

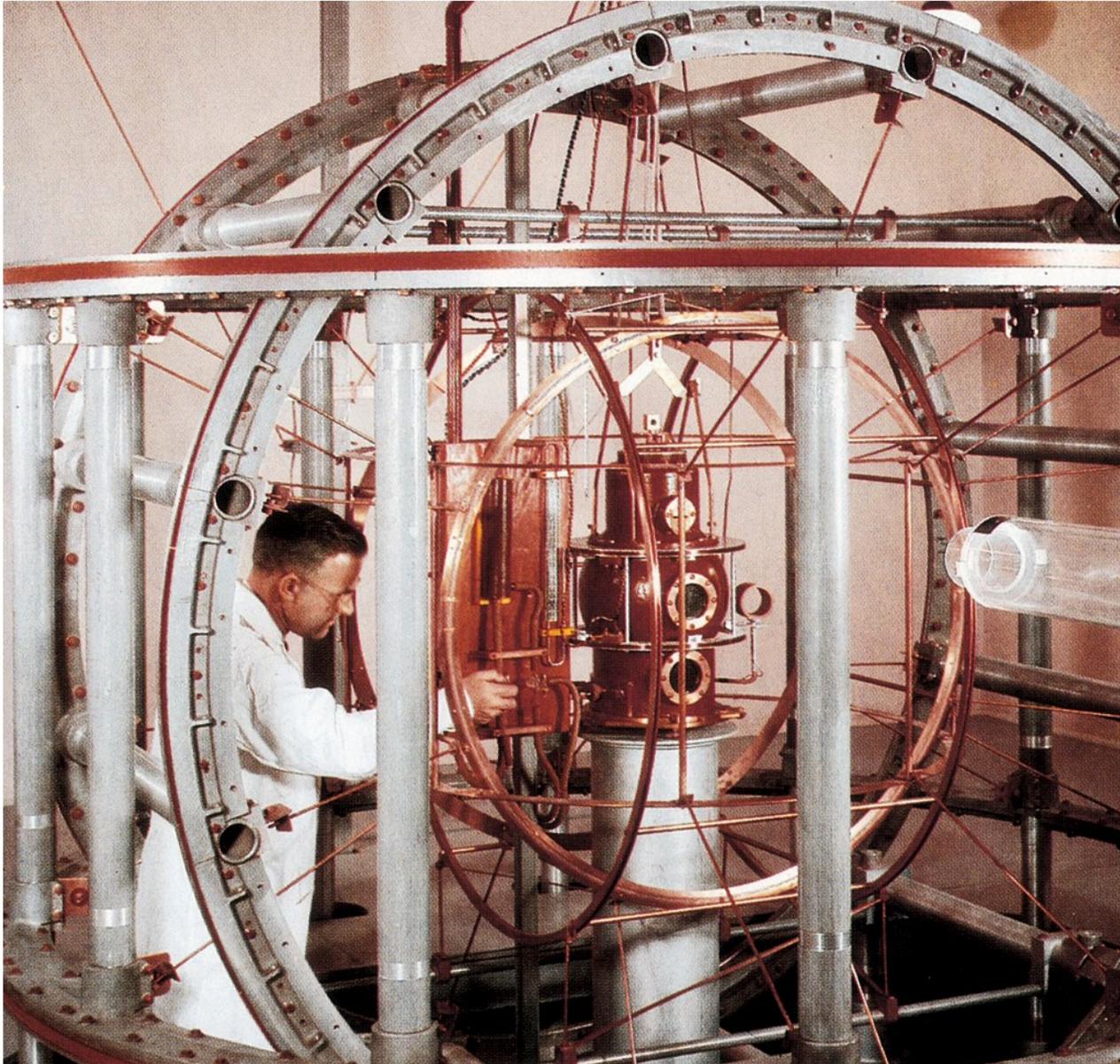
Prof. Maurizio Mattesini



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Capítulo 27

Fuentes del campo magnético



Bobinas de Helmholtz

utilizadas para neutralizar el campo magnético terrestre y proporcionar un campo magnético uniforme en una pequeña región del espacio.

*Kettering Magnetics
Laboratory, Oakland
University (EE.UU)*

Las primeras fuentes conocidas del magnetismo fueron los **imanes permanentes**. Más tarde se descubrió que la propia **corriente eléctrica** puede generar un campo magnético.

27-1

Campo magnético creado por
cargas puntuales en movimiento

Cargas puntuales en movimiento

Cuando una carga puntual q se mueve con velocidad \mathbf{v} , se produce un campo magnético \mathbf{B} en el espacio dado por

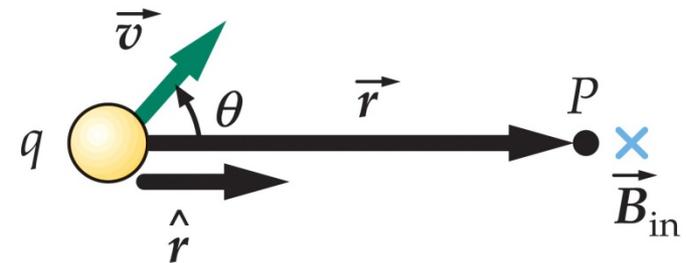
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL MOVÍL

en donde \mathbf{r} es un vector unitario que apunta desde la carga q al punto de observación del campo P y μ_0 es una constante de proporcionalidad llamada **permiabilidad del espacio libre**, de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} / \text{A}^2$$

Las unidades de μ_0 son tales que B debe darse en T cuando q se expresa en C , v en m/s y r en m . La unidad N/A^2 procede del hecho que $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$. La constante $1/(4\pi)$ se incluye arbitrariamente a fin de que el factor 4π no aparezca en la ley de Ampère que estudiaremos más adelante.



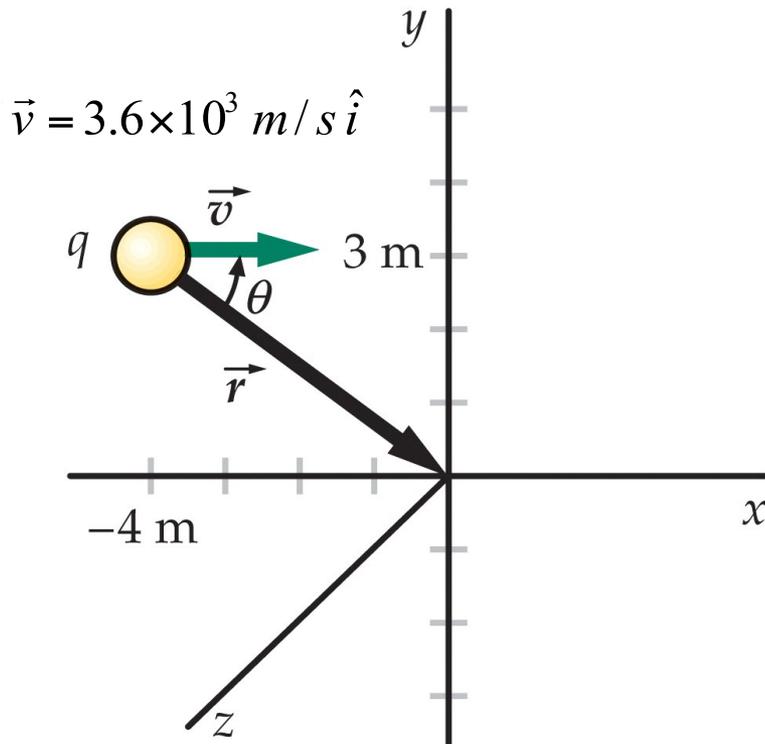
Una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} produce un campo magnético \mathbf{B} en un punto P en la dirección $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$, en donde \mathbf{r} es el vector unitario dirigido desde la carga al punto P .

El campo varía en razón inversa al cuadrado de la distancia desde la carga al punto considerado y es proporcional al seno del ángulo que forman \mathbf{v} y \mathbf{r} .

Campo magnético creado por una carga puntual en movimiento

EJEMPLO 27.1

Una carga puntual de módulo $q=4.5 \text{ nC}$ se mueve con velocidad $v=3.6 \times 10^3 \text{ m/s}$ \hat{i} paralelamente al eje x a lo largo de la recta $y=3 \text{ m}$. Determinar el campo magnético producido en el origen por esta carga cuando se encuentra en el punto $x=-4 \text{ m}$, $y=3 \text{ m}$, como indica la figura.



1. El campo magnético viene dado por :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \text{ con } \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$$

2. Determinar $\hat{\mathbf{r}}$ y r y escribir $\hat{\mathbf{r}}$ en función de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{r} = 4 \text{ m} \hat{\mathbf{i}} - 3 \text{ m} \hat{\mathbf{j}}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{4 \text{ m} \hat{\mathbf{i}} - 3 \text{ m} \hat{\mathbf{j}}}{5 \text{ m}} = 0.8 \hat{\mathbf{i}} - 0.6 \hat{\mathbf{j}}$$

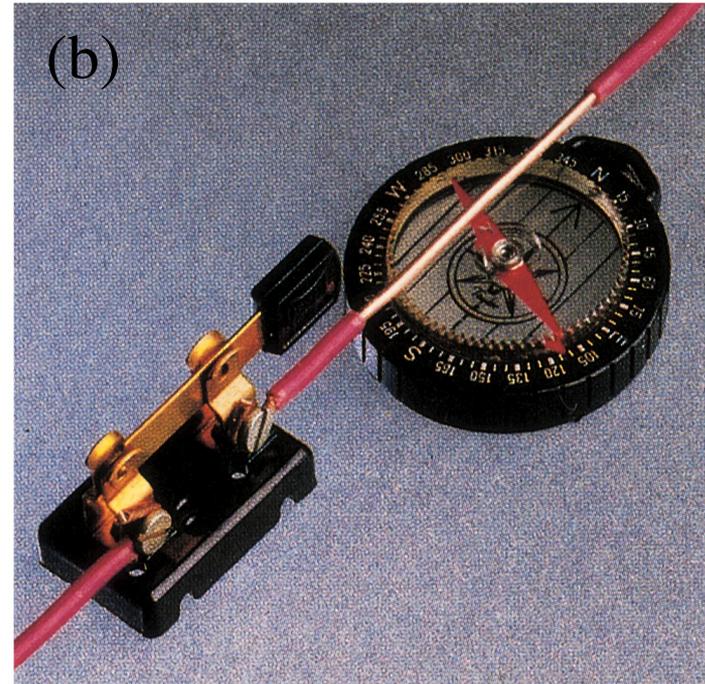
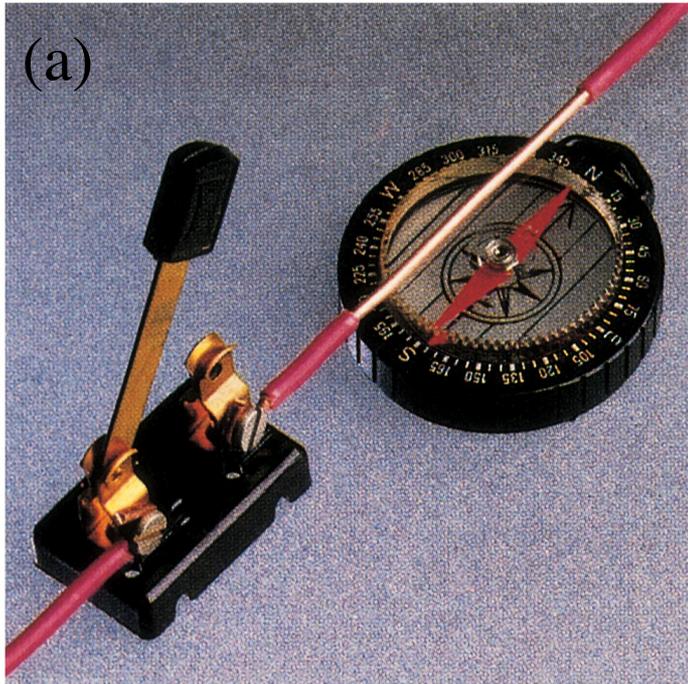
3. Aplicar los resultados anteriores a la ecuación del campo \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(v\hat{\mathbf{i}}) \times (0.8 \hat{\mathbf{i}} - 0.6 \hat{\mathbf{j}})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(-0.6v \hat{\mathbf{k}})}{r^2} \\ &= -\left(10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}\right) \frac{(4.5 \times 10^{-9} \text{ C})(0.6)3.6 \times 10^3 (\text{m} / \text{s})}{(5 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{k}} \\ &= \boxed{-3.89 \times 10^{-14} \text{ T} \hat{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

27-2

Campo magnético creado por
corrientes eléctricas:
ley de Biot y Savart

Experimento de Oersted



- (a) Si por el alambre no pasa corriente, la aguja de la brújula apunta al norte.
- (b) Al pasar corriente por el alambre, la aguja se desvía en la dirección del campo magnético resultante.

