TURBORREACTOR PLANO VERTICAL:

* Sin viento. Ascenso rectilíneo estacionario. Ángulo ε → 1
* Viento horizontal CTE. Ascenso rectilíneo estacionario. Descenso rectilíneo estacionario → 2
* Viento horizontal CTE. Ascenso rectilíneo estacionario. $\gamma \ll 1$. Vuelo horizontal rectilíneo no estacionario. Uso de δe. Flaps recogidos/desplegados → 3
* Viento horizontal CTE. Vuelo horizontal rectilíneo no estacionario. Ascenso rectilíneo estacionario. → 4
* Viento $f(z)$. Ascenso rectilíneo no estacionario. Ejes $\vec{x}$-$\vec{z}$. Uso de δe → 5
Ejes $\vec{t}, \vec{n}$ → 6
* Viento horizontal CTE Ascenso rectilíneo estacionario. $\gamma \ll 1$. Ángulos peq. $\hat{V} = 1$. Ecs. adimensionales $\frac{dW}{dt} = CT$ = Ec. Motor → 7
* Viento horizontal CTE Ascenso vertical estacionario. Descenso en picado estacionario. Vuelo horizontal rectilíneo estacionario. Vuelo invertido estacionario → 8
* Sin viento. Vuelo horizontal rectilíneo estacionario. Ley de ρ. Alcance específico $\frac{dx}{dW}$ → 9
* Viraje simétrico en ascensión. Hélice. Ecs. ejes intrínsecos. R_{MAX}. μ_{MAX}. θ → 10 $\boxed{7.2}$
* Vuelo circunferencial. Ángulo $\varepsilon = \alpha$. q. T. δe → 11
* Vuelo circunferencial. R_{MIN}. α. T. δe → 12
* Viento horizontal $f(t)$ Vuelo circunferencial. Ángulo $\varepsilon = \alpha$. $\frac{dv}{dt} \neq 0$ → 13
* Sin viento. Ascenso rectilíneo. Ve. SEPT. 2011 → 14

C-112

2/08

PROBLEMA 6 (libro)

Planeador

La figura representa un planeador, con polar parabólica y cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se consideran conocidas, unido al suelo por su centro de gravedad mediante el cable AB, de longitud r, sin peso y de resistencia aerodinámica despreciable. El centro de gravedad del planeador describe una trayectoria situada en un plano vertical con un viento de cara uniforme de velocidad V_w.

Suponiendo que el movimiento tiene lugar a C_L constante y conocido, se pide:

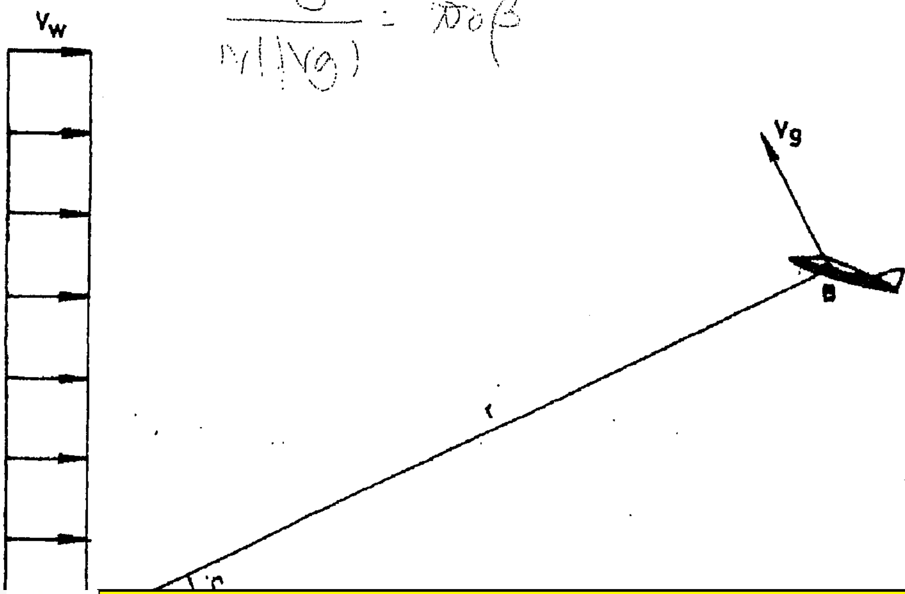
1°)Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del avión en el sistema de ejes intrínsecos y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2°)Determinar el ángulo polar, δ, de equilibrio.

3°)Determinar el valor de C_L que maximiza el ángulo δ de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} \to 0$$

$$\frac{\bar{r}\cdot\bar{V_g}}{r|V_g|} = \cos\beta$$



C-101

Subida simétrica rectilínea y estac.

PROBLEMA 5

Se considera un avión de peso W y de superficie alar S, conocidos, provisto de motores con empuje orientable que está realizando una subida simétrica rectilínea estacionaria.

Suponiendo que todos los ángulos que intervienen en el problema no son pequeños, se pide:

1°) Plantear las ecuaciones del sistema y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2°) Determinar el ángulo de asiento de velocidad, γ, en función de E, T/W y ε (ángulo de ataque del empuje).

3°) Determinar el ángulo de ataque del empuje que maximiza el ángulo de asiento de velocidad. Interpretar geométricamente la solución obtenida.

PROBLEMA 5 CLASE

Avión de peso W y sup. alar S conocidos.

Motor con empuje orientable y realiza SUBIDA SIMÉTRICA RECTILÍNEA ESTACIONARIA

1º PLANTEAR ECS. del SISTEMA y determ. Nº de GRADOS de LIBERTAD

VSPV

Vuelo simétrico en plano vertical

PV: $\dot{y}_e = 0 \rightarrow y_e = cte \rightarrow \dot{y}_e = 0 = V\cos\gamma \operatorname{sen}\chi \begin{cases} \gamma \neq 0 \\ \boxed{\chi = 0} \end{cases}$

SIMÉTRICO: $\boxed{\nu = \beta = 0} \longrightarrow \underline{Q = 0}$

$Q = 0 + \chi = 0$

EC. DINÁMICA en y_w: $mg\operatorname{sen}\mu\cos\gamma + mV(-\dot{\gamma}\operatorname{sen}\mu) = 0 \Rightarrow (g\cos\gamma - V\dot{\gamma})\, m\operatorname{sen}\mu = 0$

$\boxed{\mu = 0}$ ALAS A NIVEL

$g\cos\gamma - V\dot{\gamma} = 0$

Rectilíneo $\longrightarrow \dot{\gamma} = 0 \longrightarrow g\cos\gamma \neq 0 \rightarrow \mu = 0$

Estacionario $\longrightarrow \dot{V} = 0$

VSPV + ESTAC + RECT.

Ecs. cinemáticas: $\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V\operatorname{sen}\gamma \end{cases}$

Ecs. dinámicas: $\begin{cases} T\cos\varepsilon - D - m(g\operatorname{sen}\gamma + \cancel{\dot{V}}) = 0 \\ -T\operatorname{sen}\varepsilon - L + m(g\cos\gamma + \cancel{V\dot{\gamma}}) = 0 \end{cases}$ ESTAC, RECTILÍNEO

Másica: $\dot{m} + \varphi = 0$

$$\begin{cases} T = T(\Pi, \varepsilon \ldots) \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \\ C_D = C_{D_0} + K C_L^2 \\ C_L = C_L(\alpha) \\ L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \end{cases}$$

- INCÓGNITAS: $x_e, h, V, \gamma, T, D, m, \varepsilon, L, C_D, C_L, \Pi, \alpha = 13$
- ECS $= 10$

3 grados de libertad

O se puede hacer esto $\begin{cases} D = D(h, V, \alpha) \\ L = L(h, V, \alpha) \\ T = T(h, V, \Pi) \\ \varphi = \varphi(h, V, \Pi) \end{cases}$

Incógnitas $x_e, h, V, \gamma, \alpha, m, \Pi, \varepsilon \rightarrow 8$

Quitamos D, L, T y no aparece C_L nico

Y ahora solo tenemos las 5 ecs

$\boxed{8 - 5 = 3 \text{ gdl}}$

2 DETERMINAR γ como $f(E, T/W, \varepsilon)$ — $mg = W$

$$E = \frac{L}{D} = \frac{mg\cos\gamma - T\operatorname{sen}\varepsilon}{T\cos\varepsilon - mg\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\cos\gamma - \frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\gamma}$$

Ya tenemos en una ecuación todas las variables → hay que despejar γ

$\hookrightarrow \underline{E\operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma = E \cdot \frac{T}{W}\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon \frac{T}{W}}$

$\hookrightarrow K = \frac{1}{E}\operatorname{sen}\varepsilon \frac{T}{W} + \frac{T}{W}\cos\varepsilon$

Usamos el truco: $\operatorname{sen}\gamma = \frac{tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}$

$K \cdot E\sqrt{1+tg^2\alpha} = E\,tg\alpha + 1$;

$K^2E^2(1+tg^2\alpha) = E^2tg^2\alpha + 1 + 2E\,tg\alpha$

$E^2(1-K^2)tg^2\alpha + 2E\,tg\alpha + (1 - K^2E^2) = 0$

$$tg\alpha = \frac{-2E \pm \sqrt{4E^2 - 4E^2(1-K^2)(1-K^2E^2)}}{2E^2(1-K^2)}$$

Así $$\boxed{tg\gamma = \frac{-1 \pm K\sqrt{1+E^2-E^2K^2}}{E(1-K^2)}}$$

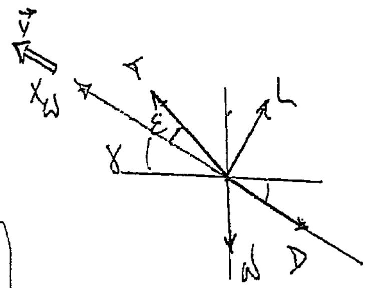
$\hookrightarrow \frac{1}{E}\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon = 0 \rightarrow tg\,\varepsilon_{opt} = \frac{1}{E} = \frac{1}{L/D} = \frac{D}{L}$

$\boxed{\varepsilon_{opt} = arctg\, D/L}$

PROBLEMA 5

W, S

Subida simétrica rectilínea estacionaria



$\left\{ \begin{array}{l} y_e = cte. = y_0 \\ \nu = \beta = 0 \end{array} \right.$

1. Ecs. del sistema, nº gdl

4.7.3
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V \operatorname{sen}\gamma \\ T\cos\varepsilon - D - m(g \operatorname{sen}\gamma + \cancel{\dot{V}}) = 0 \qquad \dot V = 0 \text{ (Estac.)} \\ -T\operatorname{sen}\varepsilon - L + m(g\cos\gamma + V\cancel{\dot\gamma}) = 0 \qquad \dot\gamma = 0 \text{ (Estac., rectilíneo)} \\ \dot{m} + \varphi = 0 \end{array} \right.$$

⇐ Ec. nes en ejes viento

Siempre se ponen !!

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \; ; & C_L = C_L(\alpha, \cancel{M}) \text{ (Damos por sentado que } \mu = 0) \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \; ; & C_D = C_{D0} + k C_L^2 \text{ (polar parabólica de coef. ctes)} \\ T = T(\pi, h, V) \; ; & \varphi = \varphi(\pi, h, V) \end{array} \right.}$$

11 ecs

$x_e, h, V, \gamma, T, \varepsilon, D, L, m, \varphi, C_L, C_D, \alpha, \pi \Rightarrow$ 14 incogs $\Big\} \Rightarrow 3$ gdl $(\alpha, \pi, \varepsilon)$

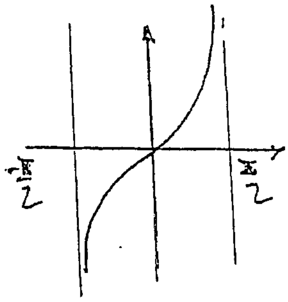
2. $\gamma = f\left(E, \frac{T}{W}, \varepsilon\right)$

$$\boxed{E = \frac{L}{D}} = \frac{-T\operatorname{sen}\varepsilon + W\cos\gamma}{T\cos\varepsilon - W\operatorname{sen}\gamma} = \frac{-\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\gamma}{\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\gamma}$$

$$E\frac{T}{W}\cos\varepsilon - E\operatorname{sen}\gamma = -\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\gamma$$

$$\underline{\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + E\frac{T}{W}\cos\varepsilon} = \cos\gamma + E\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} + E\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{1+E\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}$$

$\boxed{3}$ ε para γ_{max}

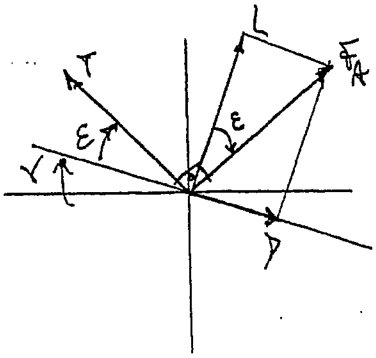


$$\gamma_{max} \Rightarrow tg\,\gamma_{max}$$

$$\frac{d(tg\,\gamma)}{d\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\varepsilon}(1-k^2)^{-2} \cdot (-1)(-2k) \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{\left(\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}\,(-2k) + k\frac{-2k}{2\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}}\right)\varepsilon(1-k^2) - k\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}\cdot(\varepsilon\, 2k)}{\varepsilon^2(1-k^2)^2} \right] \frac{dk}{d\varepsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow \cos\varepsilon - \varepsilon\,\text{sen}\,\varepsilon = 0 \Rightarrow tg\,\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{D}{L} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \text{arctg}\,\frac{D}{L}}$$



$F_A \perp T$ (interpretación geométrica)

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 24.06.08
E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

Un avión describe la trayectoria esquematizada en la figura adjunta, descompuesta en dos tramos AB y BC, en presencia de un viento horizontal de módulo V_w constante y conocido. Tanto en el tramo AB como en el BC el avión vuela rectilínea, simétricamente, con las alas a nivel y con velocidad respecto de tierra V_g constante y conocida ($V_g > V_w$).

Suponiendo además que:

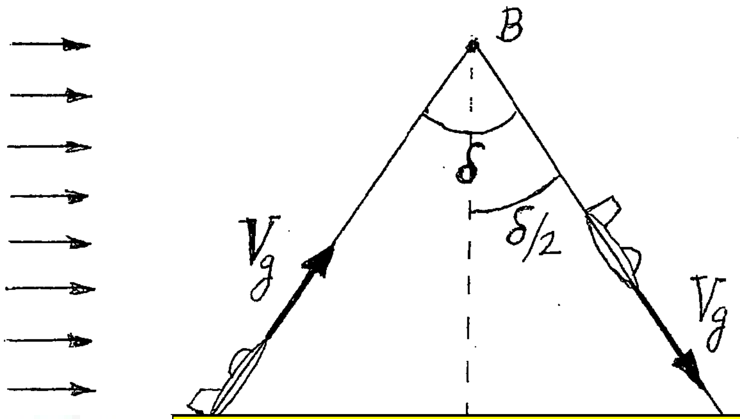
a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, etc.).
b) El empuje de los motores está dirigido según el eje x_w.
c) ρ es una constante conocida en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Para el tramo AB, determinar el empuje del avión, T, y su coeficiente de sustentación, C_L, en función del ángulo δ ($0 \leq \delta \leq \pi$), de los demás datos del problema y, en su caso, del resto de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Para el tramo AB, determinar los valores del ángulo δ para los que el coeficiente de sustentación del avión es máximo, mínimo y nulo, así como los valores correspondientes de $C_{L\max}$ y $C_{L\min}$.

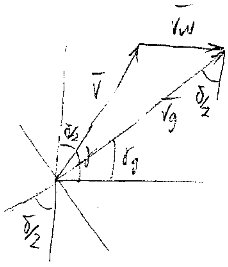
3º) Para el tramo BC, repetir los apartados 1º) y 2º).



②

1) $T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$

$-L + W\cos\gamma = 0$



$\vec{V_g} = \vec{V_W} + \vec{V_W}$

$$\begin{cases} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma = V_g\cos\frac{\delta}{2} \\ V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma + V_W = V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = V_g\cos\gamma_g \rightarrow \cos\gamma = \dfrac{V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W}{V} \\ V_g\cos\frac{\delta}{2} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{V_g\cos\frac{\delta}{2}}{V} \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W\cos\gamma}{\rho S V^2} \quad (I)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$V^2 = V_g^2\operatorname{sen}^2\gamma_g + V_g^2\cos^2\gamma_g - 2V_gV_W\cos\gamma_g + V_W^2 = V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2$$

$$\boxed{C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^{3/2}}}$$

$$\boxed{T = \frac{WV_g\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2}} + \frac{1}{2}\rho S\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)\left[C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho^2S^2}\cdot\frac{\left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)^2}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3}\right]}$$

2) $$\frac{dC_L}{d\delta} = 0 = \frac{V_g\cos\frac{\delta}{2}\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^{3/2} - \left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)\left(-2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3} = 0$$

$$\left[V_g^3\cos\frac{\delta}{2} - 2V_g^2V_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2} + V_W^2V_g\cos\frac{\delta}{2}\right]^{3/2} = 2V_g^2V_W\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} - 2V_gV_W^2\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}$$

$$\delta = 0 \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{-V_W}{\left(V_g^2 + V_W^2\right)^{3/2}} = C_{L\,MIN}$$

$$\delta = \pi \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g - V_W}{\left(V_g^2 + V_W^2\right)^{3/2}} = C_{L\,MAX}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho S\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)\left[C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho^2S^2}\cdot\frac{\left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)^2}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3}\right] - \frac{WV_g\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2}}$$

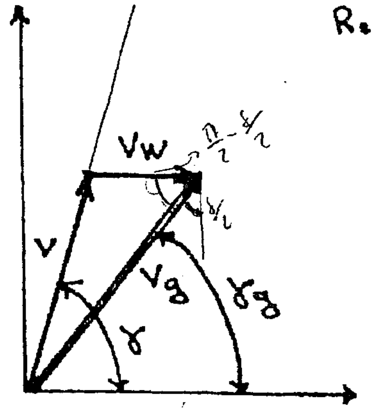
Examen Final Junio, "Mecànica del Vuelo I", 24/06/2008

PROBLEMA 1°

1/2

SOLUCIÓN:

1°) Tramo AB



Relaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot h = V_g \cdot \operatorname{sen}\gamma_g = V_g \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = V \operatorname{sen}\gamma \\ \dot x = V_g \cdot \cos\gamma_g = V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = V\cos\gamma + V_W \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{V_W}{V_g}} \quad ;; \quad \cos\gamma = \frac{V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_W}{V}$$

$$V^2 = V_g^2 + V_W^2 - 2V_gV_W \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$\cos\left(\frac{\Omega}{2}-\frac{\delta}{2}\right)$

Relaciones dinámicas:

$$\begin{cases} T - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \\ L - W\cos\gamma = 0 \end{cases} \quad ;; \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{V_g}{V}\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + K C_L^2\right) \quad ;; \quad C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{\cos\gamma}{V^2}$$

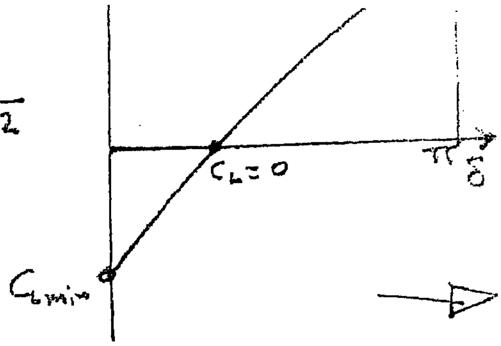
$$C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_W}{V^3} = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_W}{\left(V_g^2 + V_W^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{3/2}}$$

$$T = \rho\frac{S C_{D_0}}{2}\left(V_g^2 + V_W^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{2KW^2}{\rho S}\cdot\frac{\left(V_g\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_W\right)^2}{\left(V_g^2 + V_W^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^3} + \underbrace{\frac{W\cdot V_g\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{V_g^2 + V_W^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}}}_{W\operatorname{sen}\gamma}$$

