FUNDAMENTOS DE FÍSICA I **Curso 2010-11**

Convocatoria de Febrero

Apellidos:__________________________________ **Nombre:**_______________ **Grupo: E**

Problemas

(Tiempo: 90 minutos)

P1. Un planeta esférico está formado por un núcleo central, de radio R_1 y densidad constante d_0, recubierto de una corteza de radio exterior R_2 y densidad variable $d(r) = 5d_0 r^2 / 3R_1^2$ ($R_1 \leq r \leq R_2$). Calcular:

a) La masa total del planeta y el peso que tendría una persona de masa *m* en su superficie.

b) Se sitúa un satélite en órbita geoestacionaria alrededor del planeta (en órbita geoestacionaria significa con periodo de rotación igual al del planeta). Calcular el radio de dicha órbita sabiendo que los días del planeta duran T segundos.

c) Se practica un túnel que atraviesa el planeta según su eje de rotación, depositando en reposo una masa *m* a una distancia *D* del centro ($D < R_1$). Deducir el tipo de movimiento de esta masa, su velocidad máxima y el tiempo que tardaría en volver al punto de partida.

a) La masa total es la suma de la masa del núcleo y la masa de la corteza. Para calcular ésta última hay que integrar, puesto que la densidad no es constante. El elemento diferencial de volumen adecuado (*dV*) es el volumen comprendido entre una esfera de radio *r* y otra concéntrica de radio (*r*+*dr*), es decir:

$$dV = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi\ r^3 = 4\pi\ r^2 dr$$

donde se han despreciado los términos en $(dr)^2$ y $(dr)^3$.

$$M = \frac{4}{3}d_0\pi R_1^3 + \frac{5}{3}\frac{d_0}{R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} r^2(4\pi r^2 dr) = \frac{4}{3}d_0\pi R_1^3 + \frac{4\pi}{3}d_0\left(\frac{R_2^5}{R_1^2} - R_1^3\right) = \frac{4\pi}{3}d_0\frac{R_2^5}{R_1^2}$$

El peso de una persona de masa *m* sería: $P = G\frac{Mm}{R_2^2} = Gm\frac{4\pi}{3}d_0\frac{R_2^3}{R_1^2}$

b) La órbita geoestacionaria de radio *r* para el satélite de masa m_s debe verificar:

$$G\frac{Mm_s}{r^2} = m_s\frac{\mathrm{v}^2}{r};\ \text{con}\ \mathrm{v} = \frac{2\pi}{T}r\text{, luego}\ r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{G}{3\pi}d_0\frac{R_2^5}{R_1^2}T^2}$$

c) La fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre la masa *m* es la misma que ejercería una masa puntual colocada en el centro del planeta y cuyo valor fuese la masa encerrada por una esfera de radio *r*, siendo *r* la posición de dicha masa. Como en este caso r < R_1 siempre, la masa de la corteza no influye. Así:

$F_g = -G\dfrac{M_{encerrada}m}{r^2}$ donde: $M_{encerrada} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 d_0$ Por tanto $F_g = -G\dfrac{4\pi d_0 m}{3} r$ que es una fuerza de restitución que da lugar a un Movimiento Armónico Simple en torno al centro del planeta con la siguiente frecuencia angular: $\omega = \sqrt{\dfrac{4\pi\ Gd_0}{3}}$

La amplitud del movimiento es *D*, por lo que la velocidad máxima será

$$V_{\max} = A\omega = D\sqrt{\frac{G4\pi\ d_o}{3}}$$

El tiempo en llegar al punto de partida será un periodo, es decir: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{Gd_0}}$

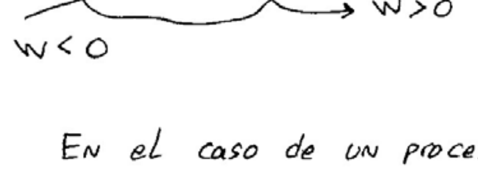
P2. Dos moles de un gas ideal monoatómico se someten a un ciclo *abc*. En el ciclo completo, el gas desprende 800 J de calor. El proceso *ab* se realiza a P constante y el proceso *bc* a V constante. Los estados *a* y *b* tienen, respectivamente, las temperaturas $T_a = 200$ K y $T_b = 300$ K.

a) Determínese si en el proceso *bc* la presión aumenta o disminuye.

b) Dibuje el diagrama *PV* para el ciclo.

c) ¿Cuánto trabajo se efectúa en el proceso *ca*?