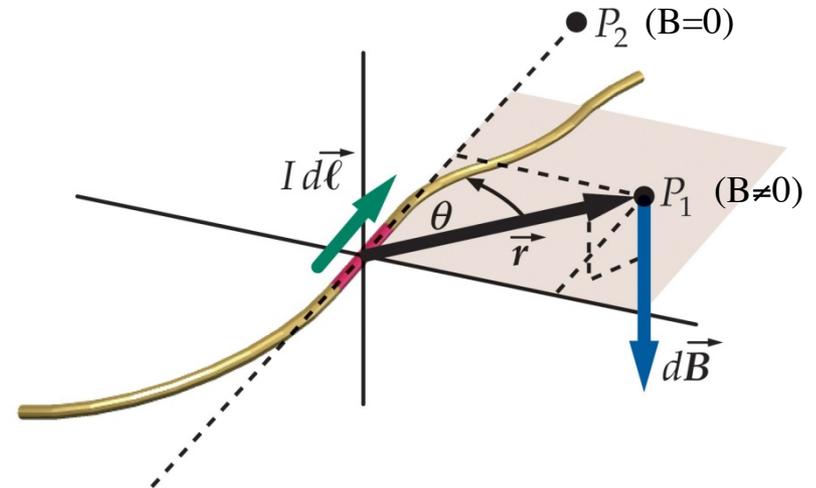
Ley de Biot y Savart

El campo magnético $d\mathbf{B}$ producido por un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$ viene dado por la misma ecuación del campo magnético creado por una carga puntual sustituyendo $q\mathbf{v}$ por $I d\mathbf{l}$:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{LEY DE BIOT Y SAVART}$$

Esta ley es análoga a la ley de Coulomb correspondiente al campo eléctrico creado por una carga puntual. La fuente del campo \mathbf{B} es una carga móvil $q\mathbf{v}$ o un elemento de corriente $I d\mathbf{l}$, del mismo modo que la carga q es la fuente del campo \mathbf{E} .

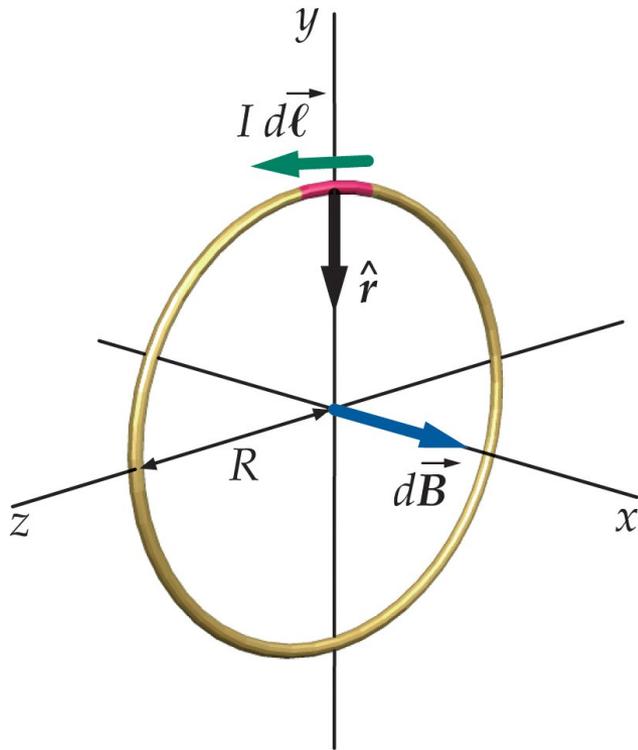
Ambos, \mathbf{B} y \mathbf{E} , **decrecen con el cuadrado de la distancia**. Sin embargo, los aspectos direccionales de los dos campos son completamente distintos. Mientras que el campo \mathbf{E} **apunta en la dirección radial de \mathbf{r}** desde la carga puntual al punto donde observamos el campo (para una carga +), el campo \mathbf{B} **es \perp a \mathbf{r} y \mathbf{v}** en el caso de las cargas puntuales o $d\mathbf{l}$ en el caso de un elemento de corriente.



El elemento $I d\mathbf{l}$ produce un campo magnético en el punto P_1 que es \perp tanto a $I d\mathbf{l}$ como a \mathbf{r} . Este elemento no produce campo magnético en el punto P_2 que está en la misma línea de $I d\mathbf{l}$ ($d\mathbf{B}=0$ si $I d\mathbf{l}$ y \mathbf{r} son paralelos o antiparalelos).

El **campo magnético debido a la corriente total que circula en un circuito** puede calcularse utilizando la ley de Biot y Savart para calcular el campo debido a cada elemento de corriente y después **integrando** para todos los elementos del circuito.

B en el centro de una espira de corriente



Cada elemento de corriente $I dl$ produce un campo magnético dirigido a lo largo del eje de la espira.

El campo magnético $d\mathbf{B}$ **en el centro de la espira** debido al elemento de corriente $I dl$ está dirigido a lo largo del eje de la misma y su módulo viene dado por

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dl \sen \theta}{R^2}$$

en donde θ es el ángulo que forman $I dl$ y \mathbf{r} , que vale 90° para cada elemento de corriente, de modo que $\sen \theta = 1$.

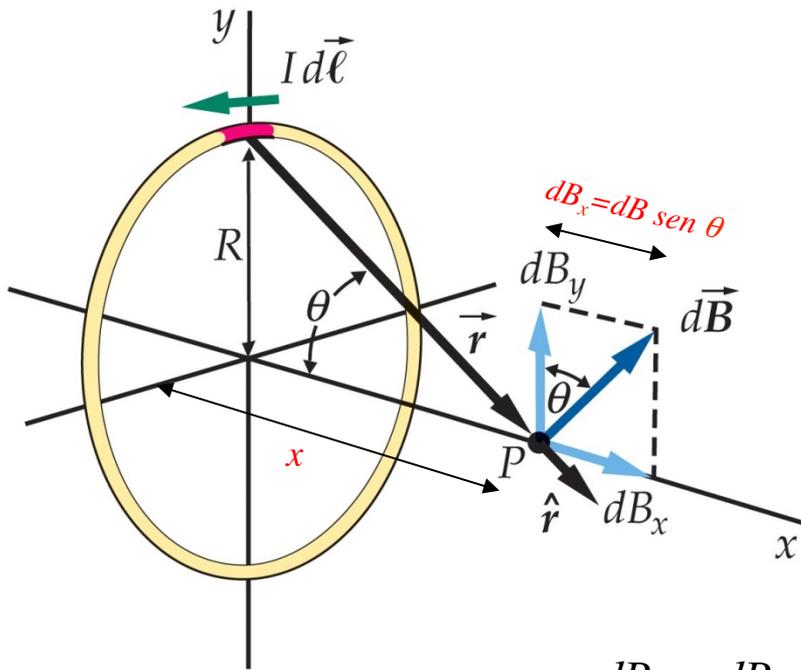
El campo magnético debido a la corriente total se obtiene integrando para todos los elementos de corriente de la espira:

$$B = \int dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl$$

La integral de dl alrededor de la espira completa es la circunferencia de la espira, $2\pi R$. Por lo tanto, el campo magnético causado por la espira completa es

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_o I}{2R}$$

B en el eje de una espira de corriente



Consideramos en primer lugar el elemento Idl situado en la parte superior de la espira. Aquí, como en todos los puntos de la espira, Idl es tangente a la misma y \perp al vector \mathbf{r} . El campo $d\mathbf{B}$ debido a este elemento es \perp a \mathbf{r} y también \perp a Idl y se encuentra en la dirección mostrada en la figura. El módulo de $d\mathbf{B}$ es

$$|d\mathbf{B}| = \frac{I|dl \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(x^2 + R^2)}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $r^2 = x^2 + R^2$ y que dl y \mathbf{r} son \perp , de modo que $|dl \times \mathbf{r}| = dl$. Cuando sumamos para todos los elementos de corriente, las componentes de $d\mathbf{B}$ \perp al eje de la espira (dB_y) suman cero, quedando las componentes dB_x que son paralelas al eje.

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(x^2 + R^2)} \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Integramos dB_x alrededor de la espira:

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint dl$$

$R = r \cdot \sin \theta$
 $\sin \theta = \frac{R}{r}$
 $2\pi R$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

B EN EL EJE DE UNA ESPIRA DE CORRIENTE

A **grandes distancias** de la espira, $x \gg R$, de modo que $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx |x|^3$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{|x|^3}$$

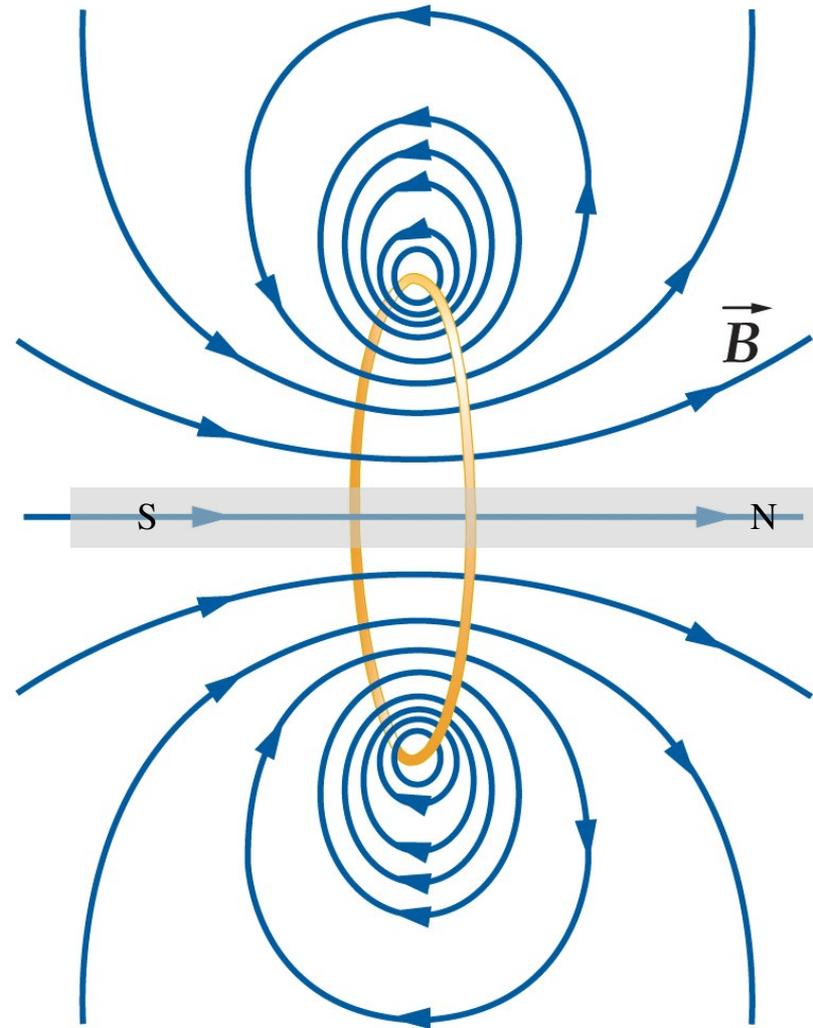
o sea

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3}$$

CAMPO DE UN DIPOLO MAGNÉTICO EN EL EJE DEL DIPOLO

en donde $\mu = NIA\mathbf{n} = I\pi R^2$ es el módulo del momento magnético de la espira. Así pues, **una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético**. Obsérvese la semejanza de esta expresión con la ecuación correspondiente del campo eléctrico en el eje de un dipolo eléctrico de momento p :

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2p}{|x|^3}$$



Campo B en el eje de una bobina

EJEMPLO 27.2

Una bobina circular de radio 5.0 cm tiene 12 vueltas y se encuentra en el plano $x=0$, centrada en el origen. Por ella circula una corriente de 4 A en un sentido tal que el momento magnético de la espira está dirigido a lo largo del eje x . Determinar el campo magnético sobre el eje x en (a) $x=0$, (b) $x=15$ cm y (c) $x=3$ m.