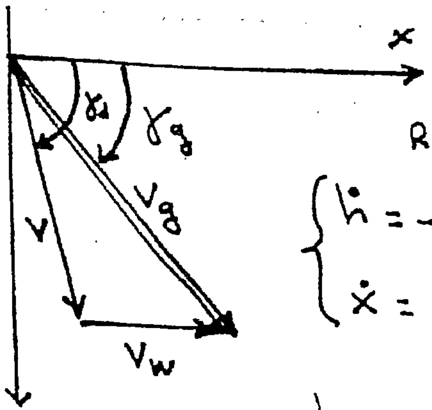
2°) C_L: función monótona creciente con δ

- $\delta = 0 \rightarrow C_{L_{min}} = -\frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_W}{(V_g^2 + V_W^2)^{3/2}} \quad ;; \quad C_{L_{min}} < 0$

$$\cdot\ \delta = \pi \quad \longrightarrow \quad C_{L_{max}} = \frac{2W}{\rho S} \cdot \frac{1}{(V_g - V_w)^2}$$



3°)



Tramo BC

Relaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{h} = -V_g \cdot \operatorname{sen}\gamma_g = -V_g \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = -V \operatorname{sen}\gamma_d \\ \dot{x} = V_g \cdot \cos\gamma_g = V_g \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = V\cos\gamma_d + V_w \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_d = \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{sen}(\delta/2) - \frac{V_w}{V_g}} \quad ;; \quad \cos\gamma_d = \frac{V_g \operatorname{sen}(\delta/2) - V_w}{V}$$

$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Relaciones dinámicas:

$$\begin{cases} T - D + W\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \\ L - W\cos\gamma_d = 0 \end{cases}$$

$$C_L = \frac{2W}{S} \cdot \frac{V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{3/2}}$$

$$T = \rho \frac{S C_{D0}}{2}\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{2kW^2}{\rho S} \cdot \frac{\left(V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w\right)^2}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2} - \frac{W \cdot \cos(\delta/2)}{\sqrt{V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}}$$

$\underline{\underline{C_L}}$ IGUAL QUE EN EL APARTADO 2°

$T = \dots$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO — 11.06.07

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

Un avión despega en presencia de un viento de cara horizontal de módulo V_w constante y conocido. Cuando el avión está en el aire, efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel descompuesto en los siguientes tramos (ver figura):

- Tramo 1-2: Subida rectilínea estacionaria, con los flaps deflectados y con velocidad aerodinámica V_2 constante y conocida.
- Tramo 2-3: Vuelo horizontal rectilíneo, con los flaps recogidos, desde la velocidad aerodinámica V_2 hasta la velocidad aerodinámica V_3 constante y conocida.
- Tramo 3-4: Subida rectilínea estacionaria, con los flaps recogidos y con velocidad aerodinámica V_3 constante y conocida.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, las características aerodinámicas se conocen en unos ejes cuerpo genéricos, tanto para el avión con flaps deflectados como con flaps recogidos, la polar es parabólica de coeficientes constantes, la contribución de la deflexión del timón de profundidad al coeficiente de sustentación del avión completo es despreciable, etc.).

b) El empuje de los motores T es constante y conocido, pasa por el centro de gravedad del avión y está dirigido según el eje x_w.

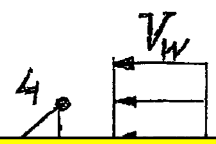
c) Los ángulos de inclinación de la trayectoria en los tramos 1-2 y 3-4 son pequeños; las alturas h_1, h_2 y h_4 son conocidas.

d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

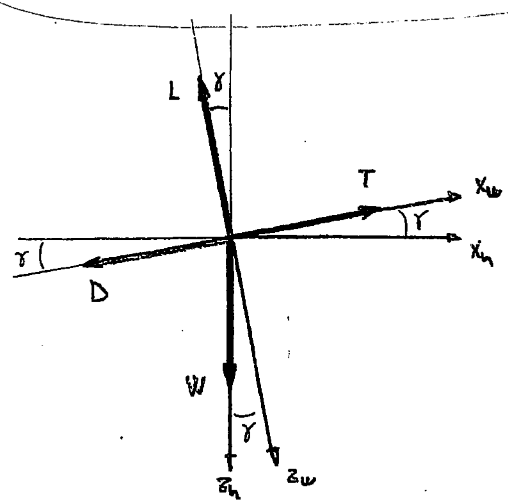
1º) Determinar la distancia horizontal total recorrida, d, respecto del suelo y el tiempo total empleado, t, en volar estos tres tramos.

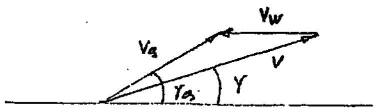
2º) Determinar la deflexión del timón de profundidad, δ_e, en función del tiempo, para los tres tramos.



Tramo 1-2 → Subida rectilínea estacionaria con flaps desplegados

Flaps desplegados $\begin{cases} C_L = C_{L01} + C_{L\alpha 1}\,\alpha \\ C_D = C_{D01} + k_1 C_L^2 \end{cases}$





$$\left.\begin{aligned} V_g \,\text{sen}\,\gamma_g &= V \,\text{sen}\,\gamma \\ V_g \cos\gamma_g &= V\cos\gamma - V_w \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{pequeños}]{\text{ángulos}} \boxed{\gamma_g = \frac{V\gamma}{V - V_w}}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= W\cos\gamma \\ T &= D + W\,\text{sen}\,\gamma \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{pequeños}]{\text{ángulos}} \begin{aligned} L &= W \\ T &= D + W\gamma \end{aligned}$$

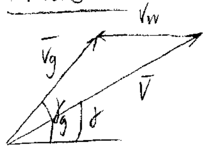
$$\gamma = \frac{T - \overbrace{\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D01} + k_1 C_L^2\right)}^{D}}{W}$$

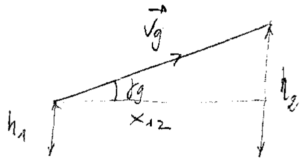
$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \Rightarrow \gamma = \frac{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D01} + \frac{4W^2 k_1}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}$$

$$\text{tg}\,\gamma_g \simeq \boxed{\gamma_g = \frac{h_{1-2}}{d_{1-2}}} = \frac{V\gamma}{V - V_w} \quad ; \quad V = V_2$$

③

1) Tramo 1-2





$$tg\,\gamma_g = \frac{h_2-h_1}{x_{12}} \; ; \; \gamma_g = \frac{h_2-h_1}{x_{12}}$$

$$x_{12} = \frac{h_2-h_1}{\gamma_g}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma \\ V_g \cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma \end{array}\right| \longrightarrow tg\,\gamma_g = \frac{V \operatorname{sen}\gamma}{V\cos\gamma - V_W} \; ; \; \gamma_g = \frac{V\cdot\gamma}{V - V_W}$$

$$T - D - W\gamma = 0 \longrightarrow \gamma = \frac{T}{W} - \frac{\rho V^2 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$-L + W = 0$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0_d} + kC_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_d} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\boxed{x_{12} = \frac{(h_2-h_1)\cdot(V_2-V_W)}{\frac{TV_2}{W} - \frac{\rho V_2^3 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

$$\dot{x}_e = V_g\cos\gamma_g \; ; \; \int_0^{x_{12}} dx_e = V_g \cos\gamma_g \int_0^{t_{12}} dt \; ; \; x_{12} = (V_2 \cancel{\cos\gamma}^{1} - V_W)\,t_{12} \rightarrow t_{12} = \frac{x_{12}}{(V_2 - V_W)}$$

$$\boxed{t_{12} = \frac{(h_2-h_1)}{\frac{TV_2}{W} - \frac{\rho V_2^3 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

Tramo 2-3:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \longrightarrow T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dx_e}\underbrace{\frac{dx_e}{dt}}_{V} \; ; \; T - D = \frac{W}{g}V\cdot\frac{dV}{dx_e}$$

$$L = W \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V$$

Análogamente al tramo 1-2:

$$\boxed{X_{34} = \frac{(h_4-h_2)(V_3-V_w)}{\frac{TV_3}{W} - \frac{\rho V_3^3 S}{W}\left(C_{D_{0r}} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{34} = \frac{(h_4-h_2)}{\frac{TV_3}{W} - \frac{\rho V_3^3 S}{W}\left(C_{D_{0r}} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= X_{12} + X_{23} + X_{34} \\ t &= t_{12} + t_{23} + t_{34} \end{aligned}}$$

2) Tramo 1-2:

$$C_L = C_{L_{0d}} + C_{L\alpha_d}\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightarrow \alpha = \frac{-C_{L0d}}{C_{L\alpha d}} + \frac{2W}{\rho C_{L\alpha d} S V^2} = \alpha_{0d} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha d} V^2}$$

$$C_{MA} = 0 = C_{m0d} + C_{m\alpha d}\alpha + C_{m\delta e_d}\delta e \rightarrow \boxed{\delta e_{12} = \frac{-1}{C_{m\delta e d}}\left[C_{m0d} + C_{m\alpha d}\left(\alpha_{0d} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha d} V_2^2}\right)\right]}$$

Tramo 2-3:

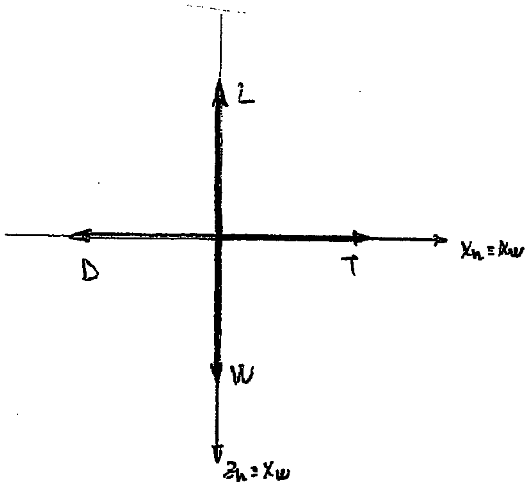
$$C_L = C_{L0_r} + C_{L\alpha_r}\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightarrow \alpha = \frac{-C_{L0r}}{C_{L\alpha r}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha r} V^2} = \alpha_{0r} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha r} V^2}$$

$$C_{MA} = 0 = C_{m0r} + C_{m\alpha_r}\alpha + C_{m\delta e_r}\delta e \rightarrow \boxed{\delta e_{23} = \frac{-1}{C_{m\delta e_r}}\left[C_{m0r} + C_{m\alpha_r}\left(\alpha_{0r} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_r} V^2}\right)\right]}$$

Tramo 3-4:

Tramo 2-3 → Vuelo horizontal rectilíneo, con flaps recogidos

Flaps recogidos
$$\begin{cases} C_L = C_{L02} + C_{L\alpha 2}\,\alpha \\ C_D = C_{D02} + K_2 C_L^2 \end{cases}$$



$$\vec{V_g} = (V - V_w)\,\vec{i_h}$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

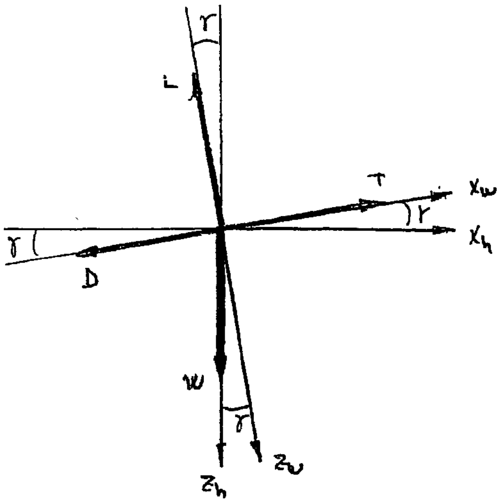
$$T - D = \frac{W}{g}\,\frac{d(V - V_w)}{dt} = \frac{W}{g}\,\frac{dV}{dt}$$

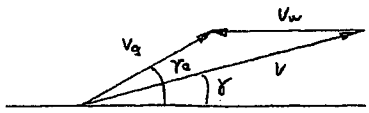
$$T - \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4} \right) = \frac{W}{g}\, V \,\frac{dV}{dx}$$

$$d_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} \frac{\frac{W}{g}\, V\, dV}{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4} \right)}$$

$$t_{2-3} = \int^{V_3} \frac{\frac{W}{g}\, dV}{\dots}$$

Tramo 3-4 → Subida rectilínea estacionaria con flaps recogidos





$$\gamma_g = \frac{V\gamma}{V - V_w} \quad ; \quad \gamma = \frac{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_2} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}$$

$$V = V_3 \Rightarrow \gamma_g = \frac{V_3}{V_3 - V_w}\,\frac{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D0_2} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}{W}$$

$$\boxed{d_{3-4} = \frac{h_{3-4}(V_3 - V_w)}{V_3}\,\frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D0_2} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{3-4} = \frac{h_{3-4}}{V_3}\,\frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D0_2} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= d_{1-2} + d_{2-3} + d_{3-4} \\ t &= t_{1-2} + t_{2-3} + t_{3-4} \end{aligned}}$$

Tramo 1-2 $\rightarrow$ $0 < t < t_{1-2}$

$$C_{Lo1} + C_{L\alpha 1}\,\alpha_{12} = \frac{2W}{\rho V_2^2 S} \Rightarrow \alpha_{12} = \frac{2W}{\rho V_2^2 S\, C_{L\alpha 1}} - \frac{C_{Lo1}}{C_{L\alpha 1}}$$

$$\boxed{C_{mcg} = 0 = C_{mo1} + C_{m\alpha 1}\,\alpha_{12} + C_{m\delta e1}\,\delta_{e1-2}}$$

$$\delta_{e1-2} = -\frac{C_{mo1}}{C_{m\delta e1}} - \frac{C_{m\alpha 1}}{C_{m\delta e1}}\left(\frac{2W}{\rho V_2^2 S\, C_{L\alpha 1}} - \frac{C_{Lo1}}{C_{L\alpha 1}}\right) \leftarrow \text{Constante en este tramo}$$

Tramo 2-3 $\rightarrow$ $t_{1-2} < t < t_{2-3}$

$$\alpha_{2-3} = \frac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{Lo2}}{C_{L\alpha 2}} \leftarrow V = V(t) \Rightarrow \alpha_{2-3} = \alpha_{2-3}(t)$$

$$\delta_{e2-3} = -\frac{C_{mo2}}{C_{m\delta e2}} - \frac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\frac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{Lo2}}{C_{L\alpha 2}}\right) \leftarrow \delta_{e2-3} = \delta_{e2-3}(t)$$

Tramo 3-4 $\rightarrow$ $t_{2-3} < t < t_{3-4}$

$$\alpha_{3-4} = \frac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{Lo2}}{C_{L\alpha 2}}$$

$$\delta_{e3-4} = -\frac{C_{mo2}}{C_{m\delta e2}} - \frac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\frac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{Lo2}}{C_{L\alpha 2}}\right) \leftarrow \text{Constante en este tramo}$$

$$- \frac{C_{mo2}}{C_{m\delta e2}} - \frac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\frac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{Lo2}}{C_{L\alpha 2}}\right) ; \quad t_{2-3} < t < t_{3-4}$$

Flaps desplegados → $C_{m_{cg}} = C_{m_{01}} + C_{m_{\alpha 1}} \alpha + C_{m_{\delta e 1}} \delta_{e1}$

Flaps recogidos → $C_{m_{cg}} = C_{m_{02}} + C_{m_{\alpha 2}} \alpha + C_{m_{\delta e 2}} \delta_e$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1^er E. Parcial - A+B+CD   23.11.92

PROBLEMA 1º

Un avión de peso W y superficie alar S, cuya polar es de la forma $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ está provisto de un turborreactor que proporciona un empuje T constante e independiente de la velocidad.

Este avión efectúa la maniobra que se describe a continuación en presencia de un viento de cara de magnitud V_W (medida respecto a tierra) constante e independiente de la altura. Inicialmente el avión se acelera horizontalmente desde una velocidad aerodinámica V_A hasta una velocidad aerodinámica V_B, efectuando a continuación una subida a velocidad constante hasta situarse a una altura ΔH por encima de la inicial.

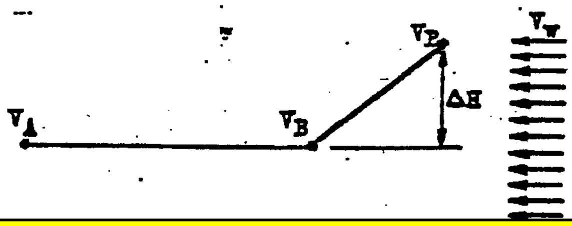
Suponiendo además que es despreciable la transición entre el tramo horizontal y el tramo de subida y que asimismo es despreciable el ángulo de ataque del empuje, se pide:

1º) Plantear las relaciones dinámicas en ejes viento y las relaciones cinemáticas para los dos tramos, suponiendo que en la subida se verifica $(T-D)/W \ll 1$.

2º) Plantear expresiones que permitan calcular la distancia recorrida por el avión (con respecto al suelo) desde el instante inicial en que vuela a V_A hasta que consigue incrementar su altitud en ΔH.

3º) Plantear expresiones que permitan calcular el tiempo invertido en realizar la maniobra.

4º) Determinar el ángulo de asiento del avión durante el tramo de subida sabiendo que en este régimen de vuelo la curva de sustentación viene dada por $C_L = C_{L_\alpha}\alpha$, siendo C_{L_α} una constante conocida, tomando como eje x_b el correspondiente a la dirección de sustentación nula del avión.