El criterio de signos utilizados será el mismo que en clase:



Según este criterio, el 1er pcpio. de la Termodinámica dice

$$Q_{12} = \Delta U + W_{12}$$

En el caso de un proceso cíclico, $\Delta U = 0$, luego:

$Q_{ciclo} = -800$ J (lo cede el gas) $= W_{ciclo}$

$$W_{ciclo} = \underbrace{W_{ab}}_{\text{isobaro}} + \underbrace{W_{bc}}_{\text{isocoro}} + \underbrace{W_{ca}}_{??} = P_a (V_b - V_a) + 0 + W_{ca} =$$

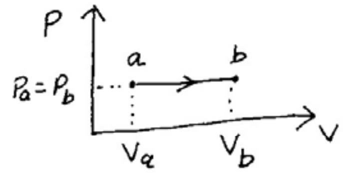
$$= n R (T_b - T_a) + W_{ca} = 2 \text{ moles} \cdot 8'31 \frac{J}{mol\, K} (300 - 200)\, K + W_{ca}$$

$$= -800\, J = 1662\, J + W_{ca} \Rightarrow \boxed{W_{ca} = -2462\, J}$$

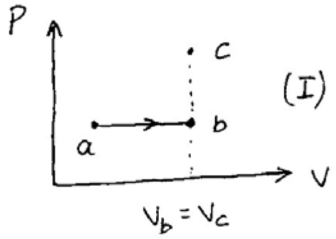
Nótese que no es necesario conocer qué tipo de proceso es el ca para calcular W_{ca}.

Por otro lado $(P_a = P_b)$ $\quad \frac{P_a V_a}{T_a} = \frac{P_a V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{V_a}{200} = \frac{V_b}{300} \Rightarrow V_a = \frac{2}{3} V_b$

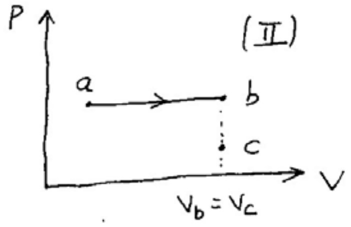
Luego $V_b > V_a \Rightarrow$



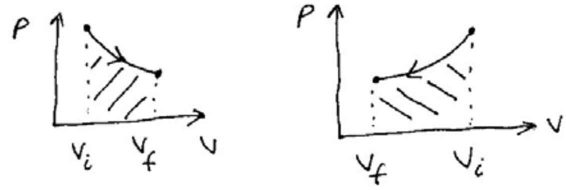
Ahora bien, tenemos 2 posibilidades en cuanto a la posición del estado "c" en el diagrama P-V:



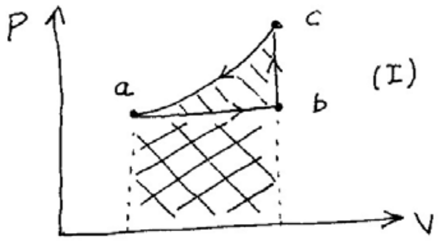
o bien



Para averiguar cual es la correcta, hemos de recordar que en una compresión (disminución de volumen) W es < 0 y en una expansión W > 0 (según el criterio de signos usado).



En nuestro caso, el trabajo <u>total</u> asociado al ciclo es negativo. Comparemos las dos posibilidades:



$W_{bc} = 0$ siempre

$|W_{ca}| > |W_{ab}|$ pues

$>$

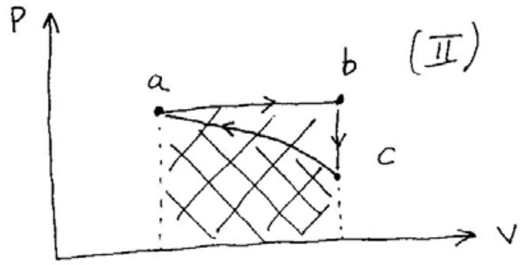
$W_{ca} < 0$; $W_{ab} > 0$

Luego en este caso

$W_{total} < 0$

$\Downarrow$

Esta es la opción CORRECTA $\boxed{P_c > P_b}$



$W_{bc} = 0$, $W_{ab} > 0$ siempre

$|W_{ca}| < |W_{ab}|$ pues

Area bajo ca $<$ Area bajo ab

$W_{ca} < 0$ $W_{ab} > 0$

$W_{total} > 0$

$\Downarrow$

opción INCORRECTA

(Wciclo total $= -800$ J)

Nota: La curva ca es una curva genérica. No tiene por qué corresponder a una isoterma o a una adiabática. No tengo datos para averiguar qué tipo de proceso es.

