de $f(x, y) = y + \sin xy$ en el punto $(0, 0)$ es la definida por el vector $(0, 1)$.
12.	x	☐	Sea el PVI $\left\{\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$. Si $f(x, y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0) entonces existe solución del PVI.

Continúa por detrás ....

13. ☐ ☒ Si $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\nabla f(0,0) = (0,1)$, entonces el origen puede ser un extremo de f en $\mathbb{R}^2$.

14. ☒ ☐ Suponga que $f(x,y)$ es una función que admite derivadas parciales continuas hasta orden 2, y que la matriz hessiana de f en un punto crítico es diagonal. Si los elementos de la diagonal principal son no nulos y del mismo signo, entonces dicho punto crítico es un extremo de la función f.

15. ☐ ☒ Una ecuación diferencial lineal puede tener soluciones singulares.

16. ☐ ☒ Dado un PVI, se pretende aproximar la solución utilizando el método de Euler básico. En este caso, cuanto mayor sea el incremento de la variable x en cada paso, h, mejor será la aproximación que se obtendrá.

17. ☐ ☒ Si una función tiene derivadas parciales en un punto es diferenciable en él.

18. ☒ ☐ Sea la función $f(x,y) = y^2 + \cos x$. La matriz hessiana de f en $(0,0)$ es $H(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

19. ☐ ☒ Sea la función $f(x,y) = y^2 + \cos x$. f alacanza un máximo relativo en $(0,0)$.

20. ☐ ☒ Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right|}{||(x - x_0, y - y_0)||}.$$

.

Matemáticas II (GIB) - 2/7/2013 **Problema 1**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.

A. **(15 puntos)** Sean $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ y $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g es acotada en (a,b). Demuestre que entonces $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = 0$.

B. **(10 puntos)** Calcule el límite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x - 1}.$$

C. **(15 puntos)**

a) **(5 puntos)** Sea $F(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$. Razone si es posible hallar el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ para la función $F(x)$, y en caso afirmativo hállelo y escriba el resto en notación de Landau.

b) **(5 puntos)** Compruebe que $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ y demuestre que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

c) **(5 puntos)** Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y considere $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\arctan a)^k$. ¿Para qué valores de a converge la serie? Para éstos, calcule la suma (en función de a).

SOLUCION:

A. Inicialmente, por ser g acotada en (a,b), existe $M > 0$ tale que $x \in (a,b) \Rightarrow |g(x)| < M$. Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Por ser $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in \overset{\circ}{B}(x_0,\delta) \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Por tanto, tendremos que $x \in \overset{\circ}{B}(x_0,\delta) \Rightarrow |g(x)f(x)| < M|f(x)| < M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. y por tanto, $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = 0$, como se quería demostrar.

B. Podemos escribir
$$\frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x - 1} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^x - 1}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$
. Entonces, como $\operatorname{sen}(x) \sim x$ y $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$ y $\left|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right| \leq 1$, y en la expresión anterior sólo aparecen productos, se tendrá que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x - 1} = 0.$$
Obsérvese que no es posible aplicar el teorema de L'Hôpital, puesto que el límite de la derivada del numerador,
$$\left(\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})\right)' = 2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\operatorname{sen}^2 x,$$
cuando $x \to 0$ no existe.

C.

a) Obsérvese que la función $F(x)$ no es más que la composición $(g \circ h)(x)$, siendo $g(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt$ y $h(x) := x^2$, ambas funciones $C^\infty(\mathbb{R})$. Por tanto es posible escribir el polinomio de Taylor de cualquier orden para F. Obviamente $F(0) = 0$. Por otro lado, al ser la función h par, la composición también lo es, por lo que F sólo podrá tener coeficientes no nulos para potencias pares. La Regla de la Cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dicen que:
$$F'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x,$$

y por tanto $F'(0) = 0$, como ya esperábamos. Es fácil ver que $F''(0) = 2$. Por tanto, el polinomio pedido, con resto en notación de Landau, es:

$$P_3(x; 0) = x^2 + o(x^3) = x^2 + O(x^4).$$

También se podría haber trabajado directamente con la composición, observando que al ser g impar, el primer término no nulo sería el de grado uno.

b) Para la primera parte, basta con derivar el cociente $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Para la segunda, si $y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$, entonces $x = \tan y$, y por ser inversas tendremos:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

c) Puesto que se trata de una serie geométrica de razón $q = \arctan a$, la serie convergerá si y sólo si $|q| < 1$, es decir, si y sólo si $|\arctan a| < 1$, es decir si $|a| < \tan 1$

También se puede llegar fácilmente a la misma conclusión, tanto a partir del criterio de D'Alambert como del criterio Raíz de Cauchy.