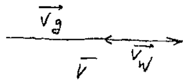
④

1) 1^{er} tramo:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$-L + W = 0$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g$$



$$V_g = V - V_W$$

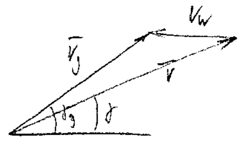
2^{o} tramo:

$$T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = 0 \;;\; \underbrace{\frac{T-D}{W}}_{\simeq 0} - \text{sen}\,\gamma = 0 \Rightarrow \gamma \ll 1$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \;;\; L = W$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\,\text{sen}\,\gamma_g$$



$$V_g\,\text{sen}\,\gamma_g = V\,\text{sen}\,\gamma$$

$$V_g\cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma$$

$$tg\,\gamma_g = \frac{V\cdot\gamma}{V - V_W}$$

$$V_g^2 = V^2 - 2VV_W\underbrace{\cos\gamma}_{1} + V_W^2$$

2) 1^{er} tramo:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dx_e}\cdot\underbrace{\frac{dx_e}{dt}}_{V_g} \;;\; T - D = \frac{W}{g}\cdot V_g\frac{dV}{dx_e}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\int_0^{x_1} dx_e = \int_{V_A}^{V_B}\frac{W\cdot V_g}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\,dV = \boxed{X_1 = \int_{V_A}^{V_B}\frac{W(V - V_W)}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\,dV}$$

2^{o} tramo:

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g \quad (1) \;;\; \frac{dx_e}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = V_g\cos\gamma_g \Rightarrow \frac{dx_e}{dh} = \frac{1}{tg\,\gamma_g}$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\,\text{sen}\,\gamma_g \quad (2)$$

$$\int^{X_2} dx_e = \int^{\Delta H} \dots \qquad \Delta H\,(V - V_W)$$

3) 1^{er} tramo:

$$\int_0^{t_1} dt = \boxed{\int_{V_A}^{V_B} \frac{W}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\, dV = t_1}$$

2^{o} tramo:

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g \cos\gamma_g \; ; \; \int_0^{x_2} dx_e = V_g \cos\gamma_g \int_0^{t_2} dt \; ; \; x_2 = (V_B \cos\gamma - V_W)\, t_2 \sim t_2 = \frac{x_2}{(V_e - V_W)}$$

$$\boxed{t_2 = \frac{\Delta H}{\frac{TV_e}{W} - \frac{\rho S V_e^3}{2W}\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_e^4}\right)}}$$

$$\boxed{t = t_1 + t_2}$$

4) $C_L = C_{L\alpha}\cdot\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \sim \alpha = \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}$

$\theta = \gamma + \alpha$

$$\gamma = \frac{T}{W} - \frac{\rho S V^2}{W}\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\boxed{\theta = \frac{T}{W} - \frac{\rho S V_B^2}{2W}\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_e^4}\right) + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_B^2}}$$

PROBLEMA 23-11-1992 (PROBLEMA 1 / 1er PARCIAL A+B+CD)

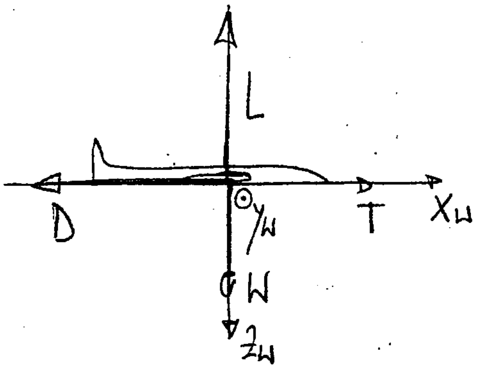
AVIÓN CON TURBORREACTOR: W, S

$C_D = C_{D_0} + K C_L^2$

$T = cte$

VIENTO DE CARA ; $V_w = cte$ $\quad \boxed{\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w}}$

1) a) TRAMO HORIZONTAL (ACELERADO)



• Relaciones dinámicas :

$L - W = 0$

$T - D = \frac{W}{g}\frac{dV_g}{dt}$

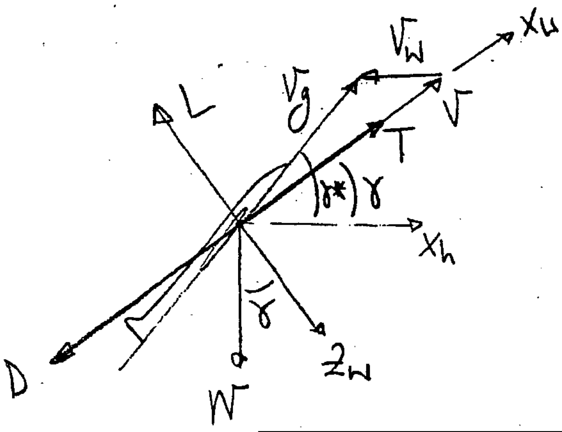
Donde $\vec{V_g} = (V - V_w)\,\vec{i_w}$

• Relaciones cinemáticas

$h = cte$, $\dot{h} = 0$

$\dot{x} = V_g = V - V_w$

b) TRAMO DE SUBIDA (a velocidad constante)



• Relaciones dinámicas :

$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$

$L - W \cos\gamma = 0$

• Relaciones cinemáticas

$\dot{x} = V_g \cos\gamma^*$

$\dot{h} = V_g \operatorname{sen}\gamma^*$

• Ecuaciones para determinar V_g y γ^*

$V_B \cos\gamma$ $\quad \vec{V_B} = V_B \cos\gamma\, \vec{i} + V_B \operatorname{sen}\gamma\, \vec{k}$

HORIZONTAL

2) a) $T-D = \frac{W}{g}\frac{dV_g}{dt} = \frac{W}{g}\frac{d(V-V_W)}{dt} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \longrightarrow T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ (*)

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)$

$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$

Si sustituimos C_L en (*) : $T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho V^2 S}\right)^2\right) = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \longrightarrow V(t)$

Como $\frac{dV_g}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} V_g = \frac{dV}{dx}\cdot(V - V_W)$

Tenemos $T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - K\frac{2W^2}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dx}(V - V_W)$ (**)

$$\int_A^B dx = \frac{1}{g}\int_{V_A}^{V_B} \frac{(V - V_W)}{\left(\frac{T}{W} - \frac{\rho S C_{D0}}{2W}V^2 - \frac{K 2W}{\rho S}\frac{1}{V^2}\right)}\cdot dV \longrightarrow L_{AB}$$

b) SUBIDA

$T - D - W\sin\gamma = 0 \longrightarrow \frac{T-D}{W} = \sin\gamma \ll 1$ (DATO ENUNCIADO)

$\longrightarrow \begin{cases} \sin\gamma \sim \gamma \\ \cos\gamma \sim 1 \end{cases}$

Por tanto $L - W\cos\gamma \simeq L - W = 0 \longrightarrow L = W = \frac{1}{2}\rho V_B^2 S C_L \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V_B^2 S}$

$$\frac{T-D}{W} = \sin\gamma \simeq \gamma = \frac{T}{W} - \frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}\rho V_B^2 S C_D\right) = \frac{T}{W} - \frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2 - \frac{2WK}{\rho S}\frac{1}{V_B^2} = \gamma$$

$$L_{BP} = \int_B^P dx = \frac{1}{K}\Delta H = \frac{\Delta H}{Tg\gamma^*} = \left(1-\frac{V_W}{V_B}\right)\cdot\frac{\Delta H}{\gamma} = \left(1-\frac{V_W}{V_B}\right)\frac{\Delta H}{\left(\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2-\frac{2WK}{\rho S V_B^2}\right)} \rightarrow L_{BP}$$

$$L_{TOTAL} = L_{AB} + L_{BP}$$

3) HORIZONTAL

De la expresión (**) : $\frac{T}{W} - \frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - \frac{2KW}{\rho V^2 S} = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$

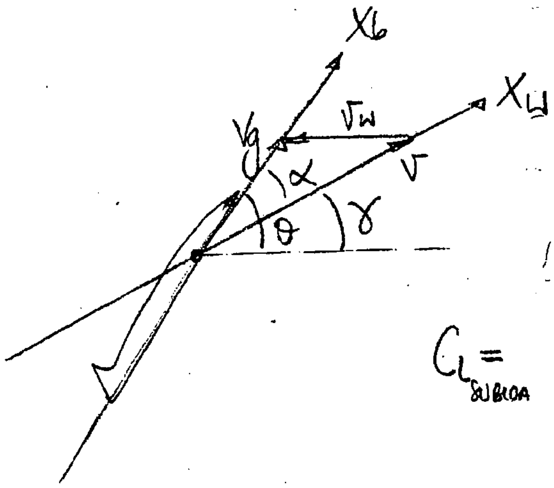
$$t_{AB} = \int_A^B dt = \frac{1}{g}\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{\left(\frac{T}{W}-\frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W}-\frac{2KW}{\rho V^2 S}\right)} \longrightarrow t_{AB}$$

SUBIDA

$V_g = cte = \frac{d}{t}$ donde $\begin{cases} d = \sqrt{L_{BP}^2+\Delta H^2} \\ t = t_{BP}\ ;\ V_g = V_B - V_W \end{cases}$

$$t_{BP} = \frac{d}{V_g} = \frac{\sqrt{L_{BP}^2+\Delta H^2}}{V_B - V_W} = \frac{1}{V_B - V_W}\cdot\Delta H\sqrt{1+\left(\frac{(1-V_W/V_B)}{\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2-\frac{2WK}{\rho S V_B^2}}\right)^2}$$

$$T_{TOTAL} = t_{AB} + t_{BP}$$



Calculado en 2b)

$\theta = \alpha + \gamma$

Donde $\theta = \gamma^*$

$$C_{L_{SUBIDA}} = \frac{2W}{\rho V_B^2 S} = C_{L\alpha}\,\alpha \rightarrow \alpha = \frac{2W}{\rho V_B^2 S\, C_{L\alpha}}$$

$$\theta = \frac{T}{W} - \frac{\rho S C_{D_0}}{2W} V_B^2 - \frac{2WK}{\rho S} \cdot \frac{1}{V_B^2} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_B^2}$$

AINARA ZIARRUSTA ATUTXA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 17.09.10

E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

La figura adjunta representa un avión efectuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w\, z^2$ (k_w es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica V y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ, ambas constantes positivas conocidas.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\,\max}$ y $C_{L\,\min}$ son conocidos, $C_{L\,\delta e} = C_{L\,q} = 0$, etc.).

b) El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.

c) El efecto suelo es despreciable y ρ y g son constantes conocidas.

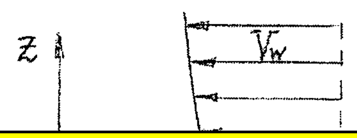
Se pide:

1º) Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes x-z ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.

3º) Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.

4º) Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

5

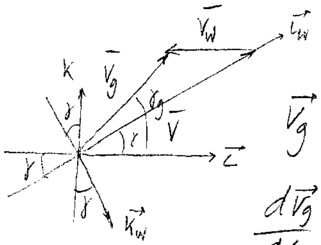
1)

$$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_W \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$



$$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W} = (V\cos\gamma - V_W)\vec{i} + V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{d\vec{V_W}}{dt} = -2K_W \cdot z \cdot \frac{dz}{dt}\,\vec{i}$$

$$\vec{i} = \cos\gamma\,\vec{i_W} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{K_W}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -2K_W z \cdot \frac{dz}{dt}\cos\gamma\,\vec{i_W} - 2K_W z\frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$$

$$(1) \rightarrow T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{-W}{g} 2K_W z\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$

$$(2) \rightarrow -L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g} 2K_W z \cdot \frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$$

$$M_A = I_y \cdot \dot{q} = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_{MA} \quad (5) \qquad T = T(\pi) \quad (10)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (6) \qquad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \quad (8)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \quad (7) \qquad C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e + C_{m\hat{q}}\hat{q} \quad (9)$$

Incógnitas: $T, D, z, L, x_e, C_{MA}, C_L, \alpha, \delta e, \hat{q}, = 10$

Nº ecs: 10

$$\boxed{NGDL = 0}$$

2)

$$(4) \longrightarrow \frac{dz}{dt} = V\operatorname{sen}\gamma \; ; \; \int_0^z dz = V\operatorname{sen}\gamma\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{z = V\operatorname{sen}\gamma\, t}$$

$$(3) \rightarrow \frac{dx_e}{dt} = V\cos\gamma - K_W z^2 = V\cos\gamma - K_W V^2\operatorname{sen}^2\gamma\, t^2$$

$$\int^{x_e} dx_e = \int^t (V\cos\gamma - K_W V^2\operatorname{sen}^2\gamma\, t^2)\,dt \Rightarrow \boxed{x_e = V\cos\gamma\, t - K_W V^2 \operatorname{sen}^2\gamma\, t^3}$$

$$- \frac{C_{L0}}{} + \frac{2W\cos\gamma}{} + \frac{4W K_W \operatorname{sen}^2\gamma\, t}{}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta_e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\hat{q}}\,\hat{q}\right]}$$

4) $C_L = C_{LMAX} = \frac{2WG\delta}{\rho S V^2} + \frac{2WK_W \delta m^3 \gamma t}{\rho S g}$; $C_{LMAX} - \frac{2WG\delta}{\rho S V^2} = \frac{4WK_W \delta m^3 \gamma t}{\rho S g}$

$$\boxed{t = \frac{\rho S g\, C_{LMAX}}{4WK_W \delta m^3 \gamma} - \frac{2Wg\,G\delta}{4WK_W \delta m^3 \gamma} = \frac{g}{4K_W W \delta m^3 \gamma}\left[\rho S\, C_{LMAX} - 2WG\delta\right]}$$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H7: 15-09-97

La figura adjunta representa un avión efectuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ (k_w es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica V y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ, ambas constantes positivas conocidas.

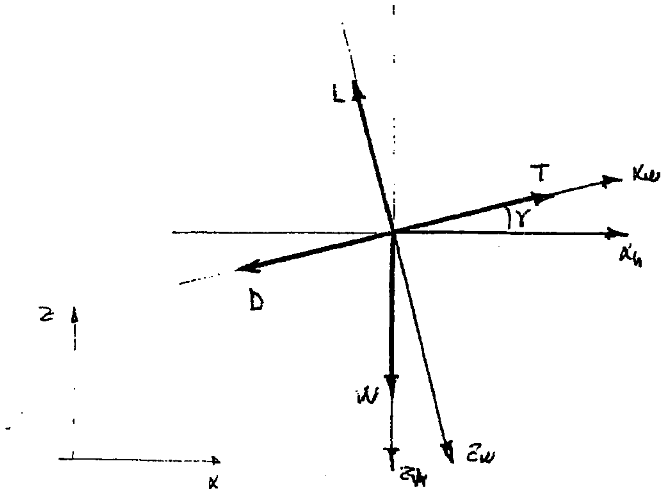
Suponiendo además que:

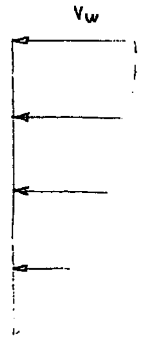
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, C_{Lmax} y C_{Lmin} son conocidos, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y ρ y g son constantes conocidas.

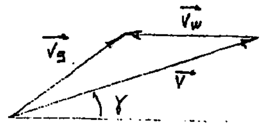
Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

1)







$$\vec{V_g} = (v\cos\gamma - V_w)\,\vec{i_o} + v\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\vec{k_o}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{dV_w}{dt}\,\vec{i_o} = -K_w\, 2z\dot{z}\,\vec{i_o}$$

$$\vec{i_o} = \cos\gamma\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\gamma\,\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{V_g}}{dt} = -2K_w z\dot{z}\cos\gamma\,\vec{i} - 2K_w z\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\vec{k}$$

$$T - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma = -\frac{W}{g}\,2K_w z\dot{z}\cos\gamma$$

$$W\cos\gamma - L = -\frac{W}{g}\,2K_w z\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

$$I_y\,\dot{q} = \frac{1}{2}\rho v^2 S.c.C_m$$

$$\frac{dx_e}{dt} = v\cos\gamma - V_w$$

$$\frac{dz_e}{dt} = v\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

T
D
z
L
q
x

T (π)
L, D (M, γ, α)
z → (v, γ)
V_w → z

2)

$$\boxed{\begin{aligned} z_e &= V \operatorname{sen}\gamma \; t \\ x_e &= V\cos\gamma \cdot t - K_w V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \; \frac{t^3}{3} \end{aligned}}$$

3)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha \right) = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\, 2 K_w\, z \dot{z} \operatorname{sen}\gamma$$

$$C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma\, t \right)$$

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma\, t \right) - C_{L_0} \right]}$$

$$T - D - W\operatorname{sen}\gamma = -\frac{W}{g}\, 2K_w\, V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \cos\gamma\, t$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D_0} + K\left(C_{L_0} + C_{L\alpha}\alpha\right)^2 \right) + W\operatorname{sen}\gamma - \frac{W}{g}\, 2K_w V^2 \operatorname{sen}^2\gamma\cos\gamma\, t}$$

$$\dot{q} = \underbrace{\ddot{\alpha}}_{=0} + \underbrace{\ddot{\gamma}}_{=0} \quad ; \quad \alpha \to \text{lineal en } t \;, \quad \gamma \to \text{cte}$$

$$I_y \dot{q} = 0 \Rightarrow \quad C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta}\,\delta_e + C_{m\bar{q}}\,\bar{q} = 0$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha - \frac{C_{m\bar{q}}}{C_{m\delta}}\bar{q}$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta} C_{L\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma\, t \right) - C_{L_0} \right] - \frac{C_{mq}}{C_{m\delta}}\, \frac{[illegible]}{C_{L\alpha}\rho S g}$$

4)

$$C_{L_{min}} < C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha < C_{L_{max}}$$

$$\frac{C_{L_{min}}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}} < \alpha < \frac{C_{L_{max}}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\alpha(t) = \frac{2W\cos\gamma}{\rho v^2 S C_{L\alpha}} + \frac{4WK_W}{\rho v^2 S g C_{L\alpha}} v^2 \operatorname{sen}^3\gamma \cdot t - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}}$$

Instante a partir del cual no es posible el vuelo

$$\frac{2W\cos\gamma}{\rho v^2 S} + \frac{4WK_W}{\rho v^2 S g} v^2 \operatorname{sen}^3\gamma \cdot t = C_{L_{max}}$$

$$t = \frac{\rho \cancel{v^2} S \cdot g}{4WK_W \cancel{v^2} \operatorname{sen}^3\gamma}\left(C_{L_{max}} - \frac{2W\cos\gamma}{\rho v^2 S}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{\rho g S C_{L_{max}}}{4WK_W \operatorname{sen}^3\gamma} - \frac{g\cos\gamma}{2K_W \operatorname{sen}^3\gamma}}$$

TR. Vuelo simétrico en plano vertical

H7: 15-09-97 Vw variable con z

La figura adjunta representa un avión efetuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ (k_w es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica V y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ, ambas constantes positivas conocidas.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, C_{Lmax} y C_{Lmin} son conocidos, $C_{L\delta_e} = CL_q = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

15-09-97

La figura adjunta representa un avión efetuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ (k_w es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica V y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ, ambas constantes positivas conocidas.

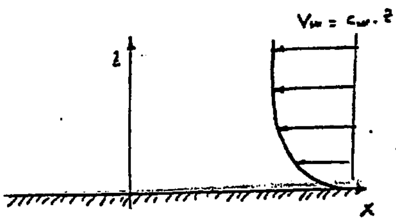
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, C_{Lmax} y C_{Lmin} son conocidos, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

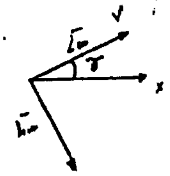
Problema nº: 15-09-97



- $C_{L\,max}$, $C_{L\,min}$, $C_{L_q} = 0$ $C_{L\dot{\alpha}} = 0$
- $T // x_w$
- VSPV $\mu = \beta = \Omega = \nu = 0$ ¿V, γ ctes?

Ala a nivel $\Rightarrow \phi = 0$

1) Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes x-z ligados a tierra de la figura) que permitan resolver el problema. Determinar el nº de grados de libertad matemáticos del sistema.