(a) B_x en el centro es N veces $B = \frac{\mu_o I}{2R}$

$$B_x = \frac{\mu_o NI}{2R} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}) \frac{(12)(4 \text{ A})}{2(0.05 \text{ m})} = \boxed{6.03 \times 10^{-4} \text{ T}}$$

(b) B_x sobre el eje es N veces $B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}) \frac{2\pi (0.05 \text{ m})^2 (12)(4 \text{ A})}{\left[(0.15 \text{ m})^2 + (0.05 \text{ m})^2 \right]^{3/2}} = \boxed{1.91 \times 10^{-5} \text{ T}}$$

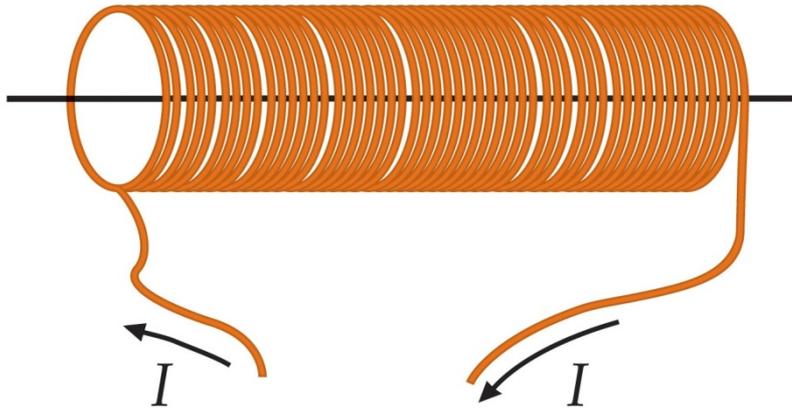
(c) Utilizando la ecuación $B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 NI}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$ obtenemos

$$B_x = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}) \frac{2\pi (0.05 \text{ m})^2 (12)(4 \text{ A})}{\left[(3 \text{ m})^2 + (0.05 \text{ m})^2 \right]^{3/2}} = \boxed{2.791 \times 10^{-9} \text{ T}}$$

Planteamiento del problema:

El campo **B** debido a una bobina de N vueltas es N veces mayor que el debido a una sola vuelta.

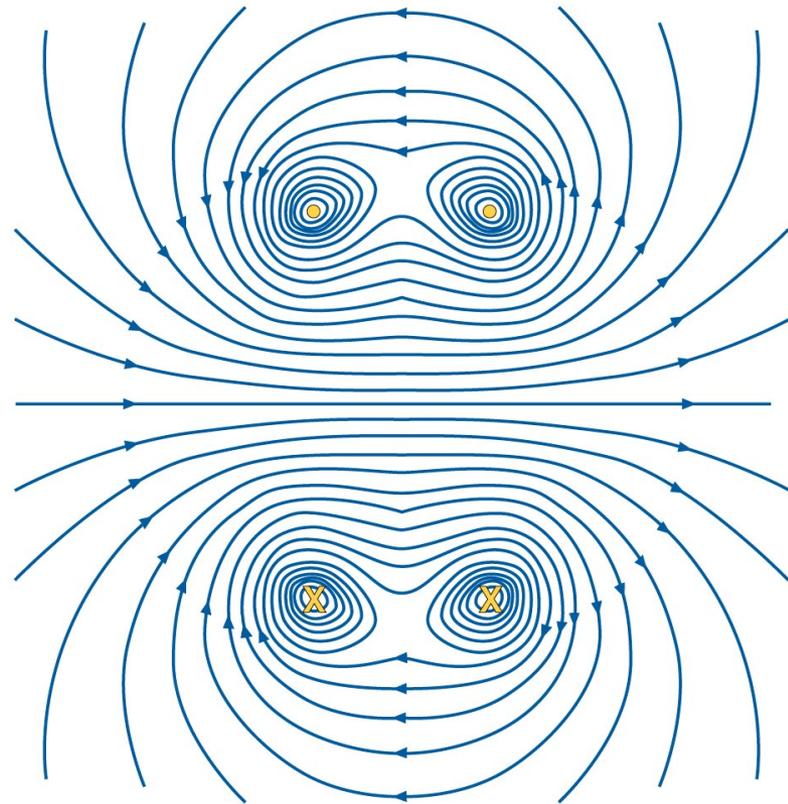
Campo magnético en un solenoide



Un **solenoid** es un alambre enrollado en forma de una hélice con espiras muy próximas entre sí y se utiliza para producir un campo magnético intenso y uniforme en la región rodeada por sus espiras.

El campo magnético de un solenoide es esencialmente el de una serie de N espiras idénticas situadas unas junto a otras.

Desempeña en el magnetismo un papel análogo al de un condensador de placas paralelas que proporciona un campo electrostático uniforme e intenso entre sus placas.

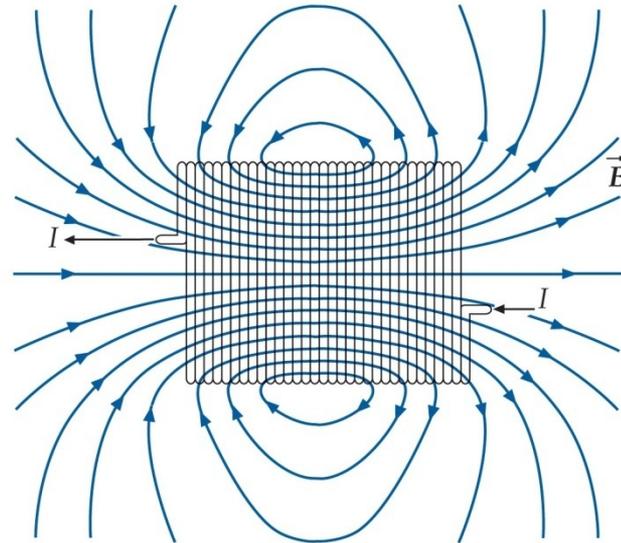


Líneas de campo magnético debidas a **dos espiras** que transportan la misma corriente en el mismo sentido. En la región comprendida entre las espiras, los campos magnéticos se suman, de modo que el campo resultante es intenso, mientras que en la regiones alejadas de las espiras, el campo resultante es débil.

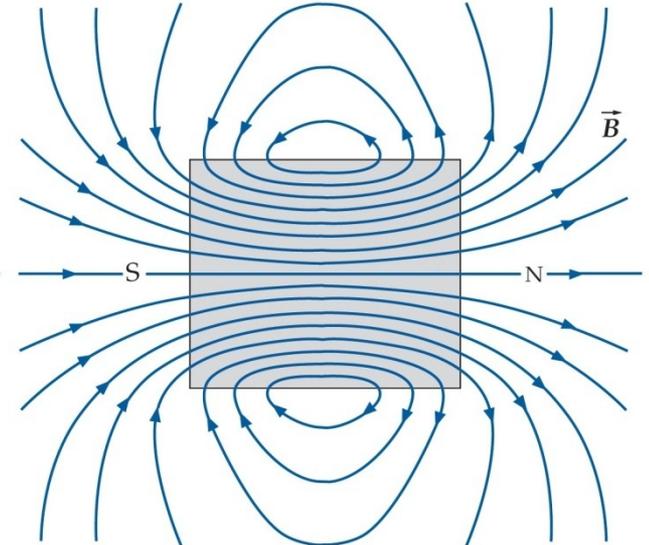
Dentro del solenoide, las líneas son aproximadamente paralelas al eje y están espaciadas estrecha y uniformemente, indicando la existencia de un campo uniforme e intenso. **Fuera del solenoide** las líneas son mucho menos densas.

Las líneas de campo magnético de un solenoide son idénticas a las de una barra imanada de igual forma.

Solenoide



Barra imanada



Líneas campo magnético de una espira de corriente circular visualizadas mediante limaduras de hierro.



Líneas campo magnético de un solenoide indicadas por *limaduras de hierro*.

Consideramos un solenoide de longitud L formado por N vueltas de cable conductor que transporta una corriente de intensidad I . Calcularemos el campo magnético en el origen. Si $n=N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, en el elemento dx existen ndx vueltas de alambre, cada una de las cuales transporta una corriente I . Por lo tanto, el elemento dx es equivalente a una simple espira que transporta una corriente $di=nI dx$.

El campo \mathbf{B} en el punto sobre el eje x causado por una espira en el origen que transporta una corriente $nI dx$ viene dado por

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

reemplazando I por $di=nI dx$

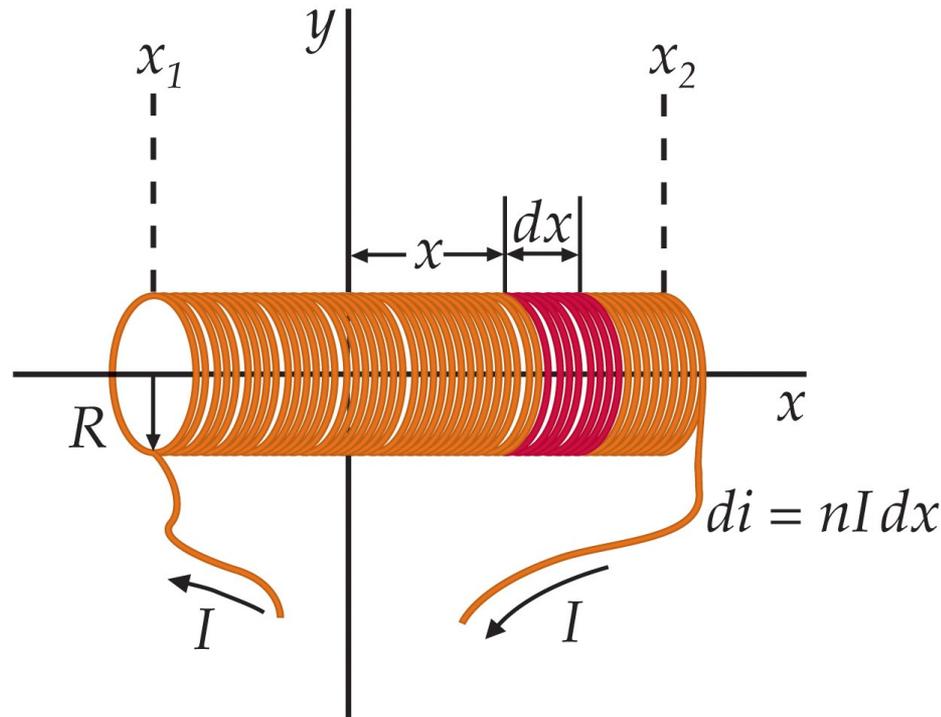
$$dB_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 nI dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

El campo debido al solenoide completo es

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} 2\pi R^2 nI \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{x_2}{R^2 \sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{R^2 \sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_o nI \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

B_x EN EL EJE DEL SOLENOIDE PARA $x=0$



La integral puede determinarse realizando el cambio de variable $x = R \operatorname{tg} \varphi$ o también sirviéndose de una tabla estándar:

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

Si el solenoide es largo ($L \gg R$), el término de la izquierda encerrado entre paréntesis tiende a +1 y el de la derecha a -1. En estas condiciones, el campo \mathbf{B} es

$$B_x = \mu_0 n I$$

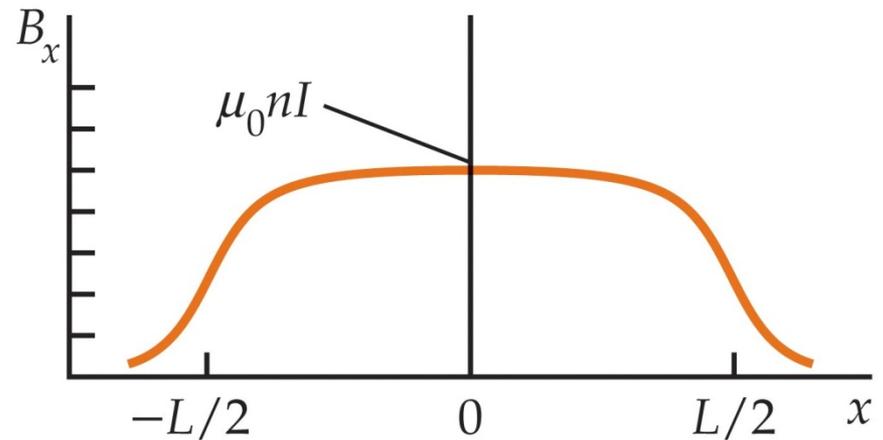
B_x EN EL INTERIOR DEL SOLENOIDE LARGO

Si el origen está en el extremo izquierdo y el solenoide es largo ($x_1=0$, $x_2=L$ y $L \gg R$) el segundo término del paréntesis es cero y el primero tiende a 1, de modo que

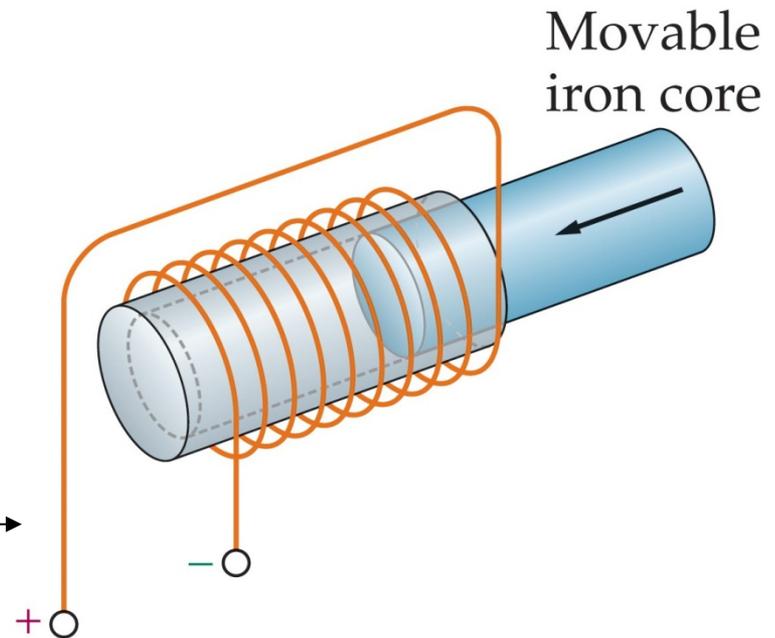
$$B_x \approx \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

Por lo tanto, el módulo de \mathbf{B} en cualquiera de los extremos de un solenoide largo es igual a la mitad que en los puntos interiores del solenoide.