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I **Curso 2010-11**
Convocatoria de Febrero

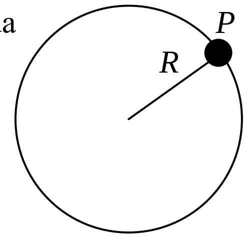
Apellidos:__________________________________ Nombre:_______________ Grupo: E

Cuestiones

(Escoja y conteste CINCO de las siete cuestiones propuestas. Tiempo: 90 minutos)

Cuestiones que responde					

C1. Se hace girar con velocidad *V* una piedra *P* de masa *m* atada a una cuerda de longitud *R*.
Indique con flechas la(s) fuerza(s) que actúan sobre la piedra (desprecie el peso de la piedra), calcule la fuerza total y razone la respuesta:



a) En el sistema de referencia inercial ligado a tierra (sistema laboratorio).
b) En un sistema de referencia unido a la piedra.

a) En el sistema inercial ligado a Tierra la única fuerza es la tensión de la cuerda, dirigida hacia el centro de la trayectoria, que según las leyes de Newton será igual a mv^2/R.

b) En el sistema (no inercial) ligado a la piedra, aparecerá además una fuerza de inercia igual a $-mv^2/R$ (fuerza centrífuga) por lo que la fuerza total sobre la piedra será nula.

C2. Para cierta interacción, la energía potencial E_p entre dos partículas separadas una distancia *x*, viene dada por la expresión:

$$E_p = Cx^2 \text{ donde } C = 3 \text{ J m}^{-2}$$

a) Obtenga una expresión para la fuerza entre las dos partículas en función de la distancia *x*. ¿Cuánto vale esa fuerza cuando $x = 10$ cm?
b) ¿Cuánto vale el trabajo efectuado por la fuerza anterior cuando las dos partículas se acercan desde una distancia inicial de 10 cm a una distancia final de 2 cm?

a) La fuerza será $F_x = -dE_p/dx$, de donde $F_x = -2Cx$. Si hacemos ahora $x = 10$ cm la fuerza F_x será –0.6 N.

b) El trabajo *W* vendrá dado por: $W = \int F dx = -\int 2Cx dx = C(x_1^2 - x_2^2) = 28.8 \ mJ$

que por supuesto es igual a $E_p(x_1) - E_p(x_2)$.

C3. Un asteroide de masa 10^5 kg, que viaja a una velocidad de 35 km/s relativa a la Tierra, choca tangencialmente contra la misma en un punto del Ecuador y en el sentido de rotación de la Tierra, quedando incrustado en ésta. Haciendo uso del momento angular, haga una estimación de la variación relativa de la velocidad angular de la Tierra, como resultado de esa colisión. Exprese el resultado en tanto por ciento. *Nota*: úsese la aproximación $(I_{\text{tierra}} + I_{\text{asteroide}}) \approx I_{\text{tierra}}$. *Datos*: $R_T = 6380$ km, $M_T = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

El momento angular se conserva en el sistema Tierra-asteroide, ya que el momento de las fuerzas exteriores es nulo. La velocidad angular del asteroide justo antes de la colisión es $\omega_{\text{asteroide}} = \text{v}_{\text{asteroide}} / R_{\text{Tierra}}$. Como el asteroide se incrusta en la superficie de la Tierra, la Tierra y el asteroide tendrán la misma velocidad angular después de la colisión. Consideraremos que la Tierra es una esfera uniforme y que el asteroide es una masa puntual.

$$L_i = L_f \quad \rightarrow \quad I_{\text{Earth}}\omega_{\text{Earth}} + I_{\text{asteroid}}\omega_{\text{asteroid}} = \left(I_{\text{Earth}} + I_{\text{asteroid}}\right)\omega_f$$

Se puede despreciar el momento de inercia del asteroide comparado con el de la Tierra en la parte derecha de la ecuación anterior.