$\bar{I} = \cos\gamma \cdot \bar{i}_w + \sin\gamma \cdot \bar{k}_w \Rightarrow \bar{V}_g = V \cdot \bar{i}_w + V_w(-\bar{I}) = V \cdot \bar{i}_w + V_w(-\cos\gamma \cdot \bar{i}_w - \sin\gamma \cdot \bar{k}_w)$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V}_g = (V - V_w \cdot \cos\gamma)\,\bar{i}_w - V_w \cdot \sin\gamma \cdot \bar{k}_w}$$

En el anterior problema hemos visto las 2 maneras de calcular "m.a". Cuando $\bar{V}_g$ en ejes viento, sólo resta decir en la precaución de no olvidar: $\dfrac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} + \bar{\omega}_{we} \wedge \bar{V}_g|_w$ (de la otra manera al final del problema)

Como $\gamma = cte \Rightarrow \bar{\omega}_{we} = 0$

$$\dot{\bar{V}}_g|_w = \frac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} + \cancel{\bar{\omega}_{we} \wedge \bar{V}_g|_w} = \frac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} = -2 \cdot z \dot{z} \cdot C_w \cdot \cos\gamma \cdot \bar{i}_w - 2 \cdot z \cdot \dot{z} \cdot C_w \cdot \sin\gamma \cdot \bar{k}_w$$

$\bar{\omega}_{bh} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$

Finalmente:

$$-D + T - W \cdot \sin\gamma = \frac{-W}{g} 2 z \dot{z} C_w \cdot \cos\gamma$$

$$-L + W \cdot \cos\gamma = \frac{-W}{g} 2 z \dot{z} C_w \cdot \sin\gamma$$

$\omega_{bh_y} = q$

$\widehat{x_b, x_h} = \theta = \underbrace{\widehat{x_b, x_w}}_{\alpha} + \underbrace{\widehat{x_w, x_h}}_{\gamma} =$

$L = \frac{1}{2} \rho V^2 C_L$ $C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha$ $M_a + \cancel{M_T} + M_{q\,ac} = I_y \cdot \dot{q} = q \cdot S \cdot c \cdot C_{m_{cg}}$

11 ec. Incógnitas: $D, T, z, L, C_L, C_D, \alpha, \dot{q}, C_{m_{cg}}, \delta_e, x$ → 11 incógnitas

N = Nº ... = 0: No existe ningún grado de libertad

2º) Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.

$$\dot{x} = V\cos\gamma - C_w \cdot z^2$$
$$\dot{z} = V\sin\gamma \rightarrow \boxed{z = V\sin\gamma \cdot t \rightarrow x = V\cos\gamma \cdot t - C_w V^2 \sin^2\gamma \cdot \frac{t^3}{3}}$$

3º) Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si puede, de los grados de libertad matemáticos del problema.

- $\left.\begin{array}{l} L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \\ C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \end{array}\right\} L = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha) = W\cos\gamma + 2\frac{W}{g} C_w \sin\gamma \cdot \frac{V\sin\gamma}{\dot z} \cdot \frac{V\sin\gamma \cdot t}{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 2 \cdot \frac{W\cos\gamma + \frac{2W}{g} C_w V^2 \sin^2\gamma \cdot t}{\rho V^2 S C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

- $\boxed{T = D + W\sin\gamma - \frac{2W}{g} C_w \cos\gamma \cdot \frac{V\sin\gamma}{\dot z} \cdot \frac{V\sin\gamma \cdot t}{z} \quad ; \quad D = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + k\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2\right)}$

- $I_y \cdot \dot q = I_y (\ddot\alpha + \ddot\gamma) = q \cdot S \cdot c \cdot (C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e + C_{mq} \cdot q)$

$\alpha = \alpha(t)$. $q = \dot\alpha + \cancel{\dot\gamma}^{0}$; $\dot q = \ddot\alpha + \cancel{\ddot\gamma}^{0}$

Lo vemos que $\alpha = \alpha(t)$ es lineal con $t \rightarrow \dot\alpha = cte \rightarrow \ddot\alpha = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e + C_{mq} q = 0 \rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{\alpha}{C_{m\delta}}\left\{C_{m\alpha} + C_{mq}\right\}}$$

4º) Suponiendo que sólo aparecen limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdidas), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

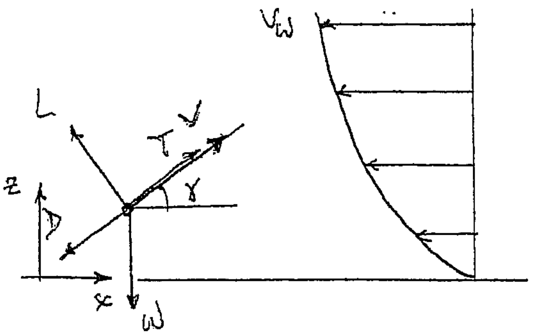
C_{Lmax}

Límite $\Rightarrow C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \leq C_{L}$ [illegible]

[illegible] $\rightarrow V_y|_w = $ [illegible]

si ya vuela

H7 (15-09-97)



Datos: V, γ = ctes

$T \parallel i_w$

$V_W = C_W z^2$

$\boxed{1}$ Sist. ecs. y nº gdl $\qquad$ $\vec{T}$?

$$\vec{V}_W = -V_W \vec{i} = -V_W(\cos\gamma\, \vec{i}_w \mp \sin\gamma\, \vec{k}_w) \;; \quad V_W = C_W z^2$$

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_W = (V - V_W \cos\gamma)\vec{i}_w - V_w \sin\gamma\, \vec{k}_w$$

$\vec{\omega}_{wh} = \vec{0}$ (γ = cte) ⇒ mejor derivar en ejes móviles !!

$$\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_h = \left.\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}\right|_w + \cancel{\vec{\omega}_{wh}}^{\,0} \wedge \vec{V}_g\Big|_w = -2C_w z \dot{z} \cos\gamma\, \vec{i}_w - 2C_w z\dot{z} \sin\gamma\, \vec{k}_w$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} T - D - W\sin\gamma = -2C_w z\dot{z}\cos\gamma \cdot \frac{W}{g} & (1) \\ -L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g} 2C_w z \dot{z} \sin\gamma & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\gamma - V_w & (3) \\ \dot{z} = V\sin\gamma & (4) \end{cases}$$

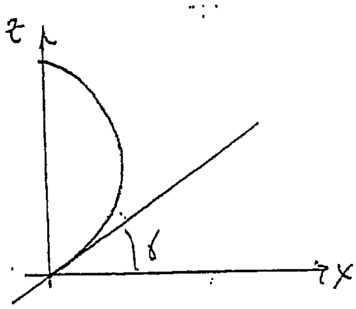
$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \;; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \qquad (5), (6)$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \;; \quad C_D = C_{D0} + k C_L^2 \qquad (7), (8)$

Ec momentos: $M_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_m = I_y \dot{q} \;; \quad q = \cancel{\dot{\alpha}}^{\,0} + \cancel{\dot{\gamma}}^{\,0} \qquad (9), (10)$

2 Trayectoria respecto a tierra

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\gamma - C_\omega z^2 \Rightarrow \boxed{x = V\cos\gamma t - C_\omega V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \cdot \frac{t^3}{3}} \\ \dot{z} = V\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow \boxed{z = V\operatorname{sen}\gamma \cdot t} \end{cases}$$



3 $\alpha, T, \delta_e = f(t, \text{gdl matemáticos})$

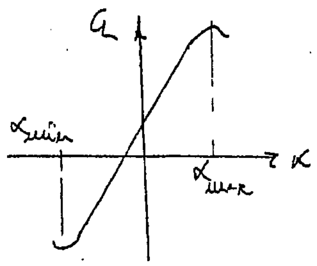
$$L = W\cos\gamma + \frac{W}{g} 2C_\omega z\dot{z}\operatorname{sen}\gamma = W\cos\gamma + \frac{W}{g} 2C_\omega (V\operatorname{sen}\gamma \cdot t)(V\operatorname{sen}\gamma)\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha) = W\cos\gamma + \frac{2W}{g} C_\omega V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \cdot t \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2WC_\omega}{qSC_{L_\alpha} g} V^2\operatorname{sen}^3\gamma \cdot t + \frac{W}{qSC_{L_\alpha}}\cos\gamma - \frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}}}$$

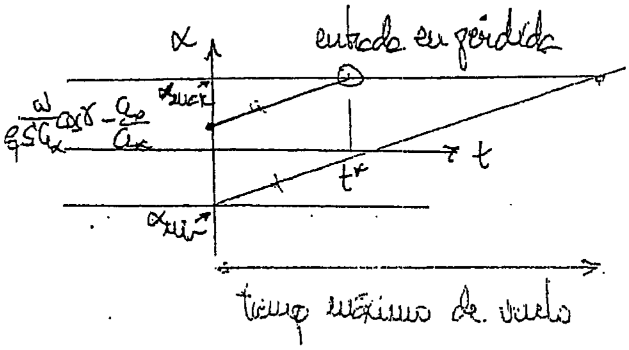
$$\alpha \to C_L \to C_D \xrightarrow{(1)} T = D + W\operatorname{sen}\gamma - \frac{W}{g} 2C_\omega z\dot{z}\cos\gamma = \ldots$$

$$\hookrightarrow C_m \xrightarrow[(9)]{} \delta_e = \ldots$$

4



$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{max} &= \frac{C_{L_{max}} - C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} \\ \alpha_{min} &= \frac{C_{L_{min}} - C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} \end{aligned}}$$



CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 1^er E. Parcial – B+CD 26.11.91

PROBLEMA 1º

Un avión provisto de turborreactor, cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, efectúa una subida simétrica en el plano vertical con velocidad aerodinámica V y ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ constantes y conocidos. La subida se realiza contra un viento horizontal, contenido en el plano vertical, cuyo perfil de velocidades viene dado por:

$$\frac{V_w(z)}{V_{w_1}} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\tau} \quad , \quad 0 \le z \le z_1$$

$$V_w(z) = V_{w_1} \quad , \quad z_1 \le z$$

donde V_{w_1}, z_1, $\tau > 1$ son constantes conocidas.

Suponiendo además que:

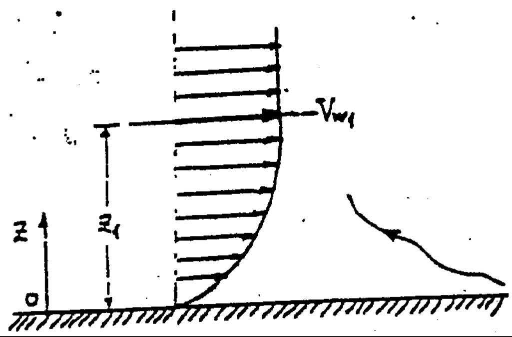
a) El peso del avión W, la densidad atmosférica ρ y la constante de la gravedad g, son constantes conocidas.

b) El empuje de los motores T es función únicamente del parámetro de control π y tiene un ángulo de ataque $\varepsilon \simeq 0$.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas (en ejes viento) y cinemáticas que permitirían resolver el problema y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2º) Suponiendo que $\gamma \ll 1$ y que $V_{w_1} \ll V$, determinar el ángulo de ataque, α, y el empuje, T, en función de los grados de libertad del problema y del tiempo.

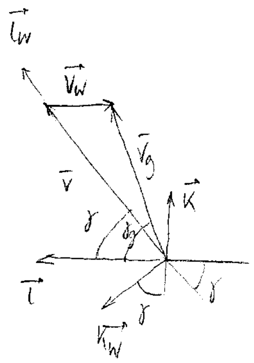


6

1)

$$T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \quad (2)$$



$$V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma$$

$$V_g \cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma_g = \frac{V\operatorname{sen}\gamma}{V\cos\gamma - V_W}$$

$\underline{0 \le z \le z_1:}$

$$V_W(z) = V_{W1}\left(\frac{z}{z_1}\right)^r$$

$$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W} = (V\cos\gamma - V_W)\,\vec{i} + V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k} \qquad \vec{i} = \cos\gamma\,\vec{i_w} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{k_w}$$

$$V_g^2 = V^2 - 2VV_W\cos\gamma + V_W^2$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{d\vec{V_W}}{dt} = -r\,\frac{V_{W1}}{z_1^r}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$(1) \rightarrow T - D - W\operatorname{sen}\gamma = -\frac{W r V_{W1}}{g z_1^r}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$

$$(2) \rightarrow L = W\cos\gamma - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^r}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_W \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (5) \qquad ; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\,\alpha \quad (7)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + k C_L^2) \quad (6) \quad ; \quad T = T(\pi) \quad (8)$$

Incógnitas: $T, D, z, L, x_e, C_L, \alpha, \pi = 8$
Ecs: 8
$\rightarrow \boxed{NGDL = 0}$

$z_1 \le z$:

$$\frac{dh}{dt} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$

a) $\underline{0 \le z \le z_1}$:

$$(4) \longrightarrow \int_0^z dh = \int_0^t V\sin\gamma\, dt \rightsquigarrow z = V\sin\gamma\, t$$

$$(2) \longrightarrow L = W\cos\gamma - \frac{W r V_{w1}}{g z_1^r}(V\sin\gamma\, t)^{r-1} \cdot V\sin\gamma \sin\gamma = W\cos\gamma - \frac{W r V_{w1}}{g z_1^r}(V\sin\gamma)^r \sin\gamma \cdot t^{r-1}$$

$$C_L = \frac{2W\cancel{\cos\gamma}^{\,1}}{\rho V^2 S} - \frac{2W r V_{w1}}{g z_1^r \rho S} V^{r-2} \cdot \sin\gamma^{r+1} \cdot t^{r-1} = \frac{2W}{\rho S V^2} - \frac{2W r V_{w1}}{g z_1^r \rho S} \cdot V^{r-2} \cdot \gamma^{r+1} \cdot t^{r-1}$$

$$(1) \longrightarrow T = W\sin\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) - \frac{W r V_{w1}}{g z_1^r} \cdot (V\sin\gamma)^r \cancel{\cos\gamma}^{\,1}\, t^{r-1}$$

$$\boxed{T = W\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) - \frac{W r V_{w1}}{g z_1^r} \cdot (V\gamma)^r t^{r-1}}$$

$$(7) \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2} - \frac{2W r V_{w1}}{g z_1^r \rho S C_{L\alpha}} V^{r-2} \cdot \gamma^{r+1} \cdot t^{r-1}}$$

$\underline{z_1 < z}$:

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\boxed{T = W\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}$$

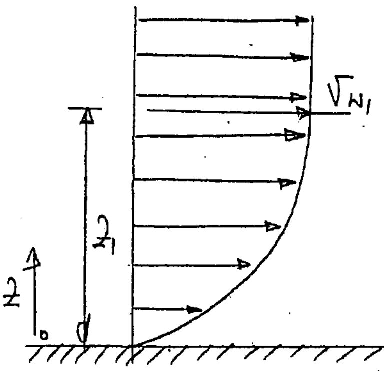
$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}}$$

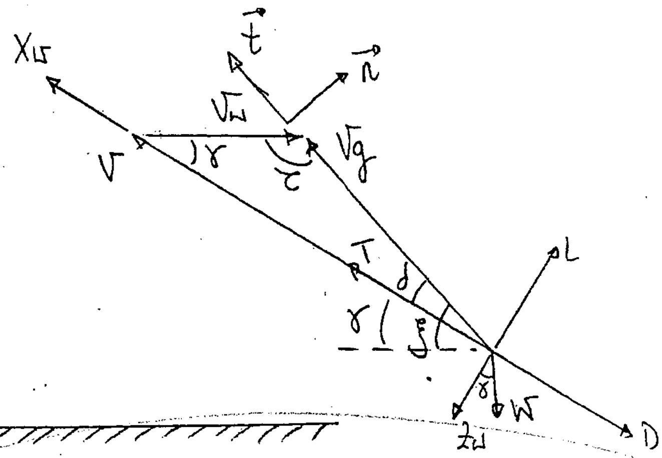
26-11-1991 (PROBLEMA 1 / 1º PARCIAL B+CD)

• Velocidad del viento:
$$\frac{V_W(z)}{V_{W_1}} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\gamma} \; ; \; 0 \leq z \leq z_1 \qquad V_W, z_1, \gamma > 1 \text{ son constantes conocidas.}$$
$$V_W(z) = V_{W_1} \; ; \; z_1 \leq z.$$

• W, ρ, g constantes conocidas.

• $T = f(\pi)$; $\varepsilon \simeq 0$





$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$;

TEOREMA DEL COSENO: $\boxed{V_g^2 = V^2 + V_W^2 - 2 V V_W \cos\gamma}$

TEOREMA DEL SENO: $\frac{\text{sen}\,\tau}{V} = \frac{\text{sen}\,\delta}{V_W}$ Donde $\tau = \pi - \gamma - \delta$

$$\text{sen}\,\tau = \text{sen}(\pi - (\gamma+\delta)) = \underbrace{\text{sen}\,\pi}_{0} \cos(\gamma+\delta) - \underbrace{\cos\pi}_{-1} \text{sen}(\gamma+\delta) = \text{sen}(\gamma+\delta)$$
$$\text{sen}\,\tau = \text{sen}(\gamma+\delta) = \text{sen}\,\gamma \cos\delta + \cos\gamma\, \text{sen}\,\delta$$

Por tanto; $\text{sen}\,\delta = \frac{V_W}{V}\text{sen}\,\tau = \frac{V_W}{V}(\text{sen}\,\gamma \cos\delta + \cos\gamma\,\text{sen}\,\delta)$

$$1 = \frac{V_W}{V}\left(\text{sen}\,\gamma \cdot \frac{1}{\text{Tg}\,\delta} + \cos\gamma\right) \rightarrow \boxed{\text{Tg}\,\delta = \frac{\text{sen}\,\gamma}{\frac{V}{V_W} - \cos\gamma}}$$

• ECUACIONES CINEMÁTICAS: $\dot{x} = V_g \cos\xi = \frac{dx}{dt}$ $(\xi = \gamma + \delta)$

$\dot{z} = V_g\, \text{sen}\,\xi = \frac{dz}{dt}$

Ecuaciones DINÁMICAS:

$$\bar{k}_w)\quad -L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g}\left(\frac{dV_g}{dt}\,\text{sen}\,\delta + V_g\frac{d\xi}{dt}\cos\delta\right)$$

$$\bar{i}_w)\quad T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = \frac{W}{g}\left(\frac{dV_g}{dt}\cos\delta - V_g\frac{d\xi}{dt}\,\text{sen}\,\delta\right)$$

Necesitamos calcular: $\frac{dV_g}{dt}$; $\frac{d\xi}{dt}$

viene de derivar $V_g^2 = V^2 + V_w^2 - 2V_w V\cos\gamma$

$$* \quad \cancel{2}V_g\frac{dV_g}{dt} = \cancel{2}V_w\frac{dV_w}{dt} - \cancel{2}V\frac{dV_w}{dt}\cos\gamma \,; \quad \frac{dV_g}{dt} = \frac{1}{V_g}\cdot\frac{dV_w}{dt}\left(V_w - V\cos\gamma\right)$$

2

$$\frac{dV_w}{dt} = \frac{dV_w}{dz}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_g\,\text{sen}\,\xi\ \text{(Ecuación cinemática)}} = \frac{dV_w}{dz}\cdot V_g\,\text{sen}\,\xi$$

Por tanto:

$$\frac{dV_g}{dt} = \frac{1}{\cancel{V_g}}\cdot\frac{dV_w}{dz}\cdot\cancel{V_g}\,\text{sen}\,\xi\cdot\left(V_w - V\cos\gamma\right) = \frac{dV_w}{dz}\,\text{sen}\,\xi\left(V_w - V\cos\gamma\right)$$

$$* \quad \xi = \gamma + \delta \,; \quad \frac{d\xi}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{d\gamma}{dt}}}_{0} + \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{d(V_w/V)}\cdot\frac{d(V_w/V)}{dz}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_g\,\text{sen}\,\xi}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta}{dV_w}\cdot\frac{dV_w}{dz}\cdot V_g\,\text{sen}\,\xi$$

De esta forma conseguimos que:

$$\left|\begin{array}{l} T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = f(V_w, z) = f(z) \\ L + W\cos\gamma = g(V_w, z) = g(z) \end{array}\right.$$

2) Si $\gamma \ll 1 \rightarrow \begin{cases} \sin\gamma \sim \gamma \\ \cos\gamma \sim 1 \end{cases}$

Despreciamos los términos de orden superior a V_W/V

* $V_g^2 = V^2 + V_W^2 - 2 V V_W \cos\gamma$

$$\frac{V_g^2}{V^2} = 1 + \cancel{\left(\frac{V_W}{V}\right)^2} - 2\frac{V_W}{V}\cos\gamma \sim 1 - 2\frac{V_W}{V} \longrightarrow \frac{V_g}{V} = \sqrt{1 - 2\frac{V_W}{V}}$$

* $$\operatorname{Tg}\delta = \frac{\sin\gamma}{\frac{V}{V_W} - \cos\gamma} \sim \frac{\gamma}{\frac{V}{V_W} - 1} \sim \underbrace{\gamma\frac{V_W}{V}}_{} \sim 0 \longrightarrow \delta = 0$$

Término de 2º orden ($\gamma \ll$; $\frac{V_W}{V} \ll 1$)

* $$\frac{dV_g}{dt} = \frac{dV_W}{dz}\sin\xi\,(V_W - V\cos\gamma) \quad \Bigg\} \quad \frac{dV_g}{dt} \sim \frac{dV_W}{dz}\gamma(V_W - V) = V\frac{dV_W}{dz}\left(\cancel{\gamma\frac{V_W}{V}} - \gamma\right)$$

$\xi = \gamma + \delta \sim \gamma$

Término de 2º orden

$$\frac{dV_g}{dt} \sim -V\frac{dV_W}{dz}\gamma$$

* $$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta}{dV_W}\cdot\frac{dV_W}{dz}\cdot V_g\sin\xi \sim \frac{d\delta}{dV_W}\cdot\frac{dV_W}{dz}V_g\cdot\gamma \sim 0$$

$\xi = \gamma + \delta \sim \gamma$

Por tanto las ecuaciones dinámicas quedan:

$$\begin{cases} -L + W = +\frac{W}{g}V\frac{dV_W}{dz}\gamma\cdot\delta \sim 0 \quad (1); & L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\alpha \\ T - D - W\gamma = -\frac{W}{g}V\frac{dV_W}{dz}\gamma \quad (2) & \hookrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}} \end{cases}$$

* $$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho S V^2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 C_{D0} S + K\frac{2W^2}{\rho S V^2}$$

Por tanto, sustituyendo en (2):

$$T = D + W\gamma - \frac{W}{g} V \frac{dV_W}{dz}\gamma$$

$$\boxed{\begin{cases} T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + K\left(\frac{2W^2}{\rho S V^2}\right) + W\gamma - \frac{W}{g} V \left(\frac{V_{W1}}{z_1}\right) r \left(\frac{z}{z_1}\right)^{r-1}\gamma \, ; & 0 \leq z \leq z_1 \\ T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + K\left(\frac{2W^2}{\rho S V^2}\right) + W\gamma & z_1 \leq z \end{cases}}$$

C-98

PROBLEMA 15 (24-11-87)

Se considera un avión provisto de turborreactor cuya polar viene definida por la relación $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ siendo C_{D_0} y k constantes dentro del intervalo de C_L considerado.