Un solenoide de un motor de arranque de automóvil. Cuando se suministra energía al solenoide, el campo magnético que genera atrae la pieza de hierro. Esto sirve para encajar las marchas que conectan el motor de arranque con las transmisiones de las ruedas.



La aproximación de que el campo es constante a lo largo del eje del solenoide es muy buena excepto en los puntos muy próximos a los extremos.



B en el centro del solenoide

EJEMPLO 27.5

Determinar el campo magnético en el centro de un solenoide de longitud 20 cm, radio 1.4 cm y 600 vueltas, por el que circula una corriente de intensidad 4 A.

1. Calcularemos exactamente el campo mediante la ecuación :

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_o n I \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right)$$

2. Para un punto en el centro del solenoide , $x_1 = -10 \text{ cm}$ y $x_2 = +10 \text{ cm}$.

Así, cada término entre los paréntesis de la ecuación anterior vale :

$$\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} = \frac{10 \text{ cm}}{\sqrt{(10 \text{ cm})^2 + (1.4 \text{ cm})^2}} = 0.990$$

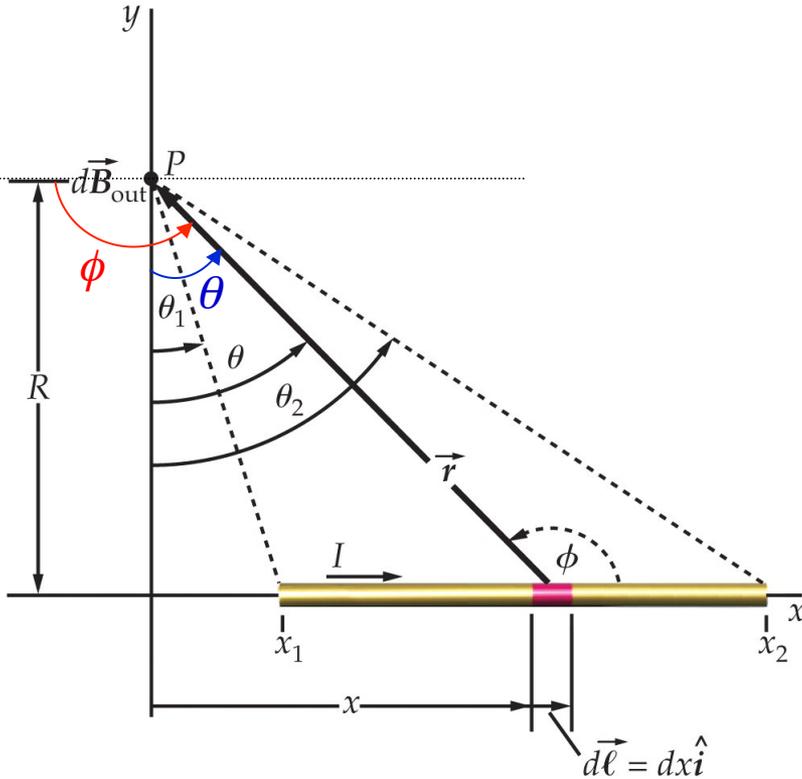
$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} = \frac{-10 \text{ cm}}{\sqrt{(-10 \text{ cm})^2 + (1.4 \text{ cm})^2}} = -0.990$$

3. Sustituyendo estos resultados en B_x :

$$B_x = \frac{1}{2} (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}) \left[\frac{600 \text{ vueltas}}{0.2 \text{ m}} \right] (4 \text{ A})(0.990 + 0.990) = \boxed{1.50 \times 10^{-2} \text{ T}}$$

Observaciones: El campo **B** dentro de un solenoide es bastante grande, unas 250 veces el campo magnético terrestre.

Campo magnético debido a un conductor rectilíneo



$$\phi = \theta + 90 \Rightarrow \text{sen } \theta = \cos \phi$$

$$\text{tg } \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow x = R \text{tg } \theta$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{d \text{tg } \theta}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

Consideramos el cálculo del campo \mathbf{B} en un punto P debido a la corriente que circula por el segmento de alambre recto. La dirección del campo magnético en P debido a este elemento de corriente está dirigida hacia el lector según, queda determinado por la dirección del producto $I d\mathbf{l} \times \hat{r}$. Obsérvese que todos los elementos de corrientes dan contribuciones en esta misma dirección y sentido.

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \text{sen } \phi$$

Escribimos esta expresión en función de θ en lugar de x :

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta$$

Para sumar todos los elementos de corriente necesitamos relacionar las variables x , r y θ :

$$x = R \text{tg } \theta$$

Diferenciando ambos miembros de la ecuación con R constante, se obtiene

$$dx = R \sec^2 \theta d\theta = R \frac{r^2}{R^2} d\theta = \frac{r^2}{R} d\theta$$

Sustituyendo dx por esta expresión se obtiene

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{r^2 d\theta}{R} \cos \theta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta$$

Sumamos las contribuciones de todos los elementos infinitesimales del segmento, integrando desde $\theta = \theta_1$ hasta $\theta = \theta_2$

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

y obtenemos

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

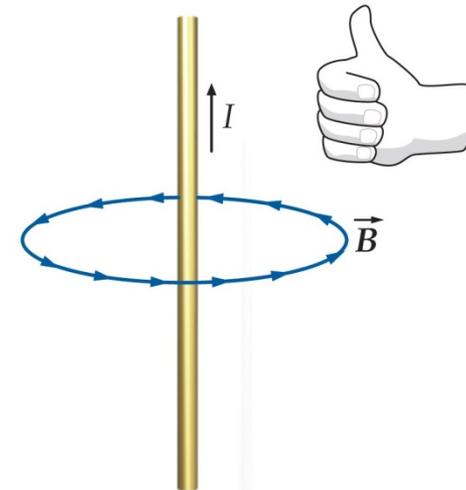
B_x DEBIDO A UN SEGMENTO DE CONDUCTOR RECTILÍNEO

Si la longitud del conductor tiende a infinito, $\theta_2 \rightarrow +90^\circ$ y $\theta_1 \rightarrow -90^\circ$:

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

B_x DEBIDO A UN SEGMENTO DE CONDUCTOR LARGO RECTILÍNEO

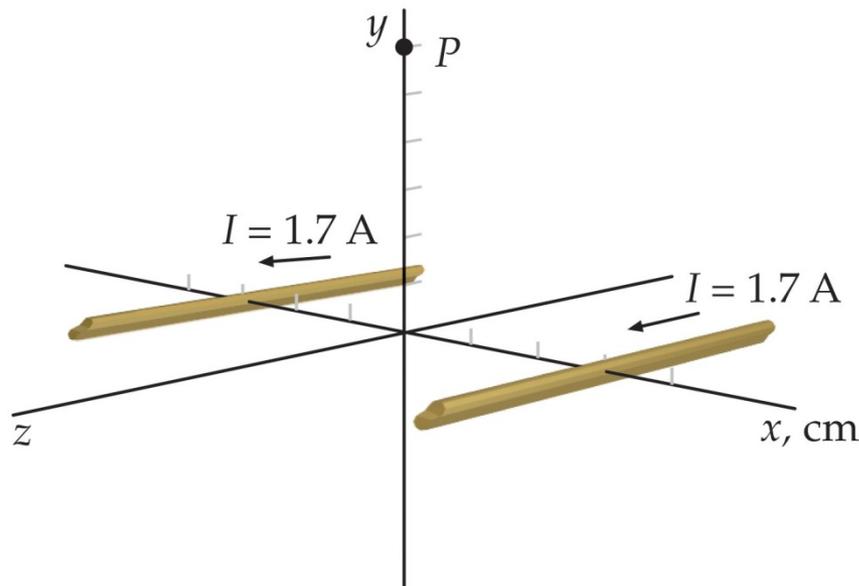
En cualquier punto de espacio, las líneas de campo magnético creado por un conductor largo rectilíneo que transporta corriente, son tangentes a un círculo de radio R que rodea el conductor. El sentido de \mathbf{B} puede determinarse con **la regla de la mano derecha**.



B debido a dos hilos paralelos

EJEMPLO 27.7

Un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente de intensidad de 1.7 A en la dirección positiva, se encuentra a lo largo de la línea $x=-3$ cm, $y=0$. Un conductor semejante que transporta una corriente de 1.7 A en la dirección z positiva está situado sobre la línea $x=+3$ cm, $y=0$. Determinar el campo magnético en un punto del eje y en $y=6$ cm.



Planteamiento del problema: El campo magnético en el punto P es el vector suma del campo \mathbf{B}_I (\mathbf{B}_L) debido al alambre situado a la izquierda en la figura y el campo \mathbf{B}_D (\mathbf{B}_R) debido al de la derecha. Como ambos alambres transportan la misma corriente y se encuentran a igual distancia de P , los módulos B_I y B_D son iguales. \mathbf{B}_I es \perp a la recta R que une el alambre izquierdo con el punto P y \mathbf{B}_D es \perp a la recta que une el alambre derecho con el punto P .

1. El campo en P es el vector suma de los campos B_I y B_D :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_D$$

2. En la figura puede verse que el campo magnético resultante se encuentra en la dirección x negativa y tiene módulo $2B_I \cos \theta$:

$$\mathbf{B} = -2B_I \cos \theta \hat{\mathbf{i}}$$

3. Los módulos de \mathbf{B}_I y \mathbf{B}_D vienen dados por ecuación :

$$B_I = B_D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

4. R es la distancia de cada alambre al punto P . Su valor puede determinarse de la figura y se sustituye en las expresiones de B_I y B_D :

$$R = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 6.71 \text{ cm}$$

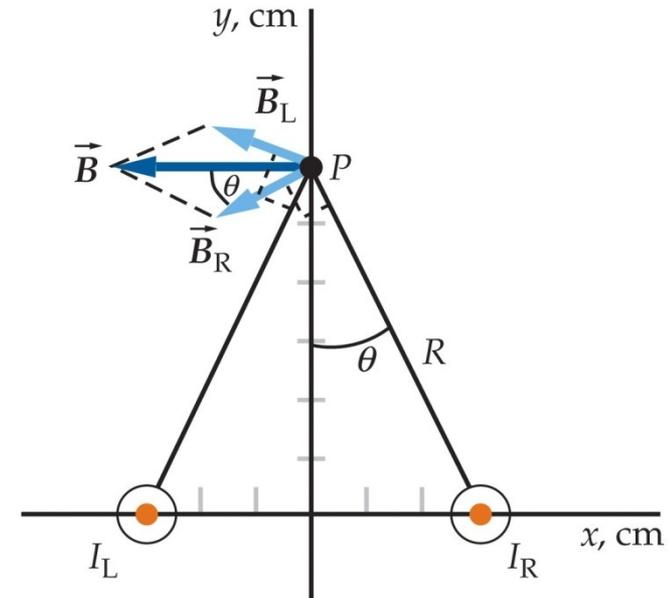
$$B_I = B_D = \left(10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}\right) \frac{2(1.7 \text{ A})}{0.0671 \text{ m}} = 5.07 \times 10^{-6} \text{ T}$$

5. De la figura se obtiene $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{6 \text{ cm}}{R} = \frac{6 \text{ cm}}{6.71 \text{ cm}} = 0.894$$

6. Sustituir los valores de $\cos \theta$ y B_I en la ecuación obtenida en el paso 2 :

$$\mathbf{B} = -2(5.07 \times 10^{-6} \text{ T})(0.894)\hat{\mathbf{i}} = \boxed{-9.07 \times 10^{-6} \text{ T} \hat{\mathbf{i}}}$$



Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

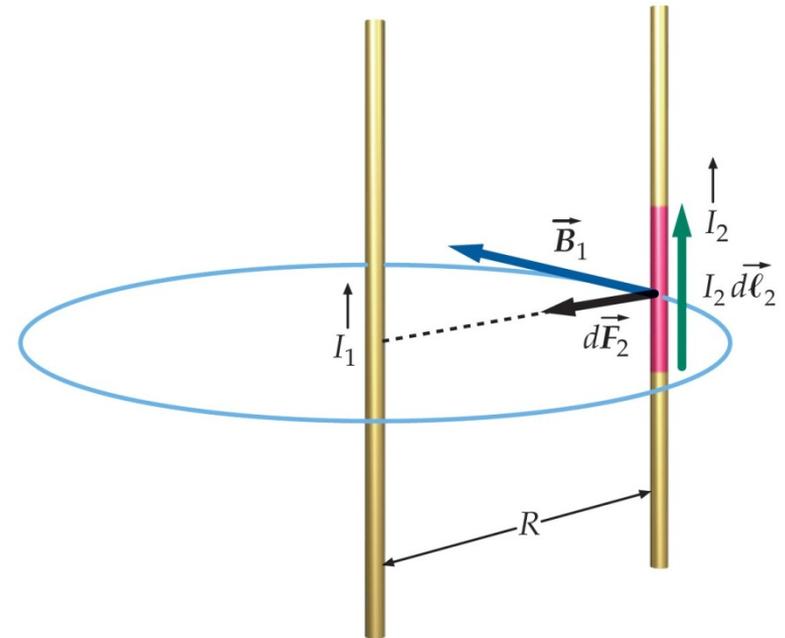
Para determinar la fuerza ejercida por una corriente larga y rectilínea sobre otra podemos utilizar la ecuación del campo magnético producido por un conductor largo y rectilíneo que transporta corriente

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

y la ecuación correspondiente a la fuerza ejercida por un campo \mathbf{B} sobre un segmento de conductor portador de corriente

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Consideramos la fuerza que actúa sobre un segmento dl_2 . El campo \mathbf{B}_1 en este segmento debido a la corriente I_1 es \perp al segmento $I dl_2$. Esto es cierto para todos los elementos de corriente a lo largo del conductor. La fuerza magnética sobre el segmento $I dl_2$ está dirigida hacia la corriente I_1 , ya que $d\mathbf{F} = I_2 dl_2 \times \mathbf{B}_1$. De igual modo, un segmento de corriente $I_1 dl_1$ experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente I_2 . Así pues, **dos corrientes paralelas se atraen una a otra**. Si una de las corrientes se invierte, la fuerza se invertirá, es decir, **dos corrientes antiparalelas se repelerán**. La atracción o repulsión de corrientes paralelas o antiparalelas fue descubierta da **Ampère** una semana después de conocer el descubrimiento de **Oersted**.



Como \mathbf{B}_1 es \perp a $I_2 dl_2$, el módulo de la fuerza magnética es

$$dF_2 = |I dl_2 \times B_1| = I_2 dl_2 B_1$$

y sustituyendo el valor de B, se obtiene

$$dF_2 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

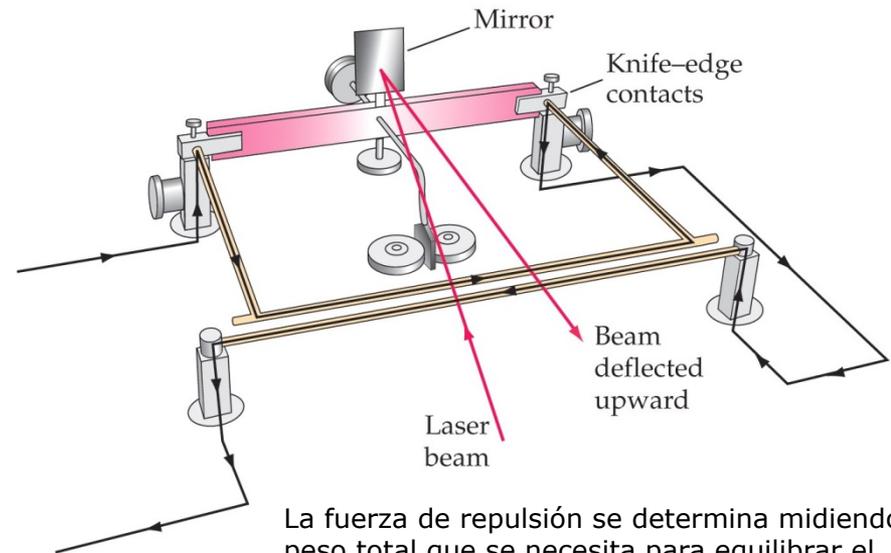
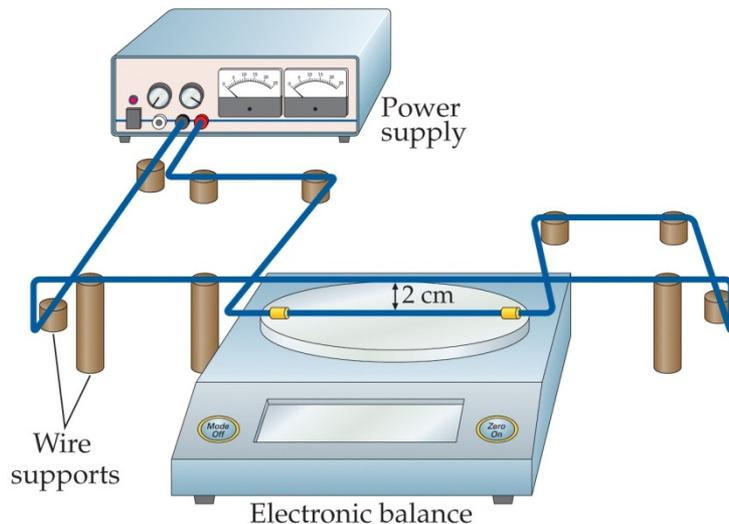
La fuerza por unidad de longitud es
$$\frac{dF_2}{dl_2} = I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi R} = 2 \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$$

En el capítulo 21, el culombio fue definido en función del amperio, pero la definición del amperio fue aplazada. Ahora podemos definir el amperio de modo siguiente:

El **amperio** es aquella corriente constante que si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío con una separación de un metro, produce entre estos conductores una fuerza igual a **2×10^{-7}** newtons por metro de longitud.

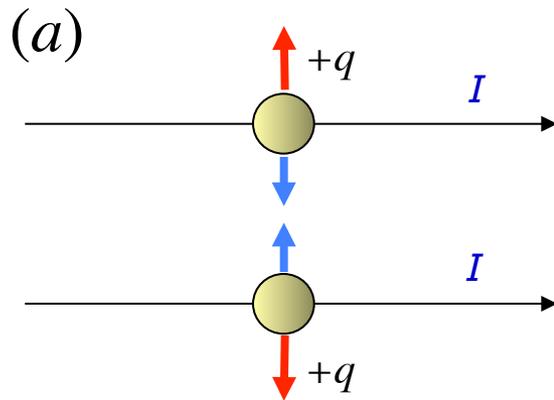
DEFINICIÓN-AMPERIO

Esta definición hace que la permeabilidad del espacio libre sea exactamente $4\pi \times 10^{-7}$ N/A². Las figuras muestran la **balanza de corriente** que puede utilizarse para calibrar un amperímetro a partir de la definición del amperio.

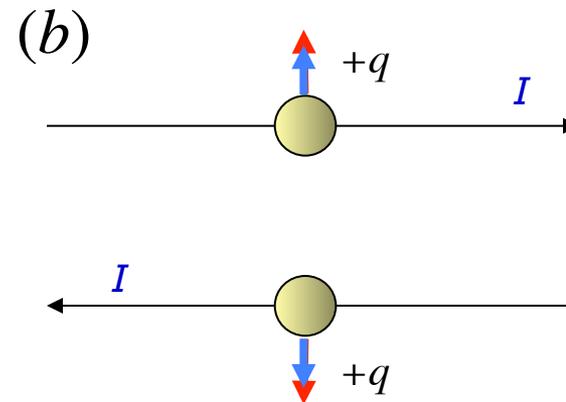


PROBLEMA 1

Comparar los sentidos de las fuerzas eléctrica y magnética entre dos cargas positivas que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas, (a) en el mismo sentido y (b) en sentidos opuestos.



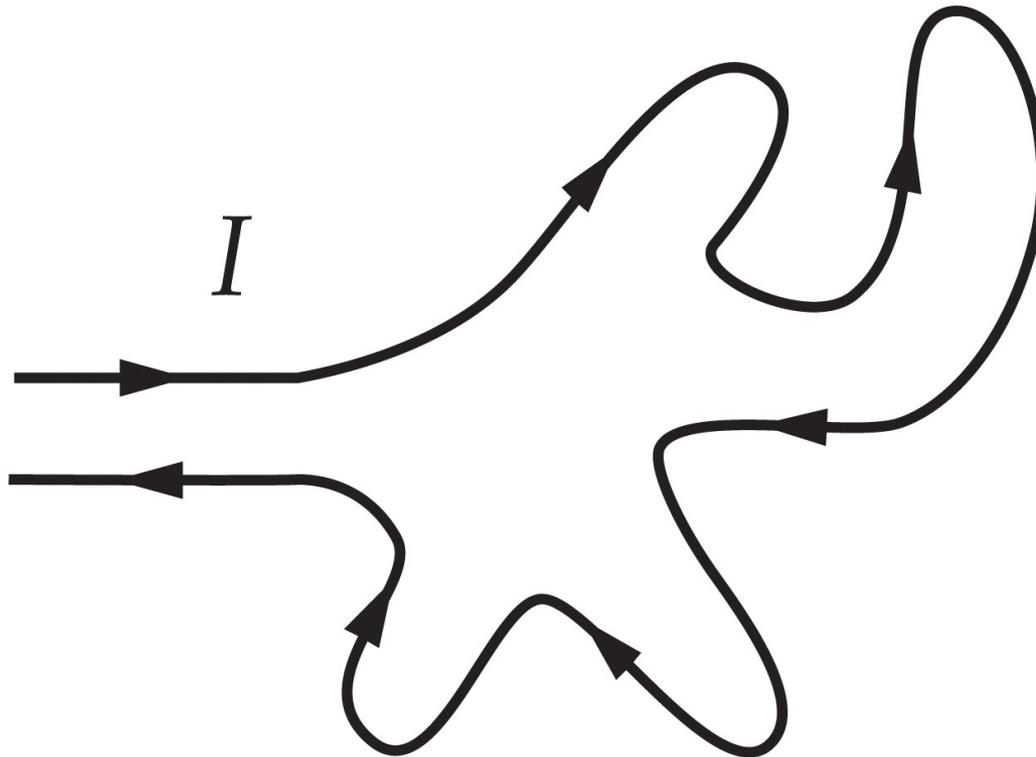
Fuerza eléctrica **repulsiva**
Fuerza magnética **atractiva**



Fuerza eléctrica **repulsiva**
Fuerza magnética **repulsiva**

PROBLEMA 18

Cuando una corriente pasa a través del cable de la figura, ¿éste tiende a agruparse o a formar un círculo?



27-3

Ley de Gauss para el magnetismo

Ley de Gauss

Las líneas del campo \mathbf{B} difieren de las líneas del campo \mathbf{E} en que **las líneas de \mathbf{B} son curvas cerradas y continuas**, mientras que las líneas de \mathbf{E} comienzan y terminan sobre las cargas eléctricas. Parece que las líneas de \mathbf{B} divergen del extremo de la barra correspondiente al polo norte y convergen en el extremo correspondiente al polo sur. Sin embargo, dentro del imán las líneas de \mathbf{B} ni divergen de un punto cerca del polo norte ni convergen de un punto cerca del polo sur.

Si un extremo de una barra magnética está incluido en una superficie gaussiana, el número de líneas que dejan la superficie es exactamente igual al número de las que entran en ella. Es decir, **el flujo neto $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ del campo a través de cualquier superficie cerrada S es siempre cero**

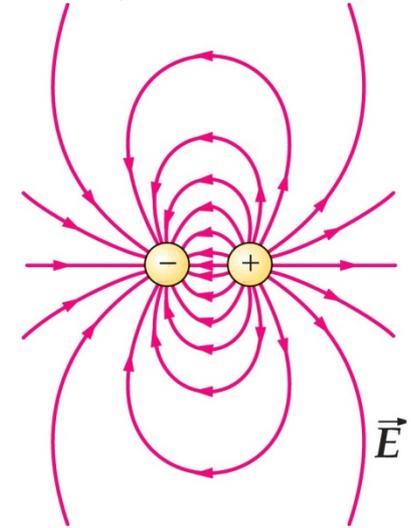
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

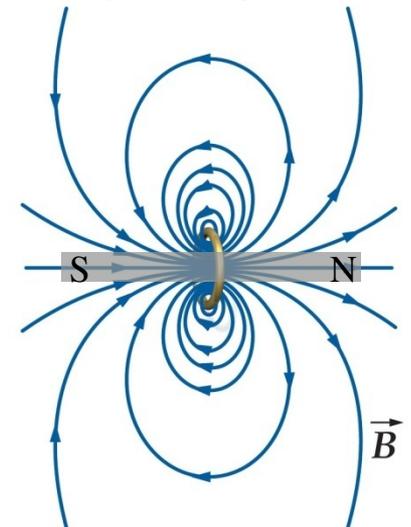
en donde B_n es la componente normal a la superficie S en el elemento de área dA .