$$I_{\text{Tierra}}\omega_{\text{Tierra}} + I_{\text{asteroide}}\omega_{\text{asteroide}} = I_{\text{Tierra}}\omega_f \quad \rightarrow \quad \frac{\left(\omega_f - \omega_{\text{Tierra}}\right)}{\omega_{\text{Tierra}}} = \frac{I_{\text{asteroide}}}{I_{\text{Tierra}}}\frac{\omega_{\text{asteroide}}}{\omega_{\text{Tierra}}}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Tierra}}}\% = \frac{\left(\omega_f - \omega_{\text{Tierra}}\right)}{\omega_{\text{Tierra}}}(100) = \frac{m_{\text{asteroide}}R_{\text{Tierra}}^2}{\frac{2}{5}M_{\text{Tierra}}R_{\text{Tierra}}^2}\frac{\frac{\text{v}_{\text{asteroide}}}{R_{\text{Tierra}}}}{\omega_{\text{Tierra}}} = \frac{m_{\text{asteroide}}}{\frac{2}{5}M_{\text{Earth}}}\frac{v_{\text{asteroide}}}{\omega_{\text{Tierra}}R_{\text{Tierra}}}(100)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{Tierra}}}\% = \frac{\left(1.0\times10^5\,\text{kg}\right)\left(3.5\times10^4\ \text{m/s}\right)}{(0.4)\left(5.97\times10^{24}\,\text{kg}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{86400\,\text{s}}\right)\left(6.38\times10^6\,\text{m}\right)}(100) = \boxed{3.2\times10^{-16}\ \%}$$

C4. Un objeto de masa m_1 está sujeto a un muelle de constante k y se mueve, sin rozamiento, sobre una superficie horizontal lisa. El objeto oscila con una amplitud A y con un periodo T. En el momento en que la elongación del muelle es máxima y el objeto está instantáneamente en reposo, se coloca en su parte superior otro cuerpo de masa m_2. A partir de ese momento los dos objetos permanecen unidos.

a) ¿Cómo varía la amplitud de la oscilación?

b) ¿Cuál debe ser la relación entre m_1 y m_2 para que el nuevo periodo de oscilación sea el doble de T?

a) Cuando el muelle está con su mayor deformación, el objeto está instantáneamente en reposo. Por tanto su energía cinética es cero y la energía total es igual a la energía potencial elástica

$$E_{\text{total}} = E_{\text{p,max}} = \frac{1}{2}kA^2$$

Como el cuerpo de masa m_2 se coloca sobre el objeto de masa m_1 en el momento de máxima extensión del muelle, la energía total no cambia: los dos cuerpos están instantáneamente en reposo y la energía potencial elástica no ha cambiado. Por tanto, *la amplitud de la oscilación no cambia*.

b) El periodo de oscilación inicial del objeto de masa m_1 viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

Tras colocar el cuerpo de masa m_2, el nuevo periodo vendrá dado por

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$$

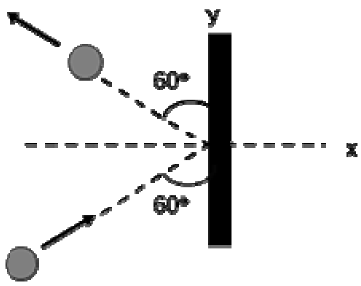
Como deseamos imponer $T' = 2T$,

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 2\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1+m_2}{k} = 4\frac{m_1}{k}$$

$$m_1 + m_2 = 4m_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m_2 = 3m_1}$$

C5. Una bola de acero de 3 kg golpea una pared con una velocidad de 10 m/s formando un ángulo de 60^o y rebota con la misma velocidad y ángulo (ver figura). Si la bola permanece en contacto con la pared un tiempo de 0.2 s, calcular la fuerza media ejercida por la pared sobre la bola.

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$



Calculamos la variación de cada componente del vector **p**

$$\Delta p_x = m(-vsen60^o - vsen60^o) = -2mvsen60^o$$

$$\Delta p_y = m(v\cos 60^o - v\cos 60^o) = 0$$

por tanto: $$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mvsen60^o}{\Delta t} = 259.8\ \ N$$ en el sentido negativo del eje x

C6. Un bloque de madera de densidad δ tiene dimensiones *a*, *b* y *c*. Mientras esta flotando en agua con el lado *a* vertical, se le empuja hacia abajo y, sin sumergirlo del todo, se suelta.

a) Determine la fracción de la altura *a* sumergida en equilibrio.

b) Halle el periodo de las oscilaciones resultantes.

a) Si llamamos *h* a la altura sumergida y ρ a la densidad del agua, en equilibrio *Peso* = *Empuje* es decir: $\delta(abc)g = \rho(hbc)g$ luego: $h = \frac{\delta a}{\rho}$

b) Cuando se le empuja hacia abajo:

$$Peso \;-\; Empuje = m\ddot{x} = \delta(abc)\ddot{x} = \delta(abc)g - (h+x)bcg\rho$$

donde *x* es la parte sumergida respecto del equilibrio. Operando la ecuación anterior:

$\ddot{x} = (g - \frac{hg\rho}{\delta a}) - \frac{g\rho}{\delta a}x = -\frac{g\rho}{\delta a}x$ que es un M.A.S. de periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta a}{g\rho}}$

C7. Un vaso de cobre de 1.5 kg contiene 0.5 kg de hielo a -10 ºC. Se inyectan en el vaso 0.4 kg de vapor de agua a 100 ºC. ¿Qué cantidad de vapor de agua sin condensar quedará cuando se alcance el equilibrio térmico?