A partir de su base de operaciones pretende realizar una misión militar contra un objetivo situado a cierta distancia, para lo cual el piloto efectúa una subida rectilínea hasta la vertical del objetivo, sin cambiar de sentido, con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica γ_s, constante y no conocido, para después volver planeando hacia su base, asimismo rectilíneamente y sin cambiar de sentido.

Se supone además que:

a) La carga adimensional de combustible es mucho menor que uno: $\zeta = W_F/W_i < 1$.

b) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

c) Toda la misión se realiza a velocidad aerodinámica adimensional igual a uno, $v = 1$.

d) La densidad atmosférica es constante en el margen de variación de alturas considerado.

e) La distancia recorrida por el avión en la transición de las condiciones de subida a las de planeo es despreciable.

f) Son conocidos los datos geométricos y aerodinámicos del avión, además de su peso en el instante inicial, W_i, y del consumo específico del motor, c.

Si existe un viento moderado, cuya velocidad adimensionalizada usualmente (v_w) se supone constante, en la dirección base-objetivo y en cualquiera de los dos sentidos posibles del viento, se pide:

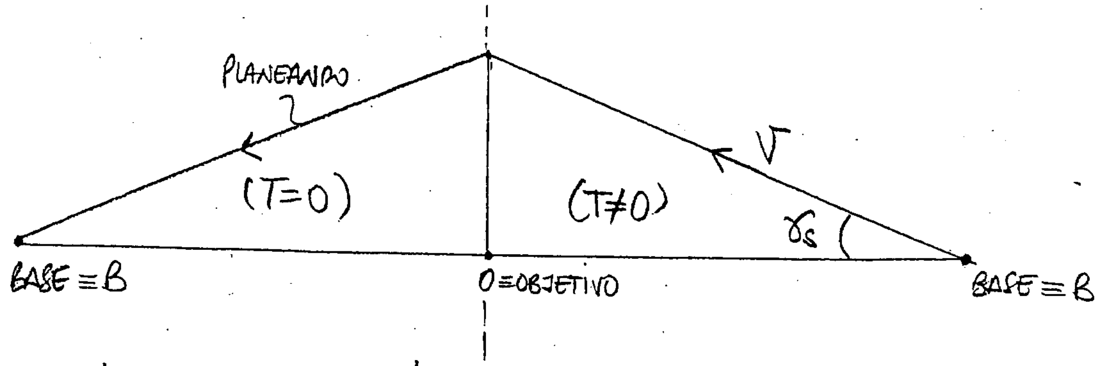
1°) Plantear la expresión que proporciona la distancia total recorrida (subida hasta el objetivo y vuelta planeando) en función de los datos conocidos, de v_w, de

2º) Calcular los valores de γ_s y de ζ que garantizan la vuelta del avión a su base, situada a una distancia D del objetivo, para los dos sentidos posibles del viento. Representar estas dos misiones en el diagrama del apartado anterior.

3º) Demostrar que si el viento sopla la mitad de los días del mes en un sentido y la otra mitad en sentido contrario pero con igual v_w, y el piloto realiza una misión diaria siempre con el mismo γ_s y el mismo ζ, la suma de las distancias recorridas al cabo del mes es independiente de v_w y de γ_s.

PROBLEMA 15 (24-11-1987)

- POLAR DEL AVIÓN : $C_D = C_{D0} + K C_L^2$

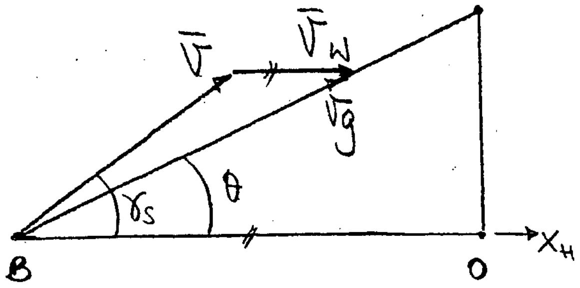


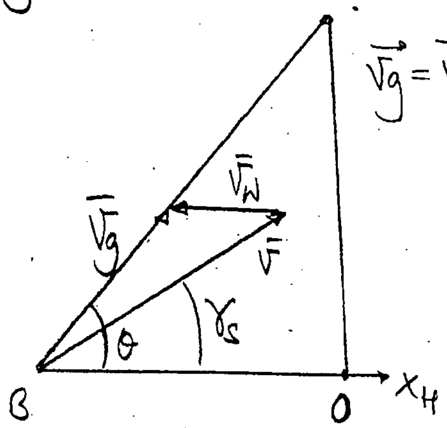
- $\gamma_s \equiv cte$, pero no es dato.
- $\zeta = W_F / W_i \ll 1$
- Toda la misión se realiza con $\hat{V} = 1$; $\frac{V}{V_B} = \hat{V} \longrightarrow V = \hat{V} V_B = 1 \cdot \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}} = cte.$
- ρ es constante
- W_i y C son conocidos
- $\bar{V}_W = cte.$ $(\hat{V}_W = V_W / V_B)$

1) SUBIDA HASTA EL OBJETIVO : $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$

$\vec{V_g} = \vec{V} + V_W \vec{i_H}$;

$\vec{V_g} = \vec{V} - V_W \vec{i_H}$

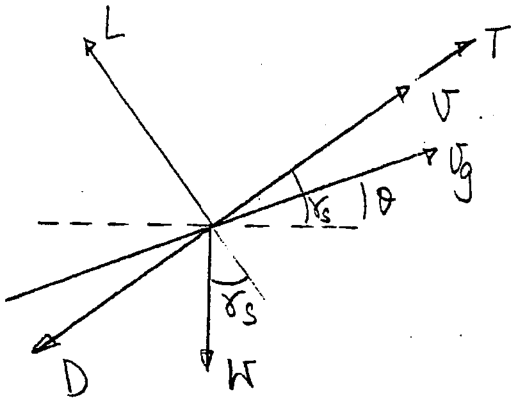




$V_g = V\cos\gamma_s + V_W$

$V_g = V\cos\gamma_s - V_W$

- ECUACIONES



ECUACIONES CINEMÁTICAS

$$\begin{cases} \dot{x} = V_g \cos\theta = V\cos\gamma_s \pm V_W \\ \dot{h} = V_g \operatorname{sen}\theta = V \operatorname{sen}\gamma_s \end{cases}$$

ECUACIONES DINÁMICAS

$$\begin{cases} L - W\cos\gamma_s = 0 \\ T - D - W\operatorname{sen}\gamma_s = 0 \end{cases}$$

ECUACIÓN DEL MOTOR

$$\dot{m} + \varphi = 0 \qquad \dot{W} + cT = 0$$

Sabemos que $\begin{cases} L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \end{cases}$

- Como nos dicen que los ángulos son pequeños:

$$V_g = |\bar{V}_g| = \sqrt{(V\cos\gamma \pm V_W)^2 + (V\operatorname{sen}\gamma)^2} = \sqrt{V^2 \pm 2VV_W\cos\gamma + V_W^2} \simeq \sqrt{V^2 \pm 2VV_W + V_W^2}$$

$$\hat{V}_g = \frac{V_g}{V_B} = \sqrt{\frac{V^2}{V_B^2} \pm 2\frac{V}{V_B}\frac{V_W}{V_B} + \frac{V_W^2}{V_B^2}} = \sqrt{\hat{V}^2 \pm 2\hat{V}\hat{V}_W + \hat{V}_W^2} = \sqrt{\hat{V}_W^2 \pm 2\hat{V}_W + 1} =$$

Como en el problema $\hat{V} = 1$

$$= \sqrt{(1 \pm \hat{V}_W)^2} = (1 \pm \hat{V}_W) \longrightarrow \hat{V}_g = 1 \pm \hat{V}_W$$

- $\operatorname{Tg}\theta \sim \theta = \frac{\operatorname{sen}\gamma_s}{\dots} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_s}{\dots \pm V_W/V_B} \sim \frac{\gamma_s}{1 \pm \hat{V}\dots}$

• Ahora vamos a adimensionalizar el resto de ecuaciones: $(\gamma_s \ll 1, \theta \ll 1)$

- EQUACIONES CINEMÁTICAS

$$\left(\frac{\dot{x}}{V_B}\right) = \hat{V}_g \cos\theta \simeq \hat{V}_g$$

$$\left(\frac{\dot{h}}{V_B}\right) = \hat{V}_g \sin\theta \simeq \hat{V}_g\theta$$

- ECUACIONES DINÁMICAS

$$\frac{L}{W} - \cos\gamma_s = 0 \;;\quad n - \cos\gamma_s = 0 \;;\quad n \simeq 1$$

$$\underbrace{\frac{T}{T_B}}_{\hat{T}} - \underbrace{\frac{D E_m}{W}}_{\hat{D}} - E_m \sin\gamma_s = 0 \;;\quad \hat{T} - \hat{D} - E_m\gamma_s = 0$$

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \longrightarrow \hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \overset{\hat{V}=1;\, n\simeq 1}{=} \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\,opT}}$$

- ECUACIÓN DEL MOTOR: $\dot{W} + cT = 0$

• Vamos a seleccionar la variable peso como variable independiente:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dW}\cdot\frac{dW}{dt} \simeq V_g \longrightarrow \frac{dx}{dW} = \frac{-V_g}{cT} = -\frac{\hat{V}_g V_B}{cT_B\hat{T}}$$

$$\frac{dW}{dt} = -cT \longrightarrow \frac{dt}{dW} = -\frac{1}{cT} = -\frac{1}{cT_B\hat{T}}$$

donde $T_B = \frac{W}{E_m}$; $V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$

Por tanto:

$$\frac{dx}{dW} = -\overset{1/T_B}{\frac{E_m}{cW}} \cdot \frac{V_B \cdot \hat{V}_g}{\underbrace{(1+E_m\gamma_s)}_{\hat{T}}}$$

$$\frac{dt}{dW} = -\frac{E_m}{} \cdot \frac{1}{}$$

... W_i

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} \cdot \frac{\cancel{V_{Bi} E_m}}{\cancel{C W_i}} = -\frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C \hat{W} W_i}} \cdot \frac{V_B \hat{V}_g}{(1+E_m\gamma_e)} \longrightarrow \boxed{\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}} \cdot \frac{(1 \pm \hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_e)}}$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} \cdot \frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C W_i}} = -\frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C \hat{W} W_i}} \cdot \frac{1}{(1+E_m\gamma_e)} \longrightarrow \boxed{\frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\hat{W}} \cdot \frac{1}{(1+E_m\gamma_e)}}$$

Integrando la primera ecuación: $\left(W_f / W_i = \mathcal{J} \ll 1 ;\ \hat{W}_f = \frac{W_i - W_f}{W_i} = 1 - \mathcal{J} \right)$

$$\int_0^{\hat{x}_f} d\hat{x} = \hat{x}_f = \int_1^{1-\mathcal{J}} -\frac{(1 \pm \hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_e)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{W}}} d\hat{W} = -2 \frac{(1 \pm \hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_e)} \cdot \left(\sqrt{1-\mathcal{J}} - 1 \right)$$

$$\boxed{\hat{x}_f = 2 \frac{(1 \pm \hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_e)} \left(1 - \sqrt{1-\mathcal{J}} \right)}$$

$$\hat{x}_f = \frac{x_f}{x^*} \longrightarrow x_f = \hat{x}_f \cdot x^* = \hat{x}_f \cdot \frac{V_{Bi} E_m}{C}$$

$$x_f = 2 \frac{(1 \pm \hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_e)} \left(1 - \sqrt{1-\mathcal{J}} \right) \cdot \frac{E_m}{C} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$$

Como $\mathcal{J} \ll 1 \longrightarrow \sqrt{1-\mathcal{J}} \sim 1 - \frac{1}{2}\mathcal{J}$

Si dividimos las ecuaciones cinemáticas y adimensionalizamos $\hat{h} = \frac{h}{\sqrt{B_i E_m / C}}$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{\theta} \longrightarrow \frac{d\hat{x}}{d\hat{h}} = \frac{1}{\theta}; \quad d\hat{h} = \theta\, d\hat{x}; \quad \hat{h}_F = \theta \cdot \hat{x}_F$$

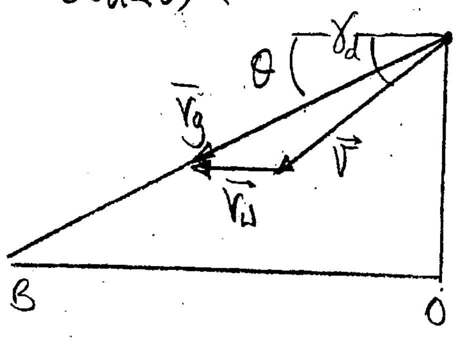
Por tanto:

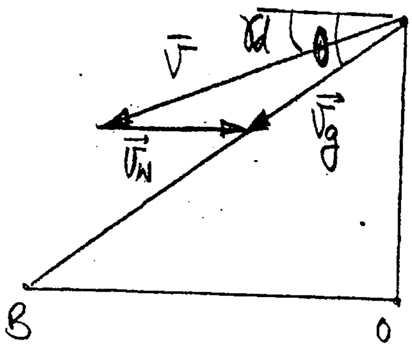
$$h_F = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\, \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\, \frac{E_m}{C}\, \frac{\cancel{(1 \pm \hat{V}_W)}}{(1+E_m \gamma_s)}\, \xi\, \frac{\gamma_s}{\cancel{(1 \pm \hat{V}_W)}}$$

$$\boxed{h_F = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\, \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\, \frac{E_m}{C} \cdot \frac{\gamma_s}{(1+E_m \gamma_s)}\, \xi}$$

PLANEO HASTA LA BASE (DESCENSO)

$(\gamma_d < 0)$ $(\theta < 0)$





$V_{gx} = V\cos\gamma_d + V_W$

$V_{gy} = V\sin\gamma_d$ (El signo va con el γ_d)

$$Tg\,\theta = \frac{V\sin\gamma_d}{V\cos\gamma_d + V_W} = \frac{\sin\gamma_d}{\cos\gamma_d + V_W/V} \sim \frac{\gamma_d}{1+\hat{V}_W}$$

$V_{gx} = V\cos\gamma_d - V_W$

$V_{gy} = V\sin\gamma_d$

$$Tg\,\theta \sim \frac{\gamma_d}{1-\hat{V}_W} \sim \theta$$

$- v_g$ $\rightarrow \dot{h} = v_g \theta$ (para $\theta \ll 1$)

ECUACIONES DINÁMICAS

$L - W\cos\gamma_d = 0 \;;\; L - W = 0$

$-D - W\sin\gamma_d = 0 \;;\; -D - W\gamma_d = 0$

ECUACIÓN DEL MOTOR

$\dot m + \varphi = 0 \longrightarrow \dot W + \cancel{\varphi} = 0$
$\quad\quad 0$

$m = cte.$

Adimensionalizando como en el apartado anterior tenemos:

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{h}} = \frac{1}{\theta} \longrightarrow d\hat{x} = \frac{1}{\theta}\, d\hat{h} \;;\quad \hat{x}_{F_2} = \frac{1}{\underbrace{\theta}_{<0}}(-\hat{h}_F) = \frac{1}{|\theta|}\hat{h}_F > 0$$

la altura $\hat{h}_F$ es la misma que para el caso de subida

$$\boxed{X_{F_2} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_s}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{Do}}}\cdot\frac{E_m}{C}\,\frac{\gamma_s}{(1+E_m\gamma_s)}\cdot\frac{1\mp\hat{V}_W}{|\gamma_d|}\,\int}$$

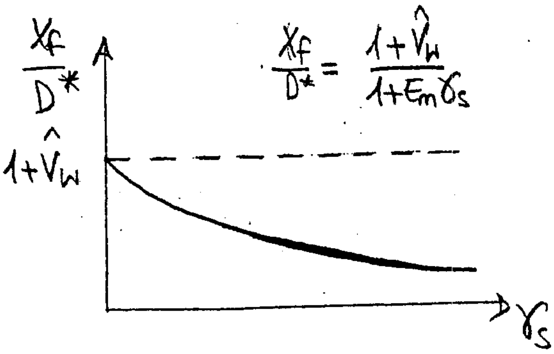
$\oplus$ Viento $O \to B$

$\ominus$ Viento $B \to O$

donde $\gamma_d = -\frac{D}{W} = -\frac{\hat{D}\cancel{W}}{\cancel{W}E_m} = -\frac{1}{E_m} \longrightarrow |\gamma_d| = \frac{1}{E_m}$