La ley de Gauss del magnetismo es la afirmación matemática de que no existen puntos en el espacio a partir de los cuales las líneas de campo divergen, o puntos en los cuales las líneas convergen. Es decir, **los polos magnéticos aislados no existen** y la unidad fundamental del magnetismo es el **dipolo magnético**.

Dipolo eléctrico



Dipolo magnético



27-4

Ley de Ampère

Ley de Ampère

En el capítulo 22 vimos que en distribuciones de cargas altamente simétricas podíamos calcular el campo \mathbf{E} más fácilmente si se utilizaba la ley de Gauss en lugar de la ley de Coulomb. Una situación semejante se presenta en el magnetismo: **la ley de Ampère** puede utilizarse para obtener una expresión del campo \mathbf{B} en **situaciones altamente simétricas**

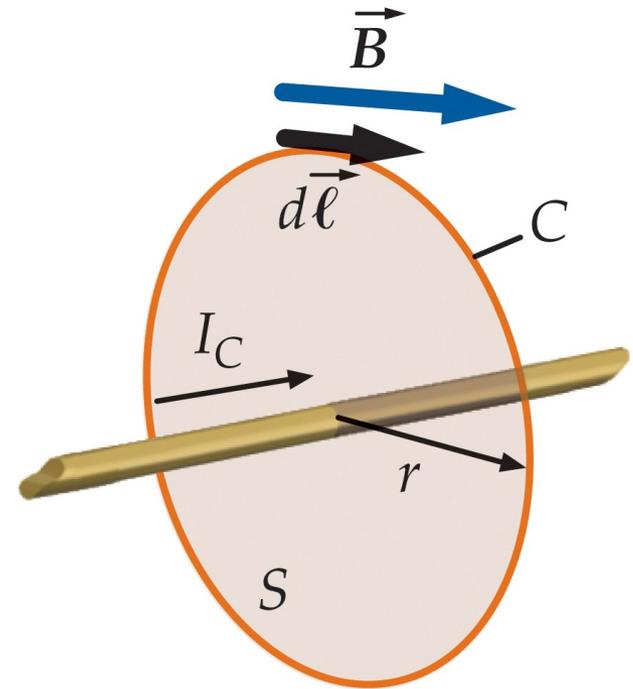
$$\oint_C B_t dl = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C \quad C \text{ es cualquier curva cerrada}$$

LEY DE AMPÈRE

en donde B_t es la componente tangencial del campo y I_C es la corriente neta que penetra en el área S limitada por la curva C . El sentido positivo para el camino de integración viene dado por la dirección de la corriente I_C de acuerdo con la regla de la mano derecha.

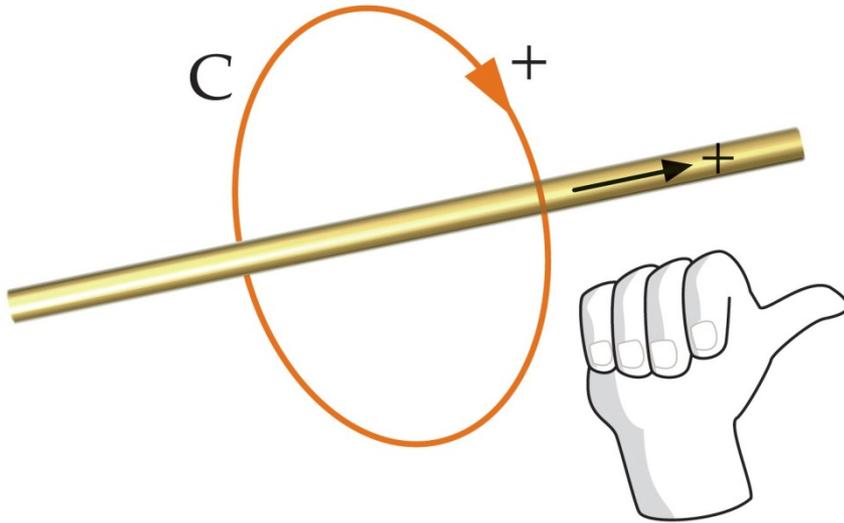
La ley de Ampere es muy útil para calcular campos B en situaciones de simetría tales que $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ puede ser igual a $B \oint_C dl$ (el producto de B por una distancia). La integral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ se denomina **circulación del campo \mathbf{B}** a lo largo de la curva C .

Limitación: la ley de Ampère se cumple para cualquier curva siempre y cuando existe un **alto grado de simetría** y **las corrientes sean estacionarias y continuas**. Esto significa que la corriente no varía con el tiempo y que no hay acumulación espacial de carga.



El sentido positivo para la curva cerrada C es aquel que queda fijado por la **regla de la mano derecha** con el dedo pulgar indicando el sentido de la corriente que atraviesa la superficie encerrada.

Aplicación de la ley de Ampère



La aplicación más simple de la ley de Ampère es la determinación del campo magnético creado por un **conductor infinitamente largo y rectilíneo** portador de una corriente.

Según la ley de Biot y Savart la dirección del campo **B** debido a cada elemento diferencial de corriente es tangente a esta circunferencia, por lo tanto tiene la misma dirección que dl , siendo su módulo constante en todos los puntos de la circunferencia.

La aplicación de la ley de Ampère nos da los siguiente:

$$B \int_C dl = \mu_o I_C$$

en donde se ha tenido en cuenta que B tiene el mismo valor en todos los puntos de la circunferencia. La integral de dl alrededor del círculo es igual a $2\pi r$ y la intensidad I_C es la que corresponde al alambre. Así se obtiene

Sobre una circunferencia que rodea al cable conductor, el campo magnético **B** es constante y tangente a la misma.

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

LEY DE BIOT Y SAVART PARA UN CAMPO DEBIDO A UN SEGMENTO DE CONDUCTOR LARGO RECTILÍNEO

$$B 2\pi r = \mu_o I$$

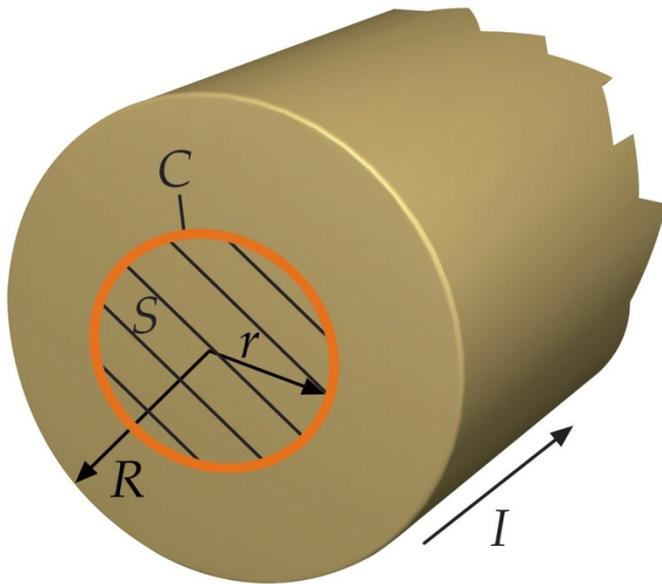
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

que es la misma ecuación obtenida con la **ley de Biot y Savart**.

B en el interior y exterior de un alambre

EJEMPLO 27.9

Un alambre largo y recto de radio R transporta una corriente I uniformemente distribuida en toda el área transversal del conductor. Determinar el campo magnético dentro y fuera del alambre.



Planteamiento del problema:

Utilizaremos la ley de Ampère para calcular \mathbf{B} en virtud del alto grado de simetría. A una distancia r sabemos que \mathbf{B} es tangente a la circunferencia de radio r que rodea el conductor y constante en módulo en todos los puntos de la misma. La corriente que atraviesa la superficie S limitada por C depende de que r sea mayor o menor que el radio del alambre R .

1. La ley de Ampère relaciona la circulación del campo magnético \mathbf{B} alrededor de la curva C con la corriente que atraviesa la superficie encerrada por dicha curva :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I_C$$

2. Evaluar la circulación de \mathbf{B} alrededor de la circunferencia de radio r , coaxial con el hilo :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r$$

3. Sustituir el resultado en la ley de Ampère y obtener \mathbf{B} :

$$B 2\pi r = \mu_o I_C$$

$$B = \frac{\mu_o I_C}{2\pi r}$$

4. Fuera del hilo, $r > R$, y toda la corriente atraviesa la superficie encerrada por la curva C :

$$I_C = I$$

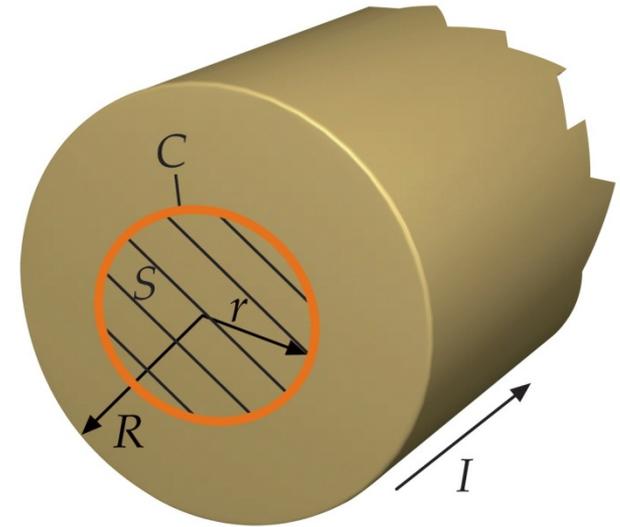
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

5. Dentro del hilo, $r < R$. Considerando una distribución uniforme para I_C , obtener B :

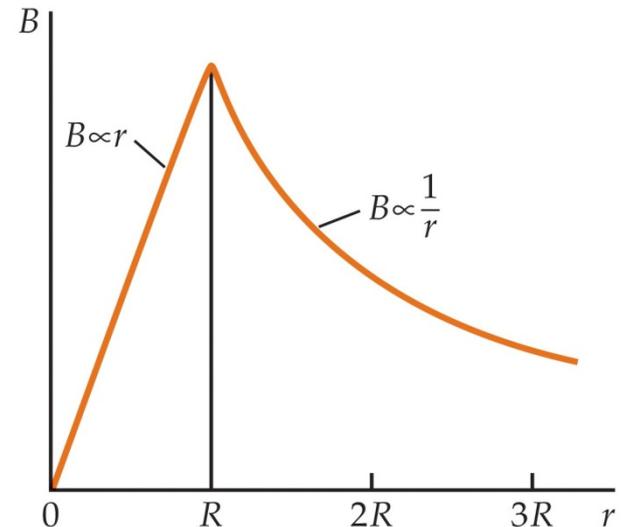
$$\frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$I_C = \frac{r^2}{R^2} I$$

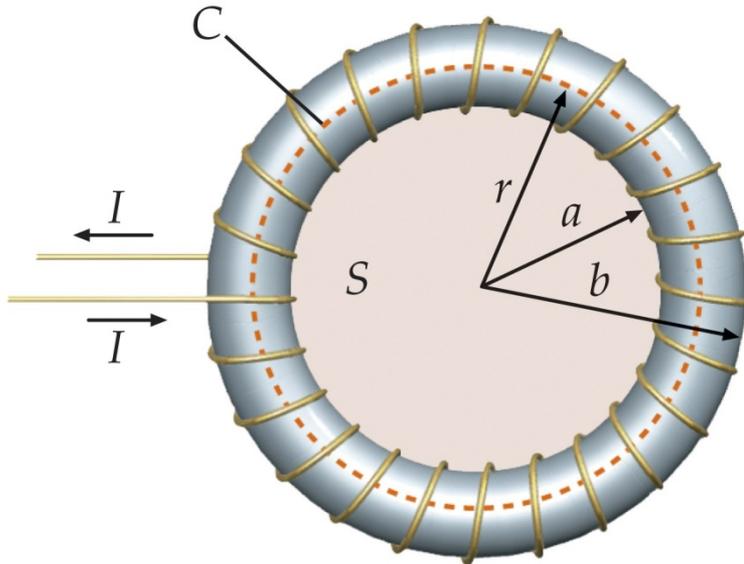
$$B = \frac{\mu_o I_C}{2\pi r} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{(r^2 / R^2) I}{r} = \frac{\mu_o I}{2\pi R^2} r \quad (r \leq R)$$



Observación: Dentro del alambre, el campo crece con la distancia desde el centro del conductor.