Puesto que la suma de los N primeros términos de una progersión geométrica de razón $q \neq 1$ vale $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, entonces, con $|q| < 1$ tendremos $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - q}$ y, por tanto, para $|a| < \tan 1$ tendremos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\arctan a)^k = \frac{1}{1 - \arctan a}.$$

Matemáticas II (GIB) - 2/7/2013 **Problema 2**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.

a) **(15 puntos)** Calcule los extremos absolutos (si existen) de $f(x,y) = x^2 - x - y + y^2$ en la región del plano definida por la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 2$.

b) **(10 puntos)** Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $z = x^2 - y^2 + 1$ e inferiormente por el plano XY en la región definida por el cuadrado de vertices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ y $(-1,1)$.

c) **(15 puntos)** Resuelva el Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(x+y) - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

SOLUCION:

a) f es una función polinómica, luego será diferenciable en todo su dominio. Los posibles extremos de la función vendrán dados por los puntos críticos y por la frontera del dominio.

Calculamos los puntos críticos de la función, para ello obtenemos las derivadas parciales y las igualamos a 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 + 2y \Rightarrow -1 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Luego el único punto crítico es el $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ que pertenece al dominio de la función.

Hallamos las derivadas segundas y la matriz hessiana para ver si es un extremo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es diagonal con los dos elementos de la diagonal principal mayores que 0, por tanto la función alcanza un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Estudiamos ahora como se comporta f en la frontera de su dominio. Para ello restringimos la función a la frontera. Como la frontera es una circunferencia para hacer esta restricción hacemos un cambio a coordenadas polares.

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (\rho \cos\theta)^2 + (\rho \sin\theta)^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Y la función restringida queda:

$$F(\theta) = 2\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta + 2\sin^2\theta = 2 - \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Calculamos los extremos de esta función, para ello estudiamos sus puntos críticos y los extremos del intervalo.

$$F'(\theta) = -\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta) \Rightarrow$$
$$\sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4},\ \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$F''(\theta) = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)$$
$$F''(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$$
$$F''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = -2$$

Luego F presenta un mìnimo relativo en θ_1 y un máximo relativo en θ_2.

Veamos cuanto vale f en esos puntos.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$f(1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$
$$f(-1,-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Luego la función alcanza un mínimo absoluto en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y un máximo absoluto en $(-1,-1)$.

b) La región definida por esos vértices será:

$$-1 \leq x \leq 1;\ -1 \leq y \leq 1$$

Luego el volumen querdará:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2 - y^2 + 1)dydx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y - \frac{y^3}{3} + y\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 - \frac{2}{3} + 2\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = 4$$

c) La ecuación diferencial que forma parte de este problema de valor inicial (PVI) es una ecuación diferencial lineal, podemos ponerla de la forma $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x - 1$.

Para resolverla primero hallaremos una solución de la ecuación homogenea y aplicaremos después el método de variación de las constantes.

La ecuación homogénea es $y' - \frac{1}{2}y = 0$

Tenemos que la función nula $y = 0$ es solución de esta ecuación.

Si consideramos que $y \neq 0$ entonces podemos dividir por y en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x} = Ke^{\frac{1}{2}x} \text{ con } K \neq 0$$

Incorporando la solución $y = 0$, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea vendrán dadas por

$$y = Ke^{\frac{x}{2}} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Aplicamos ahora el método de variación de las constantes para hallar las soluciones de la ecuación completa, para ello tomamos como solución de la ecuación completa $y = K(x)e^{\frac{x}{2}}$. Entonces $y'(x) = K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}}$ y sustituyendo en la ecuación obtenemos $K(x)$

$$K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow K'(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K'(x) = (\frac{x}{2} - 1)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow K(x) = \int(\frac{x}{2} - 1)e^{-\frac{x}{2}}dx = \int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Esta integral la resolveremos por partes, tomando $u = x \Rightarrow du = dx$ y $dv = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{x}{2}}$ queda

$$\int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = -xe^{-\frac{x}{2}} + \int e^{-\frac{x}{2}}dx = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Luego

$$K(x) = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + C = -xe^{-\frac{x}{2}} + C$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial será

$$y = (-xe^{-\frac{x}{2}} + C)e^{\frac{x}{2}} = Ce^{\frac{x}{2}} - x$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales se obtiene la solución del PVI

$$y(0) = C = 1$$

Y la solución es

$$y = e^{\frac{x}{2}} - x$$