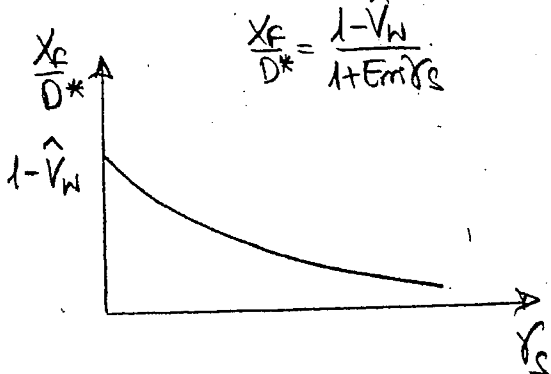
- Viento en sentido base-objetivo

$\frac{X_F}{D^*} = \frac{1+\hat{V}_W}{1+E_m\gamma_s}$

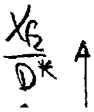


- Viento en sentido objetivo base

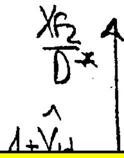
$\frac{X_F}{D^*} = \frac{1-\hat{V}_W}{1+E_m\gamma_s}$



$\frac{X_{F_2}}{D^*} = \frac{\gamma_s}{1+E_m\gamma_s}\cdot\frac{1-\hat{V}_W}{|\gamma_d|}$



$\frac{X_{F_2}}{D^*} = \frac{\gamma_s}{1+E_m\gamma_s}\cdot\frac{1+\hat{V}_W}{|\gamma_d|}$



$D^* = \sqrt{\frac{\ldots}{\rho_s}}\sqrt{\frac{\ldots}{C_{Do}}}\,\frac{\ldots}{C}\int$

2) Para garantizar la vuelta del avión a la base, situada a una distancia D del objetivo se debe de cumplir:

$$X_F = D$$

$$X_F - X_{F_2} = 0 \longrightarrow \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}\frac{1\pm\hat{V}_W}{1+\gamma_S E_m}\,\rho\left(1-\frac{1\mp\hat{V}_W}{1\pm\hat{V}_W}\gamma_S E_m\right)=0$$

$$1-\frac{1\mp\hat{V}_W}{1\pm\hat{V}_W}\gamma_S E_m = 0$$

* Viento Base-objetivo : $1-\frac{1-\hat{V}_W}{1+\hat{V}_W}\gamma_S E_m = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_S = \frac{1+\hat{V}_W}{1-\hat{V}_W}\cdot\frac{1}{E_m}}$

* Viento Objetivo-base : $\boxed{\gamma_S = \frac{1-\hat{V}_W}{1+\hat{V}_W}\cdot\frac{1}{E_m}}$

Sustituyendo γ_S en $X_F = D$

* Viento base objetivo : $D = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\cdot\frac{E_m}{c}\,\frac{(1-\hat{V}_W^2)}{2}\,\rho$

$$\boxed{\rho = \frac{2D}{(1-\hat{V}_W^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}}}$$

* Viento Objetivo base: $D = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}\frac{(1-\hat{V}_W^2)}{2}\,\rho$

3) Suponemos que el mes consta de 30 días

$$X_{VIENTO\ B\to O} = 15(X_f + X_{f_2}) = 15 \cdot \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}\left(1+\hat{V}_W+\gamma_s E_m(1-\hat{V}_W)\right)}$$

$$X_{VIENTO\ O\to B} = 15(X_f + X_{f_2}) = 15\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}\left(1-\hat{V}_W+\gamma_s E_m(1+\hat{V}_W)\right)}$$

$$X_{TOTAL} = X_{\substack{VIENTO\\B\to O}} + X_{\substack{VIENTO\\O\to B}} = 15\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}(2+2\gamma_s E_m)}$$

$$\boxed{X_{TOTAL} = 30\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\cdot\frac{E_m}{C}\varphi}} \neq f(V_W)$$

(No depende del V_W)

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09

E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

La figura adjunta representa un avión efectuando respecto al suelo un vuelo simétrico en el plano vertical, descompuesto en los tramos siguientes:

- AB y CD: Vuelo horizontal, rectilíneo y estacionario
- BC y DA: Vuelo vertical, rectilíneo y estacionario

Todo el vuelo se efectúa en presencia de un viento horizontal contenido en el plano vertical de módulo V_w constante y conocido, y con una velocidad respecto de tierra V_g asimismo constante y conocida, donde $V_w / V_g = \varepsilon << 1$. Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular: el peso es constante e igual a W; la superficie alar es S; los coeficientes de la polar parabólica son constantes conocidas; la curva del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, puede extenderse hasta las pérdidas positiva y negativa, y los coeficientes $C_{L0}, C_{L\alpha}$, $C_{L\max} > 0$ y $C_{L\min} < 0$ son constantes conocidas; etc.).

b) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y está siempre dirigido según el eje x_w.

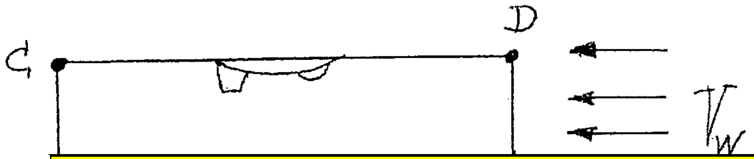
c) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) En los cuatro tramos, determinar los valores que tendría que imponer el piloto para T, α, y δ_e, en función de la velocidad respecto de tierra V_g, despreciando términos de orden superior a ε

2º) Determinar las velocidades mínimas respecto de tierra a las que es posible efectuar, por consideraciones de pérdida, los cuatro vuelos anteriores, despreciando términos de orden superior a ε, y compararlas entre sí.



TIEMPO CONCEDIDO: 1

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

La figura adjunta representa un avión efectuando respecto al suelo un vuelo simétrico en el plano vertical, descompuesto en los tramos siguientes:

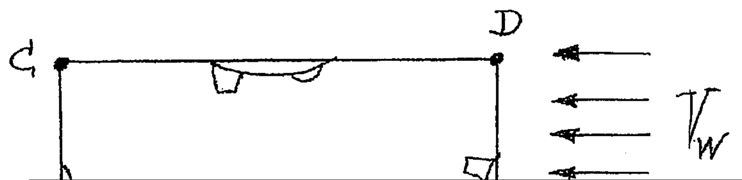
- AB y CD: Vuelo horizontal, rectilíneo y estacionario
- BC y DA: Vuelo vertical, rectilíneo y estacionario

Todo el vuelo se efectúa en presencia de un viento horizontal contenido en el plano vertical de módulo V_w constante y conocido, y con una velocidad respecto de tierra V_g asimismo constante y conocida, donde $V_w / V_g = \varepsilon << 1$. Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular: el peso es constante e igual a W; la superficie alar es S; los coeficientes de la polar parabólica son constantes conocidas; la curva del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, puede extenderse hasta las pérdidas positiva y negativa, y los coeficientes $C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\max} > 0$ y $C_{L\min} < 0$ son constantes conocidas; etc.).
b) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y está siempre dirigido según el eje x_w.
c) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.
d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) En los cuatro tramos, determinar los valores que tendría que imponer el piloto para T, α, y δ_e, en función de la velocidad respecto de tierra V_g, despreciando términos de orden superior a ε.
2º) Determinar las velocidades mínimas respecto de tierra a las que es posible efectuar, por consideraciones de pérdida, los cuatro vuelos anteriores, despreciando términos de orden superior a ε, y compararlas entre sí.

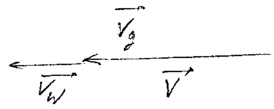


⑧

1) AE:

$T - D = 0$

$-L + W = 0$



$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$

$V_g = V + V_W \Rightarrow 1 = \frac{V}{V_g} + \varepsilon$

$V = (1-\varepsilon) V_g$

$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightsquigarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$

$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 \underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{1+\varepsilon^2-2\varepsilon}} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 (1-2\varepsilon)}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S (1-2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_g^2 (1-2\varepsilon)^2}\right] = \frac{1}{2}\rho S (1-2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_g^2 (1-4\varepsilon)}\right]}$$

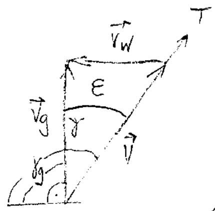
$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 (1-2\varepsilon)}\right)\right]}$$

BC: Subida $\gamma_g = \frac{\pi}{2}$

$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$; $T - D - W\cos\varepsilon = 0$

$-L + W\cos\gamma = 0$; $-L + W \operatorname{sen}\varepsilon = 0$



$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W}$

Pitágoras: $V_g^2 + V_W^2 = V^2$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{V_W}{V_g} = tg\,\varepsilon = \varepsilon$

$\operatorname{sen}\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\varepsilon$

$\cos\gamma = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{sen}\varepsilon$

$C_L = \frac{2W\operatorname{sen}\varepsilon}{\rho S (V_g^2 + W^2)} = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2}$

$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{T = W\cancel{\cos\varepsilon}^{1} + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2 \left(C_{D0} + \frac{4W^2 K\varepsilon^2}{\rho^2 S^2 V_g^4}\right) = W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D0}}$$

$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0$

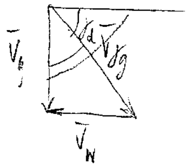
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S(1+2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{V_g^4\rho^2 S^2 C_d (1+4\varepsilon)}\right]}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{2W}{V_g^2\rho S C_{L\alpha}(1+2\varepsilon)}\right)\right]}$$

DA: Descenso $\gamma_g = \frac{\pi}{2}$

$T - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma = 0$

$-L + W\cos\gamma = 0$



$V_g^2 + V_w^2 = V^2 \rightarrow V^2 = V_g^2$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_d\right) = tg\,\varepsilon = \frac{V_w}{V_g} = \varepsilon$

$\mathrm{sen}\,\gamma_d = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_d\right) = \cos\varepsilon$

$\cos\gamma_d = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_d\right) = \mathrm{sen}\,\varepsilon$

$T - D + W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = 0 \;;\; T - D + W\cos\varepsilon = 0$

$-L + W\cos\gamma_d = 0 \;;\; -L + W\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = 0$

$$C_L = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2} \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{T = -W\cancel{\cos\varepsilon}^{\,1} + \frac{1}{2}\rho S V_g^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\varepsilon^2}{\rho^2 S^2 V_g^4}\right) = -W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D0}}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}\right)\right]}$$

2)

AB:

$$C_{LMAX} = \frac{2W}{\rho S V_S^2} \rightarrow V_S = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{LMAX}}} \rightarrow V_{MIN} = (1-\varepsilon)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{LMAX}}}$$

BC:

$$C_{Lmin} = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2} \rightarrow V_{MIN} = \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmin}}}$$

$\sqrt{\rho S C_{Lmin}}$

SEPTIEMBRE 2009

$$\varepsilon = \frac{V_W}{V_g}$$

1) AB $\quad V = V_g - V_W = V_g(1-\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1-2\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} T = D \\ L = W \end{array}\right\} \rightarrow \left\{ T = \frac{1}{2}(1-2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}(1+2\varepsilon) \right.$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1+2\varepsilon)$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(\alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1+2\varepsilon)\right)$$

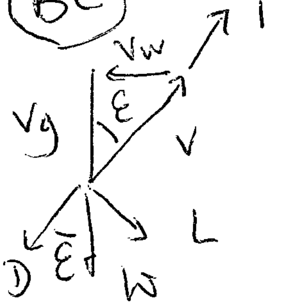
CD $\quad V = V_g + V_W = V_g(1+\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1+2\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} T = D \\ L = -W \end{array}\right\} \longrightarrow T = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}(1-2\varepsilon)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1-2\varepsilon)$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

BC

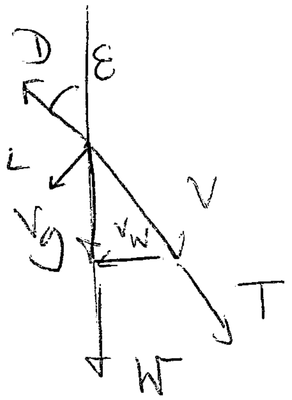


$$V^2 = V_g^2 + V_W^2 \Longrightarrow V^2 = V_g^2$$

$$\left.\begin{array}{l} T = D + W\cos\varepsilon \\ L + W\operatorname{sen}\varepsilon = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{ T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}\varepsilon^2 + W \right.$$

DA



$$T = D - W\cos\varepsilon$$

$$L + W\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}\varepsilon^2 - W$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

2)

$$V_{g\,AB\,min} = (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,max}}}$$

$$V_{g\,BC\,min} = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

$$V_{g\,CD\,min} = (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

$$V_{g\,DA\,min} = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

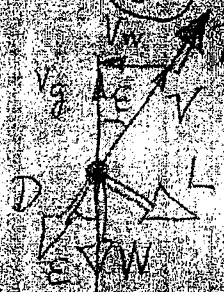
$$\frac{1+\varepsilon}{C_{L\,max}^{1/2}} < \frac{1-\varepsilon}{|C_{L\,min}|^{1/2}} \rightarrow V_{g\,BC\,min} = V_{g\,DA\,min} < V_{g\,AB\,min} < V_{g\,CD\,min}$$

$$\text{CD} \quad V = V_g + V_w = V_g(1+\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1+2\varepsilon)$$

$$\left.\begin{array}{l} T = D \\ L = W \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2 K W^2}{\rho S V_g^2}(1-2\varepsilon) \\ \alpha = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1-2\varepsilon) \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

BC

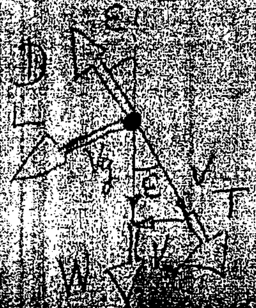


$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 \rightarrow V^2 = V_g^2$$

$$\left.\begin{array}{l} T = D + W\cos\varepsilon \\ L + W\sin\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \ldots W \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}} \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

DA



$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 \rightarrow V^2 = V_g^2$$

$$\left.\begin{array}{l} T = D - W\cos\varepsilon \\ L + W\sin\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \ldots W \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}} \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - E. Final Septiembre - A+B+CD 17.09.92

PROBLEMA 1º

Se pretende estudiar el vuelo simétrico, contenido en un plano vertical, con velocidad y ángulo de ataque constantes, y con γ despreciable, de un avión de transporte provisto de turborreactores.

Se supone además que:

a) Son conocidas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema. En concreto, su polar es de la forma $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$, siendo $C_{D_0} = (C_{D_0})_w + \frac{f_1}{S}$, donde son constantes conocidas k, $(C_{D_0})_w$ (coeficiente de resistencia parásita del ala) f_1 (área de la placa plana equivalente del fuselaje y los motores), y no es dato la superficie alar S.

b) El consumo específico de los motores, c, es constante y conocido.

Se pide:

1º) Determinar la ley de variación de ρ con W.

2º) A la vista de la expresión obtenida, extraer conclusiones cualitativas respecto a la consistencia de la hipótesis de γ despreciable.

3º) Determinar el valor de C_L que maximiza en cada instante el alcance específico, dx/dW, en función de C_{D_0} y de otros parámetros conocidos. Determinar asimismo el valor correspondiente de la velocidad de vuelo, suponiendo que el crucero se inicia a una altitud y un peso conocidos.

4º) Determinar el valor del alcance máximo en crucero, x_{max} (volando en las condiciones del apartado anterior), en función de C_{D_0}, S y demás parámetros conocidos, suponiendo que el peso al final del mismo es W_1.

5º) Determinar la superficie alar S que maximiza x_{max} y el valor correspondiente de $(x_{max})_{max}$.

$\boxed{17-9-1992}$ (PROBLEMA 1) E. FINAL SEPTIEMBRE A+B+CD)

- V y α constantes, γ despreciable.
- $C_D = C_{D0} + KC_L^2$; $C_{D0} = C_{D0})_W + \frac{f_1}{S}$, S NO es dato.
- $c =$ cte y conocido.

ESTÁ MAL XQ S ES INCÓGNITA

1) Si γ es despreciable $\rightarrow$ Vuelo es horizontal
Suponiendo vuelo estacionario:

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \; ; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot \underbrace{\alpha}_{\text{cte}} = \text{cte}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\rho = \frac{2W}{V^2 S C_L}} \quad (\rho \text{ es lineal con } W)$$

es incógnita

2) Adimensionalizamos la ecuación anterior y derivamos

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{2W_0}{\rho_0 S V^2 C_L}\, d\left(\frac{W}{W_0}\right) \rightarrow d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \simeq 1\, d\left(\frac{W}{W_0}\right)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \simeq \frac{\Delta W}{W_0} \; ,$$

Sabemos que $\Delta W \sim cT\Delta t \sim cT \cdot \frac{\Delta l}{V}$

$$\left(\frac{dW}{dt} = -cT\right)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \simeq c\,\frac{T}{W_0}\,\frac{\Delta l}{V}$$

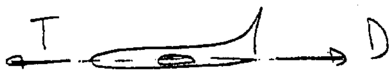
Como $c \sim 10^{-5}\, s^{-1}$
$T \sim \frac{t}{} \sim \frac{1}{}$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 10^{-8}\,\Delta l$$

En variaciones de distancia del orden de 1Km(10^3m), la

3)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V \\ h = cte \\ T - D = 0 \longrightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \\ \dot{W} + cT = 0 \longrightarrow \dfrac{dW}{dt} = -cT \longrightarrow \dfrac{dt}{dW} = -\dfrac{1}{cT} \end{cases}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dW} \cdot \frac{dW}{dt} = V \longrightarrow \frac{dx}{dW} = V \cdot \frac{dt}{dW} = -\frac{V}{cT}$$

Sustituyendo T en $\dfrac{dx}{dW}$:

$$\frac{dx}{dW} = -\frac{V}{c\frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)} = -\frac{C_L}{cW(C_{D0} + K C_L^2)} \cdot \sqrt{\frac{2W}{C_L \rho S}}$$

Además sabemos que $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S = \frac{W}{C_L}$

Si ahora hacemos:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dW}\right)}{dC_L} = \frac{d}{dC_L}\left(-\sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \cdot \frac{1}{cW} \cdot \frac{\sqrt{C_L}}{(C_{D0} + K C_L^2)} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{C_L}} (C_{D0} + K C_L^2) - \sqrt{C_L}\,(2 K C_L) = 0$$

$$(C_{D0} + K C_L^2) - 2C_L\,(2KC_L) = 0; \quad C_{D0} + KC_L^2 - 4KC_L^2 = 0$$

$$C_{D0} - 3KC_L^2 = 0 \longrightarrow \boxed{C_L = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}}$$

4) $$\frac{dx}{dW} = -\frac{a}{CW(C_{Do}+KC_L^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}$$

$$\int_0^{X_{MAX}} dx = X_{MAX} = \int_{W_i}^{W_1} -\frac{a}{C(C_{Do}+KC_L^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}\frac{dW}{W} = \frac{a}{C(C_{Do}+KC_L^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}$$

$$X_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\frac{C_{Do}}{K}}\cdot\frac{1}{C(C_{Do}+C_{Do}/3)}\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}$$

$$\boxed{X_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\frac{C_{Do}}{K}}\cdot\frac{3}{4C\cdot C_{Do}}\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}}$$

5) $$X_{MAX} = \underbrace{K\cdot}_{cte}\frac{\sqrt[4]{C_{Do}}}{C_{Do}}\cdot\frac{1}{\sqrt{S}} = K\cdot\sqrt[4]{C_{Do}^3}\,\frac{1}{\sqrt{S}}$$

Tenemos que $C_{Do} = C_{Do})_{L} + f_1/S$; $\frac{dC_{Do}}{dS} = -f_1/S^2$

$$\frac{dX_{MAX}}{dS} = K\frac{3}{4}C_{Do}^{-1/4}\frac{dC_{Do}}{dS}S^{-1/2} - \frac{1}{2}KC_{Do}^{3/4}S^{-3/2} =$$

$$= \frac{K}{2}C_{Do}^{3/4}S^{-3/2}\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{C_{Do}}f_1 S^{-1} + 1\right] = 0$$

2.

