

Apellidos.....

Nombre..... DNI ..... Grupo .....



Nota (1 decimal)

## TEST ( PUNTOS)

- El test consta de **preguntas**. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta.
- **Acierto +0,1 Error -0,04 Blanco 0.**

V F

1. La dirección de máximo crecimiento de  $f(x, y) = y + \sin xy$  en el punto  $(0, 0)$  es la definida por el vector  $(0, 1)$ .
2. Sea el PVI  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ . Si  $f(x, y)$  es continua en un entorno de  $(x_0, y_0)$  entonces existe solución del PVI.
3. Si  $f(x, y)$  es una función diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  y  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ , entonces el origen puede ser un extremo de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .
4. Suponga que  $f(x, y)$  es una función que admite derivadas parciales continuas hasta orden 2, y que la matriz hessiana de  $f$  en un punto crítico es diagonal. Si los elementos de la diagonal principal son no nulos y del mismo signo, entonces dicho punto crítico es un extremo de la función  $f$ .
5. Una ecuación diferencial lineal puede tener soluciones singulares.
6. Dado un PVI, se pretende aproximar la solución utilizando el método de Euler básico. En este caso, cuanto mayor sea el incremento de la variable  $x$  en cada paso,  $h$ , mejor será la aproximación que se obtendrá.
7. Si una función tiene derivadas parciales en un punto es diferenciable en él.
8. Sea la función  $f(x, y) = y^2 + \cos x$ . La matriz hessiana de  $f$  en  $(0, 0)$  es  $H(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
9. Sea la función  $f(x, y) = y^2 + \cos x$ .  $f$  alcanza un máximo relativo en  $(0, 0)$ .
10. Sea la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  si y sólo si existe el siguiente límite:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## EJERCICIO ( puntos)

a) Calcule los extremos absolutos (si existen) de  $f(x, y) = x^2 - x - y + y^2$  en la región del plano definida por la desigualdad  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

$f$  es una función polinómica, luego será diferenciable en todo su dominio. Los posibles extremos de la función vendrán dados por los puntos críticos y por la frontera del dominio.

Calculamos los puntos críticos de la función, para ello obtenemos las derivadas parciales y las igualamos a 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -1 + 2y \Rightarrow -1 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Luego el único punto crítico es el  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  que pertenece al dominio de la función.

Hallamos las derivadas segundas y la matriz hessiana para ver si es un extremo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \\ H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matriz Hessiana en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  es diagonal con los dos elementos de la diagonal principal mayores que 0, por tanto la función alcanza un mínimo relativo en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Estudiamos ahora como se comporta  $f$  en la frontera de su dominio. Para ello restringimos la función a la frontera. Como la frontera es una circunferencia para hacer esta restricción hacemos un cambio a coordenadas polares.

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Y la función restringida queda:

$$F(\theta) = 2 \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin^2 \theta = 2 - \sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta)$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Calculamos los extremos de esta función, para ello estudiamos sus puntos críticos y los extremos del intervalo.

$$\begin{aligned}F'(\theta) &= -\sqrt{2}(\cos \theta - \sin \theta) \Rightarrow \\ \sqrt{2}(\sin \theta - \cos \theta) &= 0 \Rightarrow \sin \theta = \cos \theta \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F''(\theta) &= \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) \\ F''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \\ F''\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Luego la función alcanza un mínimo absoluto en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y un máximo absoluto en  $(-1, -1)$ .

b) Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por  $z = x^2 - y^2 + 1$  e inferiormente por el plano XY en la región definida por el cuadrado de vértices  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, -1)$  y  $(-1, 1)$ .

La región definida por esos vértices será:

$$-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$$

Luego el volumen quedará:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - y^2 + 1) dy dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y - \frac{y^3}{3} + y \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \left( 2x^2 - \frac{2}{3} + 2 \right) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{2x}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = 4$$

c) Resuelva el Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(x + y) - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La ecuación diferencial que forma parte de este problema de valor inicial (PVI) es una ecuación diferencial lineal, podemos ponerla de la forma  $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x - 1$ .

Para resolverla primero hallaremos una solución de la ecuación homogénea y aplicaremos después el método de variación de las constantes.

La ecuación homogénea es  $y' - \frac{1}{2}y = 0$

Tenemos que la función nula  $y = 0$  es solución de esta ecuación.

Si consideramos que  $y \neq 0$  entonces podemos dividir por  $y$  en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x} = K e^{\frac{1}{2}x} \text{ con } K \neq 0$$

Incorporando la solución  $y = 0$ , las soluciones de la ecuación diferencial homogénea vendrán dadas por

$$y = K e^{\frac{x}{2}} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Aplicamos ahora el método de variación de las constantes para hallar las soluciones de la ecuación completa, para ello tomamos como solución de la ecuación completa  $y = K(x)e^{\frac{x}{2}}$ . Entonces  $y'(x) = K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}}$  y sustituyendo en la ecuación obtenemos  $K(x)$

$$\begin{aligned} K'(x)e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}K(x)e^{\frac{x}{2}} &= \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow K'(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow K'(x) &= \left(\frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow K(x) = \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}} dx = \int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Esta integral la resolveremos por partes, tomando  $u = x \Rightarrow du = dx$  y  $dv = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{x}{2}}$  queda

$$\int \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} dx = -xe^{-\frac{x}{2}} + \int e^{-\frac{x}{2}} dx = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Luego

$$K(x) = -xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + C = -xe^{-\frac{x}{2}} + C$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$y = e^{\frac{x}{2}} - x$$

**Cartagena99**