Datos: Calor específico del hielo 2090 J/(kg K); calor latente de fusión del hielo 3.34×10^5 J/kg; calor latente de vaporización del agua 2.26×10^6 J/kg; calor específico del cobre 390 J/(kg K). Calor específico del agua 4180 J/(kg K).

La temperatura final de equilibrio del sistema será 100 ^{o}C. Si no, no quedaría vapor de agua sin condensar.

El vapor de agua puede ceder un calor máximo $Q_{ced}=0.4\times2.26\times10^6$ J = 9.04×10^5 J

Para calentar el hielo se necesitan: 0.5×2090×10 = 10450 J

Para la fusión total son necesarios: $0.5\times3.34\times10^5$ J/kg = 1.67×10^5 J.

Para calentar el agua de 0 a 100 ºC se necesitan: 0.5×4180×100 = 209000 J.

También se calentará el cobre y se necesitarán: 1.5×390×110 = 64350 J.

El total requerido para calentar ambos será 450800 J. Por tanto, hay (904000 – 450800) J = 453200 J "sin invertir". 453200 = *m* Lv donde *m* es la masa de vapor de agua que queda sin condensar. Por consiguiente, *m* = 201 g

P1. Un coche de 1500 kg acelera desde los 35 km/h hasta los 55 km/h en 3.2 segundos. Admitiendo que la potencia del motor del coche es siempre la misma y que no hay pérdidas por rozamiento, determínese:

a) Determinar cuánto tiempo tardará en acelerar desde los 55 km/h hasta los 75 km/h.

b) Dibuje una gráfica de la velocidad frente al tiempo suponiendo que el coche ha partido del reposo.

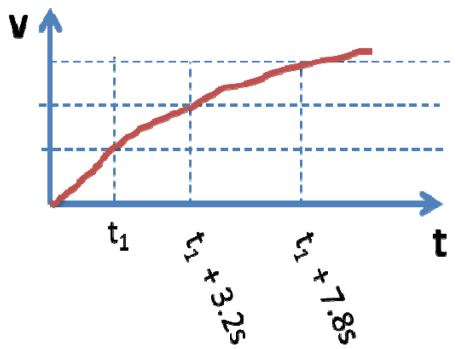
c) Describir el tipo de movimiento, razonando la respuesta.

---

a) $$P = \frac{\Delta E_{cinetica}}{t} \rightarrow P_1 = \frac{m(55\text{ km/h})^2/2 - m(35\text{ km/h})^2/2}{3.2}$$

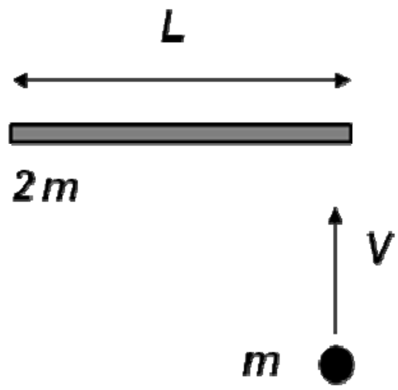
$$P_2 = \frac{m(75\text{ km/h})^2/2 - m(55\text{ km/h})^2/2}{t_2} = P_1 \rightarrow t_2 = 4.6\text{ s}$$

b) La velocidad en función del tiempo es:



c) El movimiento es acelerado, la aceleración NO es constante, sino que es distinta en distintos intervalos de tiempo. Este resultado es consecuencia de que la potencia del motor sea constante. La potencia es producto de fuerza por velocidad. Para que se mantenga constante la potencia, si varía la velocidad la fuerza (y por tanto la aceleración) también tendrá que variar.