Sustituyendo en X_{MAX} : $\left(C_{B0} = C_{B0_W} + \frac{f_1}{S} = C_{B0_W} + \frac{\cancel{f_1}}{\frac{1}{2}\frac{\cancel{f_1}}{C_{B0_W}}} = C_{B0_W} + 2C_{B0_W} = 3C_{B0_W} \right)$

$$X_{MAX}\Big)_{MAX} = K \sqrt[4]{27 (C_{B0})_W} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{f_1}{C_{B0_W}}}}$$

$$\boxed{X_{MAX}\Big)_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3K}} \frac{3}{4C} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \ln \frac{W_i}{W_1} \sqrt[4]{27 C_{B0_W}} \cdot \sqrt{\frac{2C_{B0_W}}{f_1}}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.06.06

E. Final Junio "*Mecánica del Vuelo I*"

PROBLEMA 1°

Un avión de alta maniobrabilidad, provisto de turborreactores, efectúa una subida con resbalamiento nulo según una trayectoria helicoidal descrita sobre un cilindro de radio, R, constante y conocido, con ángulo de asiento de velocidad, γ, constante, conocido y no necesariamente pequeño, y con empuje de los motores, T_{max}, asimismo constante y conocido.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, las características aerodinámicas se conocen en unos ejes cuerpo genéricos, la polar es parabólica de coeficientes constantes, son despreciables las contribuciones de la deflexión del timón de profundidad y de la velocidad angular de cabeceo al coeficiente de sustentación, la fuerza aerodinámica lateral es despreciable, etc.).

b) El empuje de los motores está dirigido según el eje x_w y es lo suficientemente elevado como para que el avión siempre suba con aceleración positiva.

c) Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto el ángulo de ataque, no tienen por qué ser pequeños.

d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1°) Plantear en ejes viento el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2°) Determinar una expresión que permita obtener la velocidad de vuelo en función del tiempo (y, en caso de que sea necesario, de los grados de libertad matemáticos del sistema), suponiendo que el vuelo comience a una velocidad V_1 dada.

3°) Determinar el valor máximo del factor de carga, n_{max}, el valor máximo del ángulo de balance de velocidad, μ_{max}, y el valor mínimo del coeficiente de sustentación, C_{Lmin}, indicando claramente en qué puntos de la trayectoria helicoidal se producen.

4°) Determinar el ángulo de asiento, θ, en función del tiempo (y, en caso de que sea necesario, de los grados de libertad matemáticos del sistema).

(10)

1) $\gamma \equiv \text{DATO} >> 1$ $\quad \beta = 0 \quad \gamma \equiv \text{CTE} \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$

$T = T_{MAX} \equiv \text{DATO}$

$\mathcal{E}_{\delta_e} \cong 0$

$\mathcal{E}_{\hat{q}} \cong 0 \qquad \dot{x} = \frac{V}{R}\cos\gamma \quad (4)$

$Q \cong 0$

$\alpha << 1$

$$T_{MAX} - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$W\operatorname{sen}\mu\cos\gamma = \frac{W}{g}V\dot{x}\cos\mu\cos\gamma \quad (2)$$

$$-L + W\cos\mu\cos\gamma = -\frac{W}{g}V\dot{x}\operatorname{sen}\mu\cos\gamma \quad (3)$$

Ejes viento

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \mathcal{E} \quad (5)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + K C_L^2) \quad (6)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{\mathcal{E}_{\delta e}\delta_e}^{0} + \cancel{C_{L\hat{q}}\hat{q}}^{0} \quad (7)$$

Nº incógnitas: $D, V, \mu, \dot{x}, L, C_L, \alpha = 7$

Nº ecs: $= 7$ $\rightarrow \boxed{NGDL = 0}$

2) $\vec{b} = \cos\mu\,\vec{k_w} + \operatorname{sen}\mu\,\vec{j_w}$

$\vec{n} = \cos\mu\,\vec{j_w} - \operatorname{sen}\mu\,\vec{k_w}$

$\vec{i_w}$: (1) $\rightsquigarrow T - D - W\operatorname{sen}\gamma$ ...

$\vec{n}$) $W\cos\gamma\operatorname{sen}\mu\cos\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\cos^2\mu$ ... $\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma$ (II)

$W\cos\gamma\cos\mu\operatorname{sen}\mu - L\operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\operatorname{sen}\mu$ ...

$$(\text{II}) \rightarrow \cos\mu = \frac{\cos\gamma}{n} \longrightarrow \operatorname{sen}^2\mu = 1 - \cos^2\mu = 1 - \frac{\cos^2\gamma}{n^2}$$

$$(\text{III}) \rightarrow L^2 \operatorname{sen}^2\mu = \frac{W^2}{g^2}\cdot\frac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \longrightarrow n^2 \operatorname{sen}^2\mu = \frac{1}{g^2}\cdot\frac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \; ; \; n^2\left(1 - \frac{\cos^2\gamma}{n^2}\right) = \frac{1}{g^2}\cdot\frac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma$$

$$n^2 = \cos^2\gamma\left[1 + \left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]$$

$$\boxed{\int_{V_1}^{V_2} \frac{W \cdot dV}{g\left[T_{MAX} - W\operatorname{sen}\gamma - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2\cos^2\gamma\left[1 + \left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]W^2}{\rho V^2 S}\right]} = \int_{t_1}^{t_2} dt}$$

3) $n_{MAX} \Rightarrow V_{MAX}$ en V_2

$$\boxed{n_{MAX} = \sqrt{\cos^2\gamma\left[1 + \left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]}}$$

$$n_{MAX} \Rightarrow \cos\mu_{MIN} \longrightarrow \boxed{\mu_{MAX} = \operatorname{Arc}\cos\left[\frac{\cos\gamma}{n_{MAX}}\right]}$$

$$C_L = \frac{2nW}{\rho S V^2}$$

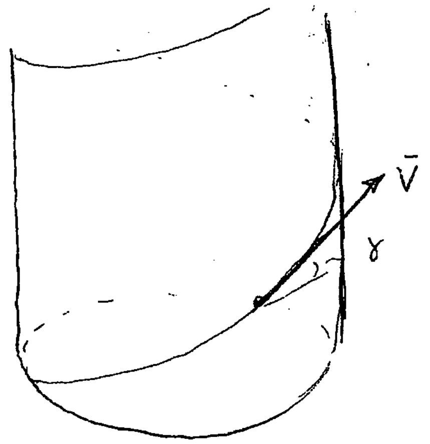
4) $\theta = \gamma + \alpha$

$\uparrow$

si $\theta \ll 1$, $\gamma \ll 1$; $\alpha \ll 1$

$$-\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\gamma - \alpha\cdot\cos\mu\cos\gamma \; , \quad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\gamma + \alpha\cdot\cos\mu\cos\gamma$$

$$\mu = \operatorname{Arc}\cos\left[\frac{\cos\gamma}{n}\right]$$



- $\beta = 0$ (enunciado)
- $\varepsilon = \nu = 0$ ($T \parallel x_w$)
- $Q = 0$ (consecuencia de $\beta = \varepsilon = \nu = 0$)
- $\alpha \ll 1$
- $\gamma = cte \rightarrow \dot{\gamma} = 0$
- $\dot{\chi} = \frac{V}{R}\cos\gamma$
- $T = cte$

1| Ecuaciones en ejes viento

$$\begin{array}{l} x_w \\ y_w \\ z_w \end{array} \left[\begin{array}{l} -W \operatorname{sen}\gamma + T - D = m\dot{V} \\ W\cos\gamma \operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g} V(\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu) \\ W\cos\gamma\cos\mu - L = -\frac{W}{g}V(\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu) \end{array} \right.$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)$$

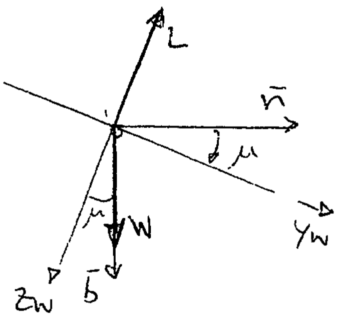
$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$\dot{\chi} = \frac{V}{R}\cos\gamma$$

- 6 ecuaciones
- D, V, μ, χ, L, C_L 6 var. dep

$\rightarrow$ NGL = 0

2| proyección de las ecs. según y_w y z_w sobre los ejes intrínsecos a la trayectoria



$$\begin{cases} \bar{b} = \cos\mu \bar{k}_w + \operatorname{sen}\mu \bar{j}_w \\ \bar{n} = \cos\mu \bar{j}_w - \operatorname{sen}\mu \bar{k}_w \end{cases}$$

$$\bar{i}_w : \boxed{-W\operatorname{sen}\gamma + T - D = m\dot{V}}$$

$\bar{b})$ $W\cos\gamma\cos^2\mu - L\cos\mu = -\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\operatorname{sen}\mu\cos\mu$ $\rightarrow \bar{b})$ $\boxed{L\cos\mu = W\cos\gamma}$

21-06-06

$$-W\operatorname{sen}\gamma + T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2n^2W^2}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

hay que buscar una relación $n = n(V)$

- $\cos\mu = \dfrac{\cos\gamma}{n} \rightarrow \operatorname{sen}^2\mu = 1-\cos^2\mu = 1-\dfrac{\cos^2\gamma}{n^2}$

- $L^2\operatorname{sen}^2\mu = \dfrac{W^2}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2\operatorname{sen}^2\mu = \dfrac{1}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2\left(1-\dfrac{\cos^2\gamma}{n^2}\right) = \dfrac{1}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow$

$$\rightarrow n^2 - \cos^2\gamma = \frac{1}{g^2}\frac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2 = \cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)$$

$$\rightarrow -W\operatorname{sen}\gamma + T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2\cos^2\gamma\, W^2\left(1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{g\left(\frac{T}{W} - \operatorname{sen}\gamma - \frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - \frac{2\cos^2\gamma\, W\left(1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}{\rho V^2 S}\right)}$$

3)

- $n^2 = \cos^2\gamma\left(1+\left(\dfrac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right) \rightarrow n^2$ es una función monótona creciente con V, luego $n_{max} \leftrightarrow V_{max}$. Como (según enunciado) T es tal que $\dfrac{dV}{dt} > 0$, V_{max} se alcanzará al final de la hélice, es decir, con V_2:

$$n|_{max} = \sqrt{\cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}$$

- $n|_{max} \leftrightarrow (\cos\mu)|_{min} \leftrightarrow \mu_{max}$: $\cos(\mu_{max}) = \dfrac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}}$

- $C_L = \dfrac{nW}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \xrightarrow{V^2 = \frac{gR}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\gamma}-1}} C_L = \dfrac{nW}{\frac{1}{2}\rho S \frac{gR}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\gamma}-1}}$

4) $\theta = \alpha + \gamma \xrightarrow{C_L = C_{L\alpha}\alpha + C_{L0}} \theta = \dfrac{C_L}{C_{L\alpha}} - \dfrac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \gamma \xrightarrow{C_L = C_L(V) = C_L(t)} \theta = \theta(t)$

C-190

TR.
Vuelo Sim.
en Plano Vertical.

PROBLEMA 7

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, realiza una maniobra definida como sigue:

a) la trayectoria del centro de gravedad es una circunferencia de radio R conocido, situada en un plano vertical

b) la trayectoria mencionada se describe con velocidad V_0 constante y conocida.

Suponiendo que se elige un sistema de ejes cuerpo en el que el eje x_b coincide con la dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria y que el empuje está dirigido según dicho eje, se pide:

No olvidar sacar C_{L0} y despejar bien

1°) Determinar el ángulo de ataque del avión en función del tiempo, suponiendo para ello que $T \operatorname{sen} \alpha$ es despreciable frente a las demás fuerzas del problema.

2°) Determinar la velocidad de cabeceo del avión en función del tiempo.

3°) Determinar el empuje y la deflexión del timón de profundidad que debe fijar el piloto en función del tiempo.

C-140

PROBLEMA 8 no lo he hecho

Según la teoría de Newton puede suponerse que las acciones aerodinámicas producidas por un flujo molecular libre sobre un elemento cualquiera de superficie de un obstáculo, son las expresadas en la Figura 1.

Utilizando la citada teoría determínese, en los distintos casos que puedan presentarse, $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y E_{max} para la cuña bidimensional representada en la Figura 2.

NOTA: Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

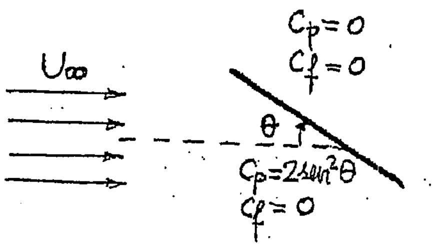


Figura 1

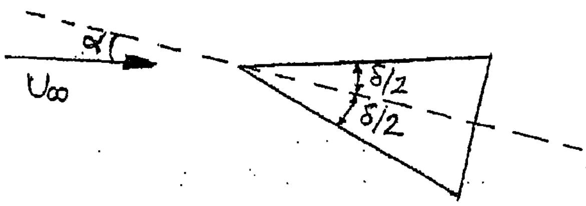


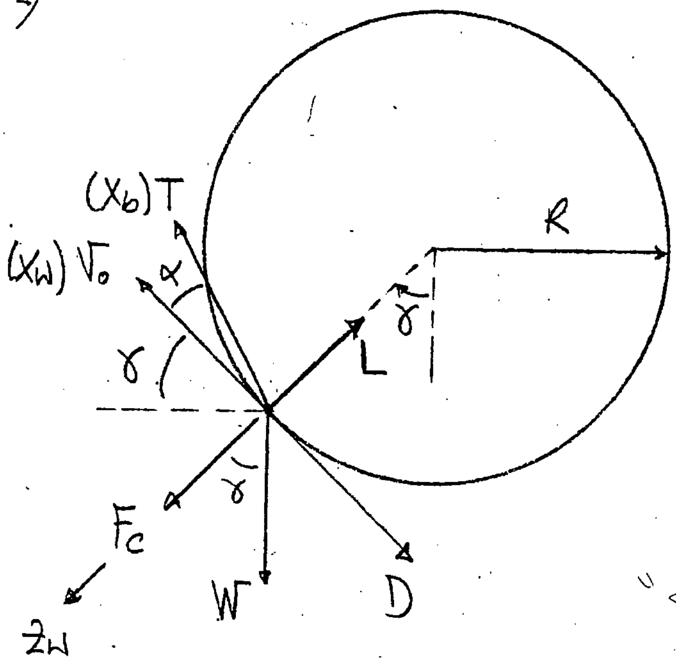
Figura 2

PROBLEMA 9 (13-11-1990)

problema 7

- R conocido.
- V_0 = constante y conocida
- $T \operatorname{sen}\alpha$ despreciable

1)



$$F_c = \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

- En $\gamma=0$: $x_b \parallel V_0 \longrightarrow \alpha=0$

$C_L = C_{L0} + \alpha C_{L\alpha}$

no es dato?

"se conocen características geométricas, aerodinámicas y másicas"

$\vec{i}_W)$ $T\cos\alpha - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0$ (1)

$\vec{k}_W)$ $-L - \cancel{T\operatorname{sen}\alpha} + W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R} = 0$ (2)

despreciable (según enunciado)

De (2)

$$L = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\, C_L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\,\alpha(t)) \quad (*)$$

En $\gamma=0 \rightarrow \alpha=0 \longrightarrow L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,(C_{L0} + \cancel{C_{L\alpha}\alpha(t)}) = W + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$

0

Por tanto : $C_{L0} = \left(W + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}\right)\cdot\frac{2}{\rho V_0^2 S}$

Trayectoria circular: $V_0 = \dot{\gamma} R \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{V_0}{R} \rightarrow \gamma(t) = \frac{V_0}{R} t$

Por tanto $\alpha(t)$ queda: $\boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \cdot \left(\cos\left(\frac{V_0}{R} t\right) - 1 \right)}$ ✓

2) Velocidad de cabeceo $\equiv \dot{\theta} = d\theta/dt$

$\theta \equiv$ Ángulo de asiento: Ángulo que forma el eje X_b con su proyección sobre el plano horizontal

$\boxed{\theta = \gamma + \alpha} \longrightarrow \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}$

* $\dot{\gamma} = V_0/R$
* $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right) \cdot \frac{V_0}{R} \right)$ ✓

Por tanto: $\boxed{\dot{\theta} = \frac{V_0}{R} \left(1 - \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right) \right)}$

3) T se calcula de la ecuación (1)

(1) $\rightarrow T = \frac{D + W \operatorname{sen}\gamma}{\cos\alpha}$

Sabemos: $D = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left(C_{D0} + K C_L^2 \right) = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left(C_{D0} + K (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 \right)$

deflexión timón profundidad

3) De la Teoría $\cancel{M_T}^{0} + M_A = I_y \dot{q} - (I_z - I_x) p r + J_{xz} (p^2 - r^2)$

Donde
$$\left| \begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta &&= 0 \\ q &= \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\phi &&= \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi &&= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\phi = \psi = \dot{\phi} = \dot{\psi} = 0 \\ &\theta \neq 0 ;\ \dot{\theta} \neq 0 \end{aligned} \right.$$

Por tanto queda: $M_A = I_y \dot{q} = I_y \ddot{\theta} = I_y (\cancel{\ddot{\gamma}}^{0} + \ddot{\alpha}) = I_y \ddot{\alpha}$

$M_A \equiv$ Momento de las fuerzas aerodinámicas en el centro de gravedad

$$M_A = \frac{1}{2} \rho V_0^2 S c \left(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_\delta} \delta_e + C_{m_q} \bar{q} \right)$$

$\bar{q}$ velocidad angular de cabeceo

Operando y despejando obtendremos $\longrightarrow$ $\delta_e(t)$

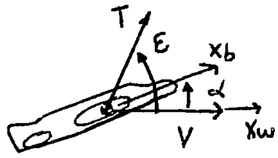
PROBLEMA 7 CLASE

Ec de movimiento curvo

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS, AERODINÁMICAS, MÁSICAS CONOCIDAS

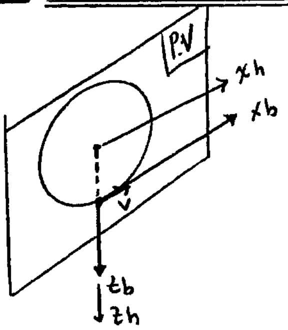
REALIZA MANIOBRA { · Trayectoria del centro de gravedad conocido, situado en el plano vertical
· Velocidad V_0 constante y conocida

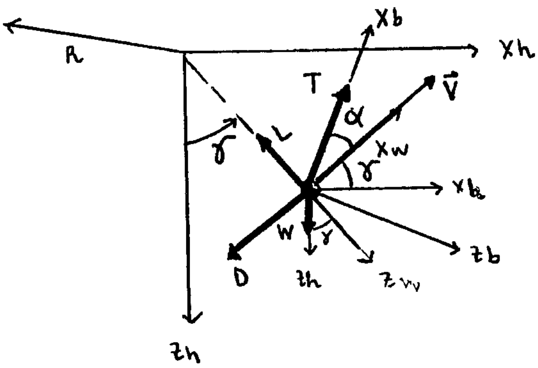
SISTEMA EJES CUERPO → { $X_b \equiv$ dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayect.
Empuje según X_b