Campo magnético de un toroide



Un **toroide** está formado por espiras de alambre arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático. El campo magnético a cualquier distancia r puede determinarse aplicando la ley de Ampère al círculo de radio r . S es la superficie limitada por la curva C . Los hilos que forman el arrollamiento penetran en la superficie S una vez cada vuelta.

Tenemos N vueltas de conductor, cada una transportando una corriente I . Para calcular B , determinaremos la integral de línea alrededor de una circunferencia de radio r centrada en el centro del toroide. Por simetría, \mathbf{B} es tangente a este círculo y constante en módulo en todos los puntos de la circunferencia. Por lo tanto,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi r = \mu_0 I_C$$

Sean a y b los radios interior y exterior del toroide, respectivamente. La corriente total a través de la superficie S limitada por el círculo de radio r para $a < r < b$ es NI . La **ley de Ampère** nos da:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C, \text{ o } (B2\pi r = \mu_0 NI)$$

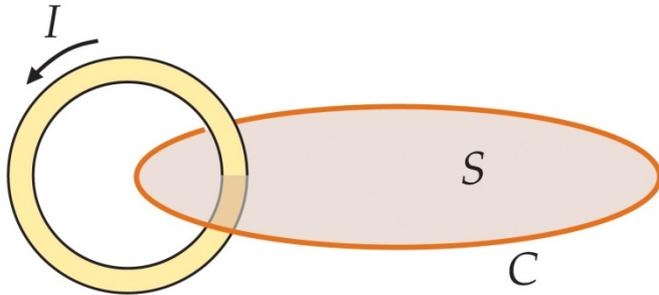
o sea,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

B EN EL INTERIOR DE UN TOROIDE ESTRECHAMENTE ENROLLADO

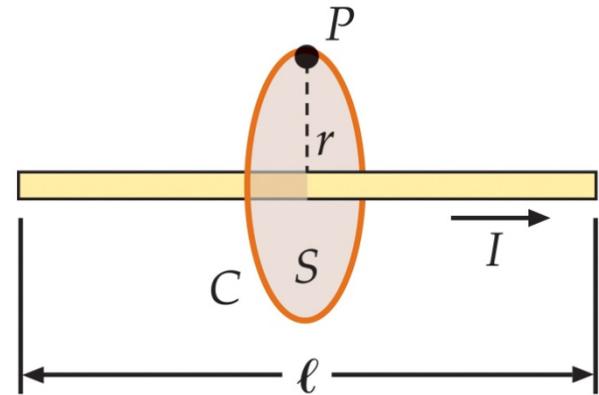
Si r es menor que a , no existe corriente a través de la superficie S . Si r es mayor que b , la corriente total a través de S es cero, pues por cada corriente I hacia dentro de la página de la figura en la superficie interna del solenoide, existe una corriente igual I hacia fuera de la página en la superficie exterior. Así el campo magnético es cero ($\mathbf{B}=\mathbf{0}$), tanto para $r < a$ como para $r > b$:

Limitaciones de la ley de Ampère



La ley de Ampère es válida para la curva C que envuelve a la corriente de la espira circular pero no es útil para hallar B_t debido a no poder sacar B_t fuera de la integral.

La componente tangencial del campo magnético no es constante a lo largo de una curva cualquiera que rodea la corriente I .



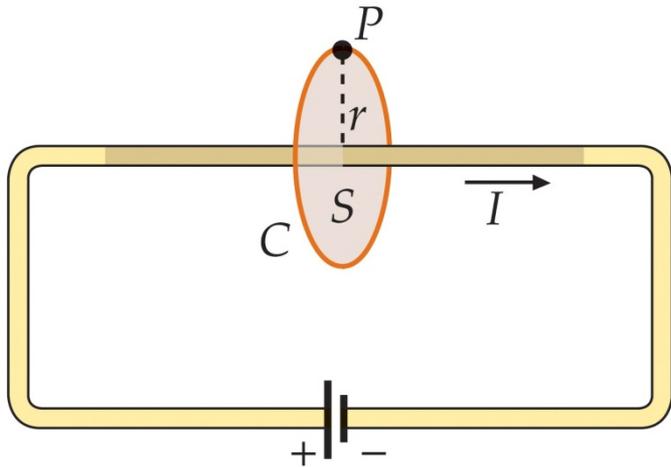
La aplicación de la ley de Ampère para hallar el campo magnético en el punto P de un segmento de corriente finita da un resultado incorrecto:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

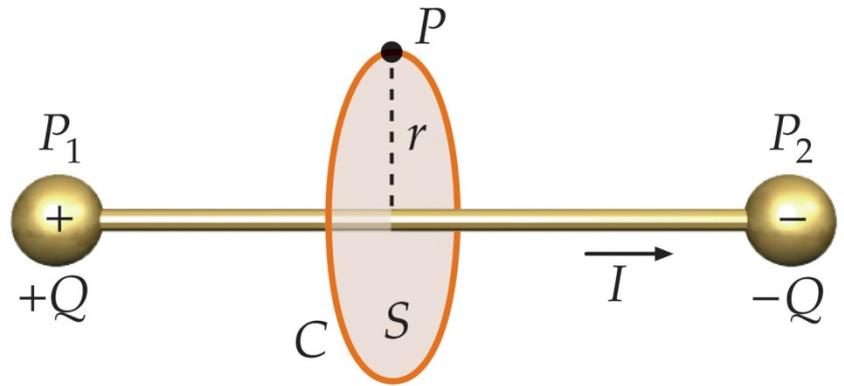
que no concuerda con el resultado obtenido a partir de la ley Biot-Savart, lo cual depende de la longitud del segmento:

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi R} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1)$$

B_x DEBIDO A UN SEGMENTO DE CONDUCTOR RECTILÍNEO



Si el segmento de corriente es una parte de un circuito completo, la ley de Ampère para la curva C es correcta, pero no existe la simetría suficiente para utilizarla con objeto de hallar el campo magnético en el punto P .



Si el segmento de corriente es debido a un flujo momentáneo de carga desde un pequeño conductor situado a la izquierda hasta otro situado a la derecha, hay suficiente simetría para utilizar la ley de Ampère y calcular el campo magnético en P , pero la ley de Ampère no es válida porque la corriente no es continua en el espacio.

En el capítulo 30 veremos como **Maxwell** fue capaz de modificar la ley de Ampère, de modo que fuera válida para todas las corrientes.

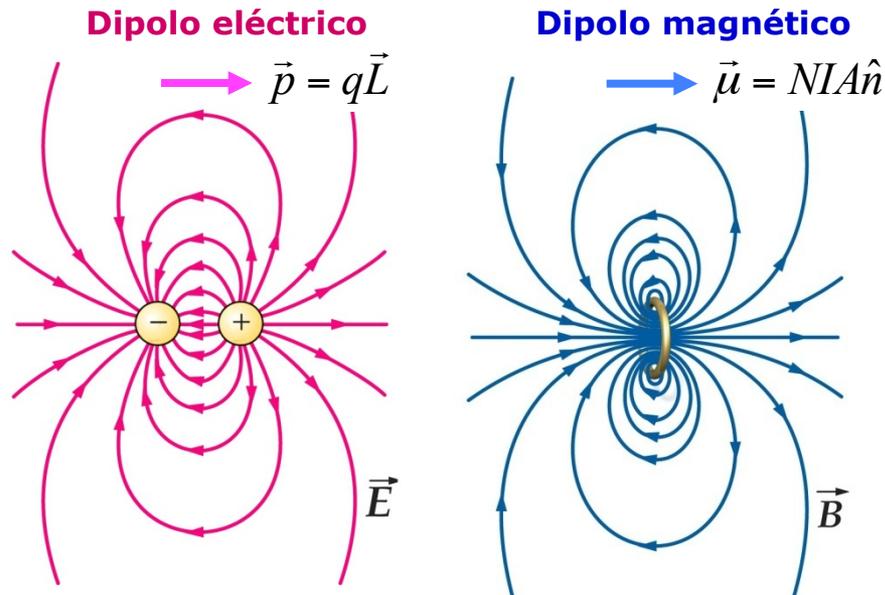
27-5

El magnetismo en la materia

Clasificación de los materiales

Los átomos tienen momentos dipolares magnéticos debido al movimiento de sus electrones y debido al momento dipolar magnético intrínseco asociado al espín de los electrones.

A diferencia de los dipolos eléctricos, la alineación de los dipolos magnéticos a un campo magnético externo tiende a *incrementar* el campo.



Lejos de los dipolos las líneas de campo son idénticas. Sin embargo, **entre las cargas** del dipolo eléctrico, las líneas de campo se oponen al sentido del momento dipolar, mientras que dentro de la espira de corriente, las líneas de campo magnético son paralelas al momento dipolar magnético.

Así, pues, en un material magnéticamente polarizado, los dipolos magnéticos crean un campo magnético paralelo a los vectores del momento-dipolar-magnético.

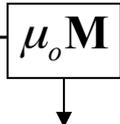
Podemos clasificar los materiales en tres categorías, **paramagnéticos**, **diamagnéticos** y **ferromagnéticos**, de acuerdo con el comportamiento de sus momentos magnéticos en un campo magnético externo.

Imanación y susceptibilidad magnética

Cuando un material se sitúa en un campo magnético intenso, como el de un solenoide, el campo \mathbf{B} de éste tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos (permanentes o inducidos) dentro del material, el cual se imana. La **imanación** \mathbf{M} de un material se define por el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\mathbf{M} = \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dV}$$

Situemos un cilindro de material magnético dentro de un solenoide largo n vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente I . El campo aplicado al solenoide \mathbf{B}_{ap} ($B_{ap} = \mu_0 n I$) imana el material, de modo que éste adquiere una imanación \mathbf{M} . El campo magnético resultante en un punto interior del solenoide es

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{ap} + \boxed{\mu_0 \mathbf{M}}$$


El efecto de la imanación es el mismo que si un cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de modulo M ($B_m = \mu_0 n I = \mu_0 M$).

En los materiales **paramagnéticos** y **ferromagnéticos**, \mathbf{M} posee la misma dirección y sentido que \mathbf{B}_{ap} ; en los materiales **diamagnéticos**, \mathbf{M} se opone a \mathbf{B}_{ap} .

En los materiales **paramagnéticos** y **diamagnéticos** la imanación resulta proporcional al campo magnético aplicado que produce un alineamiento de los dipolos magnéticos del material. Podemos escribir

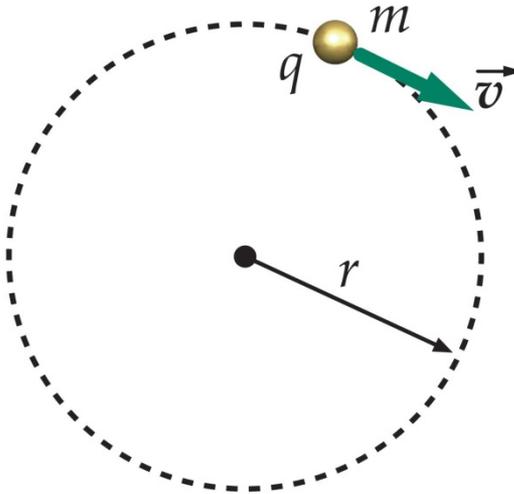
$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{B_{ap}}{\mu_0}$$

en donde χ_m es un número sin dimensiones llamado **susceptibilidad magnética**. Sustituyendo \mathbf{M} en la ecuación de \mathbf{B} se obtiene

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_{ap} (1 + \chi_m) = K_m \mathbf{B}_{ap}$$

en donde $K_m = 1 + \chi_m$ se denomina la **permiabilidad relativa** del material. Para materiales **paramagnéticos** χ_m es un número pequeño positivo que depende de la T. Para los materiales **diamagnéticos** es un número negativo pequeño independiente de la T. La imanación de los materiales ferromagnéticos es much más complicada (K_m no es constante).

Momentos magnéticos atómicos



Si la carga q es positiva, el momento angular y el momento magnético tienen igual sentido:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}$$

RELACIÓN CLÁSICA ENTRE EL MOMENTO MAGNÉTICO Y EL MOMENTO ANGULAR

Como el momento angular está cuantizado (el cuanto del momento angular es $\hbar = h/2\pi$), el momento magnético de un átomo también lo está

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q\hbar}{2m} \frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

Para un electrón, $m = m_e$ y $q = -e$ de modo que

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{L}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\mathbf{L}}{\hbar}$$

MOMENTO MAGNÉTICO DEBIDO AL MOVIMIENTO ORBITAL DE UN ELECTRÓN

en donde $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$ MAGNETÓN DE BOHR

es la unidad cuántica del momento magnético llamada **magnetón de Bohr**.