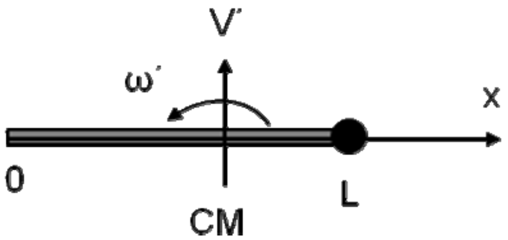
P2. Una barra horizontal de densidad homogénea, masa $2m$ y longitud L, reposa sobre una mesa horizontal. Una masa puntual m que se mueve con velocidad V choca perpendicularmente con el extremo de la barra (ver figura) y queda unida a ésta. Suponiendo que no existe rozamiento, determínese:



a) La velocidad angular del sistema masa - barra tras el choque.
b) La variación de energía cinética del sistema a consecuencia del choque.
c) La posición del punto de la barra que permanece estacionario inmediatamente después del choque, en el sistema de laboratorio.

---

a) Sea V' la velocidad del centro de masas del sistema constituido por la barra y la masa. Y sea ω' la velocidad angular del sistema respecto del centro de masas tras el choque (ver figura). La posición del centro de masas del sistema masa-barra tras el choque viene dada por:



$$X_{CM} = \frac{2m\frac{L}{2} + mL}{2m + m} = \frac{2L}{3}$$

El momento de inercia de una barra de masa M y longitud L respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro es $(1/12)\, M{\cdot}L^2$. Aplicando el teorema de Steiner, el momento de inercia de la barra alrededor de un eje paralelo al anterior y que pasa por el CM del sistema es:

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{ML^2}{9}$$

Teniendo en cuenta que $M = 2m$ para la barra y que la partícula está adherida en el extremo de la misma, el momento de inercia total vale:

$$I_{sistema} = \frac{2mL^2}{9} + m\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema en todo el proceso, por lo que se conservan tanto el momento lineal (***p***) como el momento angular (***L***). El momento angular inicial es $mVL/3$ y el final es $I\omega'$ (perpendiculares al plano del papel). Por tanto:

$$\frac{mVL}{3} = I_{sistema}\,\omega' = \frac{mL^2}{3}\,\omega' \text{ ; luego } \omega' = \frac{V}{L}.$$

b) El momento lineal se conserva. El inicial es $m\boldsymbol{V}$ (la barra está en reposo) y el final es $3m\boldsymbol{V}'$. Por lo tanto $\boldsymbol{V}' = \mathbf{V}/3$, que es la velocidad del CM desde el SL.

El choque es inelástico, luego NO se conserva la energía cinética. La energía cinética inicial es: $(E_C)_i = \frac{1}{2} mV^2$

mientras que la final puede escribirse como la suma de la energía cinética de traslación del centro de masas y la de rotación alrededor del centro de masas, es decir:

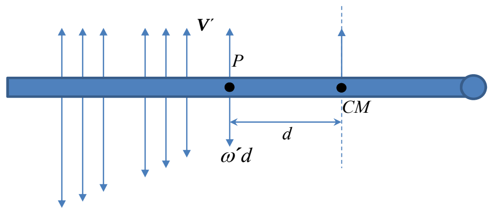
$$(E_C)_f = \frac{1}{2}(3m)V'^2 + \frac{1}{2} I\omega'^2 = \frac{1}{6} mV^2 + \frac{1}{6} mV^2 = \frac{1}{3} mV^2$$

Por tanto, se produce una pérdida de energía cinética

$$\Delta E_C = -\frac{1}{6} mV^2 .$$

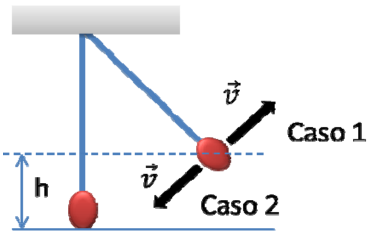
c) Consideremos un punto de la barra situado a una distancia d del centro de masas. Su velocidad es $V' - \omega' d$, por lo que el punto de la barra que permanece estacionario justo después del choque es aquel que verifica que

$$d = \frac{V'}{\omega} = \frac{V}{3} \frac{L}{V} = \frac{L}{3}$$



Es decir, el punto buscado está a una distancia $2L/3$ del extremo de la barra en el que queda adherida la partícula. El punto P indicado en el dibujo es el que permanece estacionario solo en el instante inmediatamente después del choque. Dicho punto NO es el CM.

C1.- Desde un punto que está a una cierta altura h, se lanza un péndulo con una velocidad inicial de 3 m/s de dos maneras diferentes (ver figura). En el primer caso el lanzamiento se produce a lo largo de la trayectoria y hacia arriba. En el segundo caso, el lanzamiento se produce a lo largo de la trayectoria y hacia abajo. ¿En cuál de los dos lanzamientos alcanza el péndulo un ángulo mayor respecto de la posición de equilibrio?



