Expansión en fracciones parciales

Para encontrar la transformada inversa de Laplace de una función podemos convertir esa función en una suma de términos más simples de los cuales conocemos su transformada inversa. Dada la función $F_1(s) = N(s)/D(s)$, si el grado de $N(s)$ es menor que el grado de $D(s)$ podemos convertir $F_1(s)$ en una suma de fracciones parciales. (Si el grado de $N(s)$ es mayor que el grado de $D(s)$, comenzaríamos haciendo la división de los dos polinomios).

raíces reales simples

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \tag{1}$$

Multiplicamos la Eq.1 por $(s+1)$:

$$\frac{2}{s+2} = A + \frac{B(s+1)}{s+2} \tag{2}$$

Sustituyendo el valor de la raíz, $s = -1$, en la Eq.2:

$$A = 2 \tag{3}$$

Multiplicamos la Eq.1 por $(s+2)$:

$$\frac{2}{s+1} = \frac{A(s+2)}{s+1} + B \tag{4}$$

Sustituyendo el valor de la raíz, $s = -2$, en la Eq.4:

$$B = -2 \tag{5}$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \tag{6}$$

Mediante la transformada inversa de Laplace de la Eq.6:

$$f(t) = 2\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] \tag{7}$$

raíces reales múltiples

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2} \tag{8}$$

Multiplicamos la Eq.8 por $(s+1)$ y damos el valor de la raíz, $s = -1$, a la expresión que resulta

$$A = 2 \tag{9}$$

Multiplicamos la Eq.8 por $(s+2)^2$

$$\frac{2}{(s+1)} = \frac{A(s+2)^2}{s+1} + B + C(s+2) \tag{10}$$

y damos el valor de la raíz, $s = -2$, en la Eq.10

$$B = -2 \tag{11}$$

Para calcular el valor de C derivamos la Eq.10

$$-\frac{2}{(s+1)^2} = A\frac{s(s+2)}{(s+1)^2} + C \tag{12}$$

Y para aislar C, damos el valor de la raíz $s=-2$ en la Eq.12

$$C = -2 \tag{13}$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2} \tag{14}$$

Mediante la transformada inversa de Laplace de la Eq.14:

$$f(t) = 2[e^{-t} - te^{-2t} - e^{-2t}] \tag{15}$$

raíces reales complejas o imaginarias puras

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} \tag{16}$$

Multiplicamos la Eq.16 por s y damos el valor de la raíz, $s=0$, en la expresión que resulta para aislar el valor de A

$$A = \frac{3}{5} \tag{17}$$

Multiplicamos la Eq.16 por $s(s^2+2s+5)$

$$3 = A(s^2+2s+5) + Bs^2 + Cs \tag{18}$$

Sustituyendo el valor de $A = 3/5$ en la Eq.18 y agrupando términos

$$3 = s^2[\frac{3}{5} + B] + s[\frac{6}{5} + C] + 3 \tag{19}$$

de donde,

$$B = -\frac{3}{5};\ \ C = -\frac{6}{5} \tag{20}$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}\right) \tag{21}$$

$$F(s) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+(2)^2}\right) \tag{22}$$

$$F(s) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+(2)^2} - \frac{(1/2)\cdot 2}{(s+1)^2+(2)^2}\right) \tag{23}$$

Mediante la Transformada de Laplace inversa de la Eq.23

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right] \tag{24}$$