El momento magnético de un electrón debido a su momento angular de espín intrínseco \mathbf{S} es:

$$\boldsymbol{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{S}}{\hbar} = -2\mu_B \frac{\mathbf{S}}{\hbar}$$

MOMENTO MAGNÉTICO DEBIDO AL ESPÍN ELECTRÓNICO

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$h = 6.67 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \text{ (constante de Planck)}$$

Paramagnetismo

Los materiales **paramagnéticos** poseen momentos magnéticos permanentes que interactúan entre sí sólo muy débilmente, dando lugar a una susceptibilidad magnética χ_m **positiva y muy pequeña**. Ejemplo: **oxígeno líquido**.

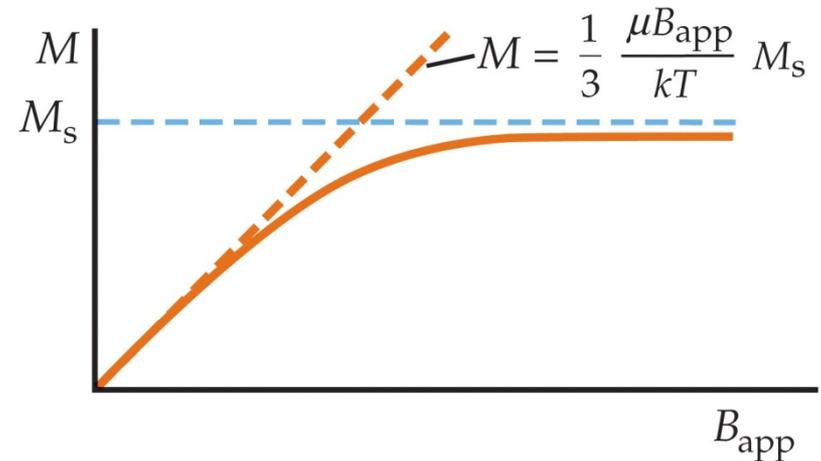
En ausencia de campo magnético externo, estos momentos están orientados al azar.

En un campo externo, algunos de estos dipolos se alinean produciendo pequeña contribución al campo total que se suma al campo externo. El grado de alineamiento es pequeño excepto en campos muy intensos y a muy bajas temperaturas. A temperaturas ordinarias, el movimiento térmico tiende a mantener las direcciones aleatorias de los momentos magnéticos.

En campos débiles, la imanación es aproximadamente proporcional al campo aplicado e inversamente proporcional a la T absoluta:

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ap}}{kT} M_s$$

LEY DE CURIE



En campos muy intensos, la imanación se aproxima al valor de saturación M_s . Este valor se alcanza sólo a muy bajas temperaturas. En campos débiles, la imanación es aproximadamente proporcional a B_{ap} , resultado conocido como **ley de Curie**.

Obsérvese que $\mu B_{ap}/(kT)$ es el cociente entre la energía potencial máxima ($\theta=0$) de un dipolo magnético situado en el campo magnético externo y la energía térmica característica.

$$U = -\mu B \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad 41$$

Ferromagnetismo

Los materiales **ferromagnéticos** poseen pequeñas regiones de espacio llamadas **dominios magnéticos**, dentro de los cuales los momentos magnéticos atómicos permanentes están alineados. Estos materiales tienen **valores positivos muy grandes** de susceptibilidad magnética χ_m .

En ausencia de campo externo, la dirección de alineamiento en un dominio es independiente de la que existe en otros, de modo que no se produce un campo magnético neto.

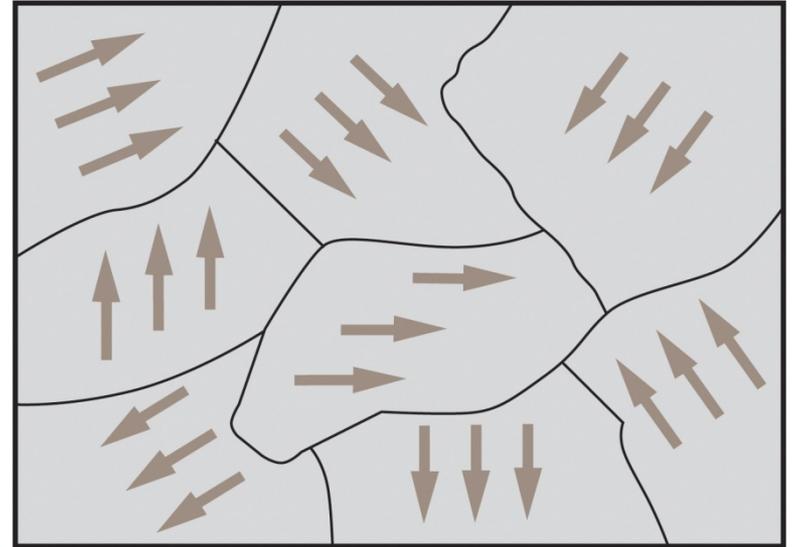
Al imanarse, los dominios de un material ferromagnético se alinean produciendo una contribución muy intensa al campo magnético. Esta alineación puede persistir incluso cuando se retira el campo externo, dando lugar a un magnetismo permanente.

El ferromagnetismo se presenta en el **hierro puro**, **cobalto** y **níquel** y en aleaciones de estos metales entre sí.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} + \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{ap} + \boxed{\mu_0 \mathbf{M}}$$

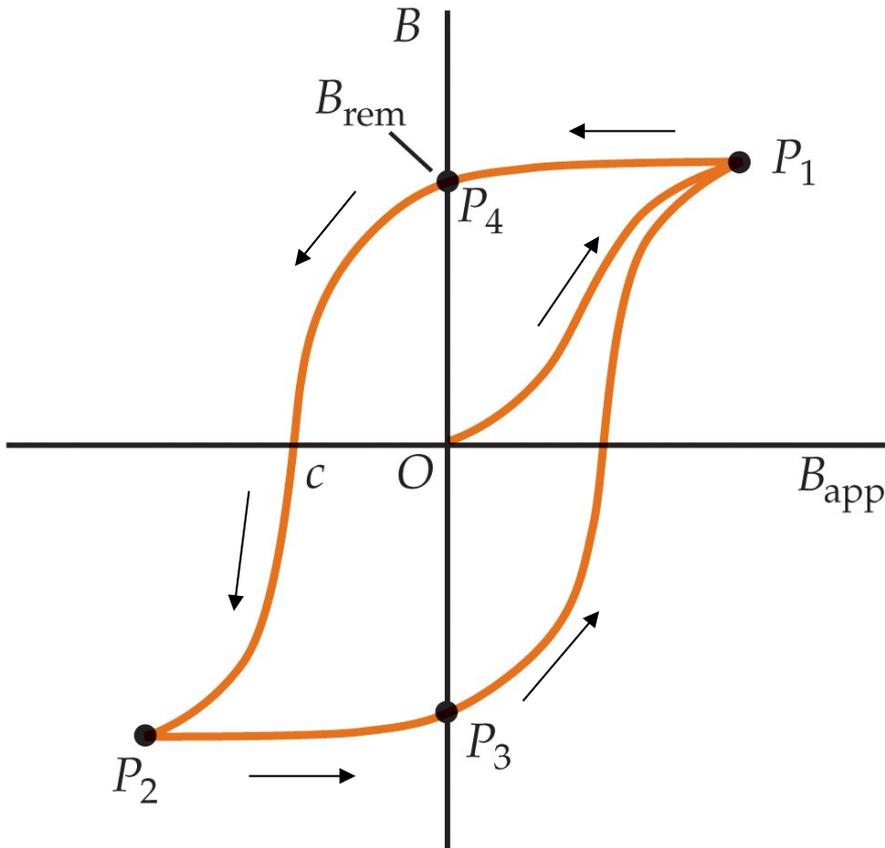
↓

En los materiales ferromagnéticos, el campo magnético $\mu_0 M$ debido a los momentos magnéticos es con frecuencia superior al campo magnético aplicado \mathbf{B}_{ap} en un factor de varios miles.



Dentro del dominio, todos los momentos magnéticos están alineados, pero la dirección varía de un dominio a otro de modo que el momento magnético neto de un trozo macroscópico de material es cero en su estado normal. A $T > T_{curie}$ la agitación térmica es suficiente para destruir esta alineación y los materiales ferromagnéticos se transforman en paramagnéticos.

Curva de histéresis



Representación gráfica de B en función del campo aplicado B_{ap} . El campo B_{rem} es el campo *remanente*, el cual permanece cuando el campo aplicado retorna a cero.

En los materiales ferromagnéticos, la imanación depende no sólo de la corriente que imana, sino también de la historia pasada del material.

Segmento **O-P₁**: cuando la corriente se hace crecer gradualmente desde cero, B_{ap} aumenta desde cero y la curva sigue la ley de Curie. La imanación M se está aproximando a su valor de saturación M_s , que se presenta cuando todos los dipolos atómicos están alineados.

Segmento **P₁-P₄**: cuando B_{ap} se hace disminuir hasta cero, parte de la imanación permanece. El desplazamiento de los dominios en el material no es completamente reversible. Este efecto se denomina **histéresis**, del griego *hysteron* (retraso), y la curva de la figura se llama **curva de histéresis**. El valor de B en el punto P_4 se denomina **campo remanente** B_{rem} . En este punto la barra de hierro es un imán permanente.

Segmento **P₄-C**: si la corriente del solenoide se invierte ahora de modo que B_{ap} tiene sentido opuesto, el campo magnético es gradualmente llevado a cero en el punto **C**.

La parte restante de la curva de histéresis se obtiene mediante un aumento adicional de la corriente en sentido opuesto hasta que se alcanza el punto **P₂**, que corresponde a la saturación en sentido opuesto, y luego haciendo disminuir la corriente hasta cero en el punto **P₃** y aumentando la corriente de nuevo en el sentido inicial.

Diamagnetismo

Los materiales **diamagnéticos** son aquellos en los cuales los momentos magnéticos de todos los electrones de cada átomo se compensan, de modo que cada átomo posee un momento magnético cero en ausencia de un campo externo. En estos materiales la susceptibilidad magnética χ_m tiene un **valor negativo y muy pequeño**.

Al aplicar un campo externo, se induce un pequeño momento magnético que tiende a debilitar el campo. Este efecto es independiente de la temperatura.

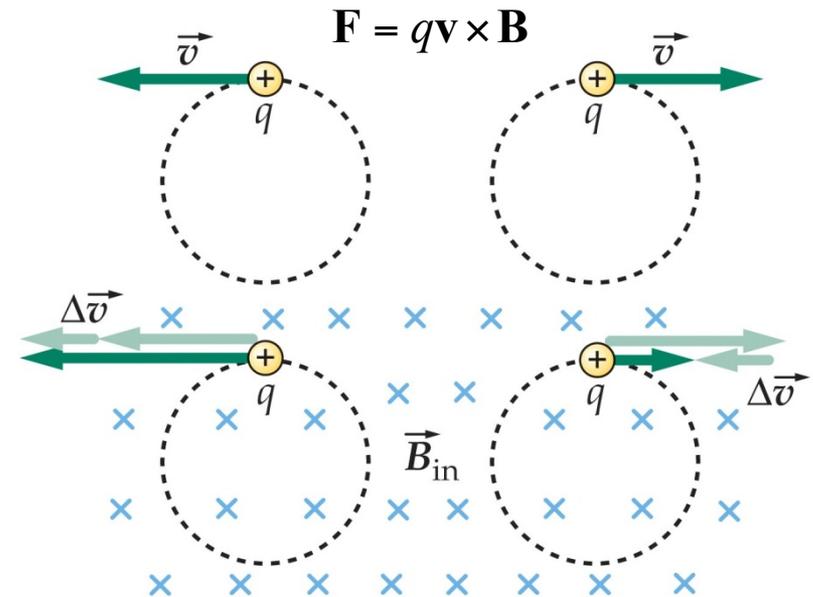
Los **superconductores** son materiales diamagnéticos perfectos con susceptibilidad igual a -1.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ap} (1 + \chi_m) = 0$$

$$\chi_m = -1$$

Todos los materiales son diamagnéticos a temperaturas suficientemente altas.

Michael Faraday en 1845 descubrió que un trozo de **bismuto** era repelido por un polo cualquiera de un imán lo que indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto al campo.



Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentido opuestos, su suma es nula, quedando sólo los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos a la dirección del campo magnético aplicado.