Los dos lanzamientos producirán el mismo resultado. Basta aplicar la ley de conservación de la energía mecánica entre el punto de lanzamiento y el punto más alto.

$$E_1 = E_2 \rightarrow mgh + \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}^2 = mgh_{max}$$

La velocidad de lanzamiento no importa al importar sólo el módulo y por tanto alcanzando la misma altura y consecuentemente el mismo ángulo. También, el primer lanzamiento ocasiona que el péndulo alcance la máxima altura volviendo al punto de lanzamiento con la misma velocidad con la que ha sido lanzado duplicando las condiciones del primer lanzamiento

C2.-Un balón de fútbol tiene una masa de 0.4 kg. Inicialmente se mueve horizontalmente hacia la izquierda con una velocidad de 20 m/s, pero luego es pateado de modo que adquiere una velocidad de 30 m/s con un ángulo de 45º hacia arriba y hacia la derecha. Suponiendo que el tiempo de choque es Δt = 0.01 s, calcular:

a) El impulso de la fuerza neta.

b) La fuerza neta media durante el choque.

---

a) Las velocidades inicial y final no están alineadas, y debemos de tratar el momento lineal y el impulso como vectores, usando sus componentes *X*, *Y*. Tomando el eje *X* horizontal hacia la derecha y el *Y* vertical hacia arriba, obtenemos las siguientes componentes de la velocidad:

$$\mathrm{v}_{1,x} = -20\,\mathrm{m/s};\ \mathrm{v}_{1,y} = 0\,\mathrm{m/s},$$

$$\mathrm{v}_{2,x} = \mathrm{v}_{2,y} = (0.707)(30\,\mathrm{m/s}) = 21.2\ \mathrm{m/s}$$

La componente *X* del impulso es igual a la componente *X* del cambio de momento lineal, e igualmente para las componentes y:

$J_x = p_{2,x} - p_{1,x} = m(\mathrm{v}_{2,x} - \mathrm{v}_{1,x}) =$ (0.40 kg)(21.2 m/s-(-20 m/s)) = 16.5 kg·m/s,

$J_y = p_{2,y} - p_{1,y} = m(\mathrm{v}_{2,y} - \mathrm{v}_{1,y}) =$ (0.40 kg) (21.2 m/s -0) = 8.5 kg·m/s.

Las componentes de la fuerza neta media sobre el balón son:

$$F_{med,x} = J_x / \Delta t = 1650\ \mathrm{N}, \qquad F_{med,y} = J_y / \Delta t = 850\ \mathrm{N}.$$

La magnitud y la dirección de la fuerza media son:

F_{med}= ((1650 N)^2 + (850 N)^2)$^{1/2}$ = 1.9×10^3 N,

θ= arctan (850 N/1650 N) = 27°, donde θ se mide hacia arriba desde el eje +*X*

C3.-En el lanzamiento de un satélite, el cohete de transporte se desprende de uno de sus propulsores cuando se encuentra a 1500 km de altura y ascendiendo a una velocidad de 2000 m/s. Calcule la velocidad con la que dicho propulsor impactaría contra la superficie de la Tierra si no existiera atmósfera.

Datos: G=6,67×10^{-11} Nm^2/kg^2, R_T=6370 km. M_T=5,97×10^{24} kg.

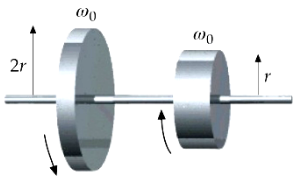
Sea h_o = 1500 km = 1.5×10^6 m, y v_o = 2×10^3 m/s. Al no haber rozamiento, el propulsor seguirá subiendo y cuando vuelva a recuperar la altura h_o tendrá la velocidad v_o, pero hacia abajo, tomando ese instante como posición inicial, se verificará:

$$-\frac{GM_T m}{R_T + h_o} + \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}_o^2 = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}_f^2;$$

$$\mathrm{v}_f^2 = \mathrm{v}_o^2 - \frac{2GM_T}{R_T + h_o} + \frac{2GM_T}{R_T} = \mathrm{v}_o^2 + \frac{2GM_T}{R_T^2} R_T\left(1 - \frac{1}{1 + h_o / R_T}\right) = \mathrm{v}_o^2 + 2gR_T\,0.24 = 3.40\times10^7;\ \mathrm{v}_f$$

= 5.83×10^3 m/s.

C4.-Dos discos de igual masa m y radios R y $2R$ giran sin rozamiento con la misma velocidad angular ω_0 pero en sentidos opuestos (ver figura). Los dos discos son impulsados el uno contra el otro hasta que sus superficies entran en contacto y el rozamiento hace que ambos giren con la misma velocidad angular final ω_f. Calcule ω_f.



El momento de las fuerzas exteriores es nulo, conservándose el momento angular. El momento angular inicial será la resta de los momentos angulares de cada cilindro, puesto que giran en sentido contrario. Teniendo en cuenta que el momento de inercia de un disco de masa M y radio R que gira en torno un eje perpendicular que pasa por su centro es $I = M{\cdot}R^2/2$, los momentos cinéticos antes y después de unirse valen

$$L_i = (I_1 - I_2)\omega_o = \left(\frac{m(2R)^2}{2} - \frac{mR^2}{2}\right)\omega_o = \frac{3mR^2}{2}\omega_o$$

$$L_f = \left(\frac{m(2R)^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\right)\omega_f = \frac{5mR^2}{2}\omega_f$$

Y como han de ser iguales, será $\omega_f = \frac{3}{5}\omega_o$.

C5.-Considérese una esfera hueca de espesor despreciable de radio $R = 10$ m cuya masa $M = 50$ kg, está uniformemente distribuida sobre su superficie.

a) Calcular el campo gravitacional creado en los puntos situados a una distancia del centro de la esfera de 5 y 15 m.

b) ¿A qué potencial se encuentran los puntos situados a 10 m del centro de la esfera?

c) ¿Qué trabajo es necesario realizar para traer una masa de 2 kg desde el infinito a una distancia de 10 m del centro de la esfera?

---

a) Aplicando el teorema de Gauss y tomando como superficie gaussiana una superficie esférica de radio r, se tiene: $\mathbf{g}(r) = -\frac{G}{r^2}m(r)\mathbf{u}_r$, en donde $m(r)$ es la masa encerrada en la esfera de radio r.

Para $r = 5$ m, $\mathbf{g}(r) = 0$ ya que $m(r) = 0$.

Para $r = 15$ m, $\mathbf{g}(r) = -\frac{6.67\times10^{-11}}{15^2}50\mathbf{u}_r = -1.48\times10^{-11}\mathbf{u}_r$ N/kg, ya que $m(r) = 50$ kg.

b) Para $r \geq 10\,\text{m}$ $\quad \phi = -\frac{GM}{r}$; $\phi(10) = -\frac{6.67\times10^{-11}}{10}50 = -3.34\times10^{-10}$ J/kg

c) El trabajo es precisamente $-\phi(10)\times 2\text{kg} = 6.68\times10^{-10}$ J. El trabajo lo realiza el campo.

C6.-Un cubo de madera de 1.5 kg de masa flota sobre agua con el 68% de su volumen sumergido. Un cubo de plomo se sitúa sobre el de madera y éste se sumerge completamente (el nivel del agua queda justo entre la cara superior del bloque de madera y la inferior del cubo de plomo). Calcule la masa del bloque de plomo. Dato: densidad del agua = 1 g/cm^3.

Cuando el bloque de madera flota en equilibrio, el peso debe ser igual al empuje, por lo que: $mg = \rho_{agua} g V_{sumergido} = \rho_{agua} 0.68 V g$; Teniendo en cuenta los datos del enunciado será $V = 2.21\times10^{-3}$ m^3.
Cuando se coloca encima el cubo de plomo, el peso conjunto de los bloques de madera y plomo ha de ser igual al empuje. Esta vez, el volumen sumergido es todo el volumen del bloque de madera (V). Por tanto:
$(m + m_{Pb})g = \rho_{agua} g V$ de donde $m_{\mathrm{Pb}} = 0.706$ kg.

C7.-En una expansión isoterma, un gas ideal a una presión inicial P_0 se expansiona hasta duplicar su volumen inicial V_0. a) Halle su presión después de la expansión. b) Luego, el gas se comprime adiabática y cuasiestáticamente hasta su volumen original, en cuyo momento su presión vale 1.32 P_0. El gas, ¿es monoatómico o diatómico?

---

a) P_{f} será $P_0/2$.

b) $P \cdot V^{\gamma} =$ cte

$P_0/2\ (2V_0)^{\gamma} = 1.32 P_0 V_0^{\gamma}$. $\gamma = 1.4$. Se trata por tanto de un gas diatómico