1 DETERMINAR $\alpha = \alpha(T)$ con $T\,\text{sen}\,\alpha \ll$ resto de fuerzas

* VUELO SIMÉTRICO $\beta = 0$
* EMPUJE SEGÚN X_b $\quad \varepsilon = \alpha$





$$\vec{V} = \dot{\gamma} R \cdot \vec{i}_w$$
$$\vec{a} = -\dot{\gamma}^2 R\, \vec{k}_w$$

Dato $\vec{V} = V_0 = cte$ { $\cdot\ V_0 = \dot{\gamma} R$

$\cdot\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \dfrac{V_0}{R} \longrightarrow \gamma = \dfrac{V_0}{R} \cdot t + \gamma_0$

$\cdot$ En $t = 0$ $\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_0 = 0$

$\boxed{\gamma = \dfrac{V_0}{R} t}$ { $\vec{V} = \dfrac{V_0}{R} R\, \vec{i}_w$; $\vec{a} = -\dfrac{V_0^2}{R^2} \cdot R\, \vec{k}_w = -\dfrac{V_0^2}{R}\, \vec{k}_w$

EQUILIBRIO de FUERZAS $\quad \Sigma F = m \cdot \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{i}_w \equiv & T\cos\alpha - D - W\,\text{sen}\,\gamma = 0 \quad (1) \\ \vec{k}_w \equiv & -T\,\text{sen}\,\alpha - L + W\cos\gamma = -\dfrac{V_0^2}{R} \cdot \underbrace{m}_{W/g} \quad (2) \end{cases}$$

DATO del ENUNCIADO $T\,\text{sen}\,\alpha \ll L, W$

con { $L = \tfrac{1}{2}\rho S V_0^2 \cdot C_L \longrightarrow \boxed{C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha(t)}$
$D = \tfrac{1}{2}\rho S V_0^2 \cdot C_D$

Ec (2) $\quad L - W\cos\gamma - V_0^2/R\ \dfrac{W}{g} = 0$;

$\tfrac{1}{2}\rho V_0^2 S\,(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\,\alpha(t)) - W\cos\gamma - \dfrac{V_0^2}{R}\,\dfrac{W}{g} = 0$

Busco C_{L_0}: $\boxed{t = 0} \longrightarrow \gamma = 0$

En el punto + bajo X_b lleva dirección del vector velocidad | DATO $\rightarrow \alpha = 0$

$\square\ C_{L_0} - W - \dfrac{W}{g}\dfrac{V_0^2}{R} = 0$

$C_{L_0} = \dfrac{W - \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}}{\rho V_0^2 S \frac{1}{2}}$

*2 DETERMINAR $\gamma = \gamma(E, T/W, \varepsilon)$

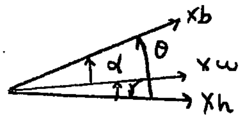
$$E = L/D = W/D$$

Ec (1): $T\cos\varepsilon - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0$

$$\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \frac{D}{W} - \operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow T/W\cos\varepsilon - 1/E = \operatorname{sen}\gamma$$

$$\boxed{\gamma = \operatorname{arcsen}\left[T/W\cos\varepsilon - 1/E\right]}$$

2 DETERMINAR VELOCIDAD de CABECEO del AVIÓN en $f(t)$



$$\theta = \alpha + \gamma \rightarrow \dot\theta = \dot\alpha + \dot\gamma$$

(p, q, r)

Velocidad de CABECEO $\equiv q = \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi$

$$\left.\begin{array}{l}\psi = 0\\ \phi = 0\end{array}\right\} \rightarrow q = \dot\theta = \dot\alpha + \dot\gamma$$

ALAS A NIVEL

$$q = \underbrace{\frac{2W\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right)\right)}{C_{L\alpha}\, S\rho\, V_0^2}\cdot\frac{V_0}{R}}_{\dot\alpha(t)} + \underbrace{\frac{V_0}{R}}_{\dot\gamma(t)}$$

$$\boxed{q = \frac{V_0}{R}\left[1 - \frac{2W\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right)}{C_{L\alpha}\, S\rho\, V_0^2}\right]}$$

3. EMPUJE Y DEFLEXIÓN de TIMÓN de PROFUNDIDAD en $f(t)$

$T(t)$:

Ec (1) $T\cdot\cos\varepsilon - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow \boxed{T = \dfrac{W\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right) - D}{\cos\alpha}}$

con $\alpha = \alpha(t)$ ya calculado

y $D = \underbrace{1/2\,\rho\, S V_0^2}\cdot C_D = \square\,(C_{D_0} + \underbrace{C_L^2}\cdot K)$

donde $C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha(t)$

con $\alpha(t)$ y C_{L_0} ya calculados).

$\delta_e(t)$: $\longrightarrow$ 2º Problema

Ec. de EQUILIBRIO de MOMENTOS

$$\cancel{M_T} + M_A = I_y\cdot\dot q + 0 + 0$$

0

$M_A = C_{m_{cg}}\cdot q_0\cdot S C = I_y\,\dot q$ donde $C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m\alpha}\,\alpha_{wb} + C_{m\delta}\cdot\delta_e$

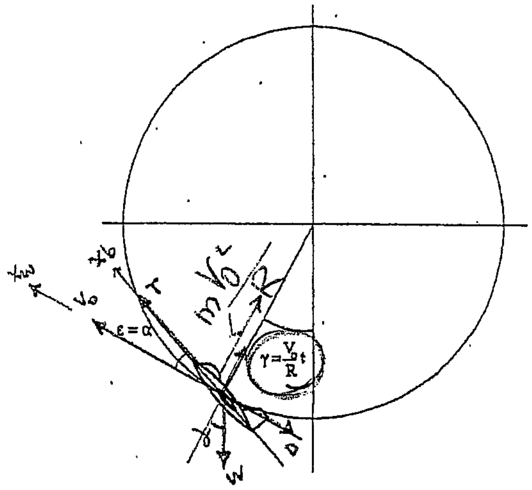
$$\dot q = \ddot\theta = \ddot\alpha + \cancel{\ddot\gamma} = -\left(\frac{V_0}{R}\right)^2\frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}}\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right)$$

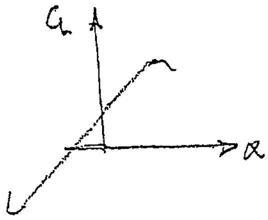
0

Así $\boxed{\delta_e = \dfrac{I_y\cdot\dot q}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S C} - \dfrac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \dfrac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha_{wb} = \delta_e(t)}$

G7

$q(\alpha) = q_0 + q_\alpha \alpha$





1. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento son las correspondientes al vuelo simétrico en un plano vertical (VSPV):

$$\begin{cases} T\cos\varepsilon - D - mg\sin\omega t = 0 & (m\dot{V}=0) \quad (1) \\ T\cancel{\sin}\varepsilon + L - m\left(g\cos\omega t + \omega V_0\right) = 0 & (mV\dot{\gamma} = mV_0 \cdot \frac{V_0}{R}) \quad (2) \end{cases}$$

siendo $\omega = \frac{V_0}{R}$. Puesto que se conocen las características aerodinámicas del avión, entre ellas C_{L0} y $C_{L\alpha}$, resulta que, como la componente del empuje perpendicualar a la velocidad aerodinámica no cuenta, la sustentación es

$$L = mg\cos\omega t + m\frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha\right)$$

El C_{L0}, que es el C_L para $\alpha = 0$, se obtiene a partir del equilibrio dinámico en el punto inferior de la circunferencia (se toma como referencia para α), ya que la sustentación debe compensar el peso y la aceleración centrífuga

$$L_{inf} = mg + m\frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{L0}$$

de modo que

$$mg\cos\omega t + m\frac{V_0^2}{R} == mg + +m\frac{V_0^2}{R} + \frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{L\alpha}\alpha$$

y, por tanto

$$\alpha = \frac{2mg\left(\cos\omega t - 1\right)}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} = -\frac{4mg}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}}\sin^2\left(\frac{V_0}{2R}t\right)$$

2. Ahora, por composición de movimientos, se tiene que el ángulo de asiento en función del tiempo es

$$q : \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} = \frac{V_0}{R} - \frac{2mg}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}}\frac{V_0}{R}\sin\left(\frac{V_0}{R}t\right) = \frac{V_0}{R}\left[1 - \frac{2mg}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}}\sin\left(\frac{V_0}{R}t\right)\right]$$

3. El empuje, sabiendo que, en el punto inferior de la trayectoria ha de ser

PROBLEMA 8

Según la teoría de Newton puede suponerse que las acciones aerodinámicas producidas por un flujo molecular libre sobre un elemento cualquiera de superficie de un obstáculo, son las expresadas en la Figura 1.

Utilizando la citada teoría determínese, en los distintos casos que puedan presentarse, $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y E_{max} para la cuña bidimensional representada en la Figura 2.

NOTA: Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

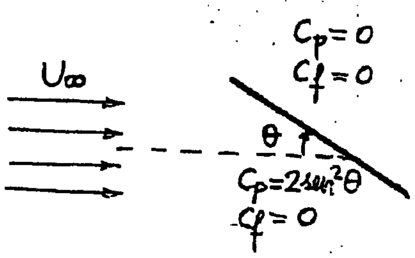


Figura 1

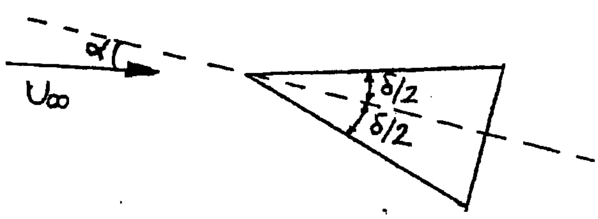


Figura 2

C-190

PROBLEMA 7

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, realiza una maniobra definida como sigue:

a) la trayectoria del centro de gravedad es una circunferencia de radio R conocido, situada en un plano vertical

b) la trayectoria mencionada se describe con velocidad V_0 constante y conocida.

Suponiendo que se elige un sistema de ejes cuerpo en el que el eje x_b coincide con la dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria y que el empuje está dirigido según dicho eje, se pide:

$\dot{\alpha} - \varepsilon = cte \rightarrow \alpha - \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon$

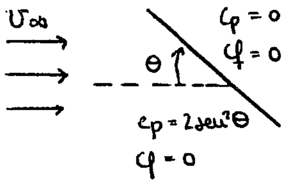
1°) Determinar el ángulo de ataque del avión en función del tiempo, suponiendo para ello que $T \operatorname{sen} \alpha$ es despreciable frente a las demás fuerzas del problema.

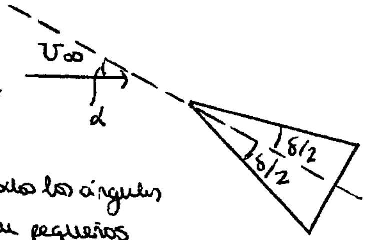
2°) Determinar la velocidad de cabeceo del avión en función del tiempo.

3°) Determinar el empuje y la deflexión del timón de profundidad que debe fijar el piloto en función del tiempo.

PROBLEMA 8 CLASE

TEORÍA de NEWTON

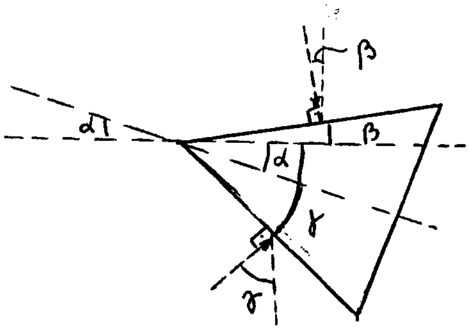




DETERMINAR PARA DIFERENTES CASOS $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y $E_{máx}$

Todos los ángulos son pequeños

CASO 1 $0 \leq \alpha \leq \delta/2$



$\beta = \frac{\delta}{2} - \alpha$

$\gamma = \frac{\delta}{2} + \alpha$

$c_p = 2 sen^2\theta$

$* \; C_L = \overbrace{C_{p_i} \cdot \cos\gamma - C_{p_e} \cdot \cos\beta}^{\text{dos sustentan distintas !!}} =$ ✓

✓ áng. pequeños

$= 2 sen^2\gamma \cos\gamma - 2 sen^2\beta \cos\beta \simeq$

$\simeq 2\gamma^2 - 2\beta^2 = 2\left[\left(\frac{\delta}{2}+\alpha\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2}-\alpha\right)^2\right]$

$\boxed{C_L = 2 \cdot 2\left[\frac{\delta}{2} \cdot \alpha \cdot 2\right] = 4\delta\alpha}$

$* \; C_d = \overbrace{C_{p_i} \cdot sen\,\gamma + C_{p_e} \cdot sen\,\beta}^{\text{los dos aportan resistencia !!}} = 2 sen^3\gamma - 2 sen^3\beta \simeq 2(\gamma^3 + \beta^3) =$

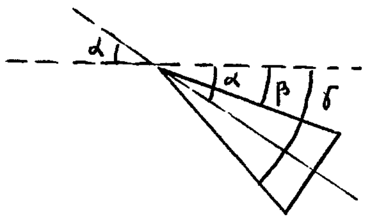
$= \ldots = \frac{\delta^3}{2} + \frac{3}{8\delta}(4\alpha\delta)^2$ donde

$C_{D_0} + K \cdot C_L^2$

$\boxed{\begin{array}{l} C_{D_0} = \delta^3/2 \\ K = 3/8\delta \\ C_L = 4\alpha\delta \end{array}}$

$* \; \boxed{E_{máx} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D_0} \cdot K}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\delta^3/2 \cdot 3/8\delta}} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\delta}}$

CASO 2 $\alpha \geq \delta/2$



$\gamma = \frac{\delta}{2} + \alpha$

La diferencia es que la corriente no impacta en el extradós.

$* \; \boxed{C_L = C_{p_i} \cdot \cos\gamma = 2 sen^2\gamma \cdot \cos\gamma \simeq 2\gamma^2 = 2\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2}$

$* \; \boxed{C_D = C_{p_i} \cdot sen\,\gamma = 2 sen^3\gamma \simeq 2\gamma^3 = 2\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^3 = C_L\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}$

G8

A primera vista se observa que existen dos casos claramente distinguibles:

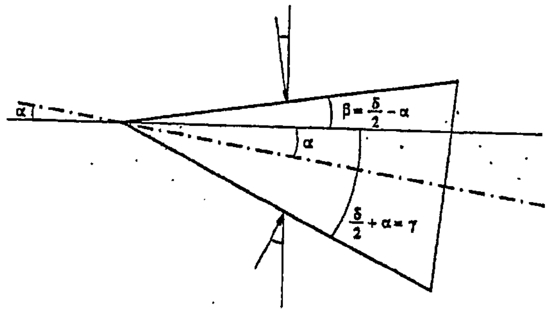
- $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\delta}{2}$

$$c_l = c_{pi}\cos\gamma - c_{pe}\cos\beta = 2\sin^2\gamma\cos\gamma - 2\sin^2\beta\cos\beta \simeq 2\left(\gamma^2-\beta^2\right) = 2\cdot\delta\cdot 2\alpha = 4\alpha\delta$$

$$\begin{aligned} c_d &= c_d = c_{pi}\sin\gamma + c_{pe}\sin\beta = 2\sin^3\gamma + 2\sin^3\beta \simeq 2\left(\gamma^3+\beta^3\right) = 2\left[\left(\tfrac{\delta}{2}+\alpha\right)^3 + \left(\tfrac{\delta}{2}-\alpha\right)^3\right] = \\ &= 4\left(\tfrac{\delta}{2}\right)^3 + 6\alpha^2\delta = \tfrac{\delta^3}{2} + \tfrac{3}{8\delta}\left(4\alpha\delta\right)^2 = C_{D0} + kC_L^2 \end{aligned}$$

La E_{max} se obtiene derivando con respecto a α e igualando a 0, para así obtener el resultado correspondiente al caso de polar parabólica de coeficientes constantes:

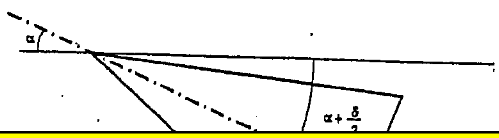
$$E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\delta^3}{2}\cdot\frac{3}{8\delta}}} = \frac{2}{\sqrt{3\delta^2}} = \frac{2}{\delta\sqrt{3}}$$



- $\alpha \geq \dfrac{\delta}{2}$

$$c_l = c_{pi}\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) = 2\sin^2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) \simeq 2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^2 = 2\left(\alpha^2+\frac{\delta^2}{4}+\alpha\delta\right)$$

$$c_d = c_{pi}\sin\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) = 2\sin^3\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) \simeq 2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^3 = 2\left(\alpha^3+\left(\frac{\delta}{2}\right)^3+3\alpha^2\frac{\delta}{2}+3\alpha\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)$$



C-153

PROBLEMA 11

Un avión está efectuando un vuelo simétrico en un plano vertical descompuesto en los siguientes tramos (ver Figura 1):

Tramo AB: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Tramo BC: Vuelo en maniobra, con velocidad V y radio de curvatura R_1 constante

Tramo CD: Vuelo en maniobra, con velocidad V y radio de curvatura R_2 constante

Tramo DE: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Suponiendo además que:

a) Son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En concreto: el coeficiente de sustentación del avión completo es una función lineal del ángulo de ataque, entre los valores $C_{L_{MAX}}$ y $C_{L_{MIN}}$, y es independiente de las deflexiones del timón de profundidad (ver Figura 2); la polar es parabólica con coeficientes constantes.

b) El empuje de los motores T está siempre dirigido según el eje x_w.

c) La velocidad de vuelo V es constante y conocida en todo el problema.

d) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

e) Se consideran constantes conocidas durante todo el vuelo el peso del avión W, la densidad atmosférica ρ y la aceleración de la gravedad g.

Se pide:

1º) En el tramo BC:

1.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, R_{1MIN}, que puede conseguir el avión

1.2) Para la condición de 1.1, determinar la evolución con el tiempo de α, δ_e, T

2º) En el tramo CD:

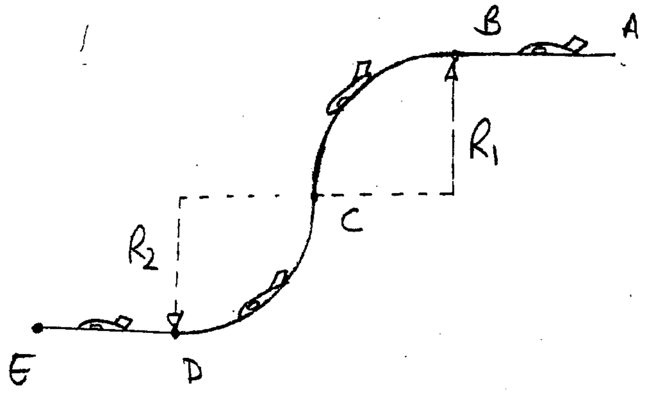
2.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, R_{2MIN}, que puede conseguir el avión

2.2) Para la condición de 2.1, determinar la evolución con el tiempo de α, δ_e, T

3º) Comparar los valores de R_{1MIN} y R_{2MIN} para las distintas velocidades de vuelo.

PROBLEMA 10 (13-11-1990) problema 11

Vuelo simétrico en un plano vertical : $y_e = cte$; $\nu = \beta = 0 \rightarrow \chi = \mu = 0$
$(Q = 0)$



AB: Horizontal, rectilíneo, estacionario
BC: Maniobra, V, $R_1 = cte$
CD: Maniobra, V, $R_2 = cte$
DE: Horizontal, rectilíneo, estacionario

$V = cte$

$C_L = \cancel{C_{L0}} + C_{L\alpha} \cdot \alpha$ → 0 (GRÁFICA DEL ENUNCIADO)

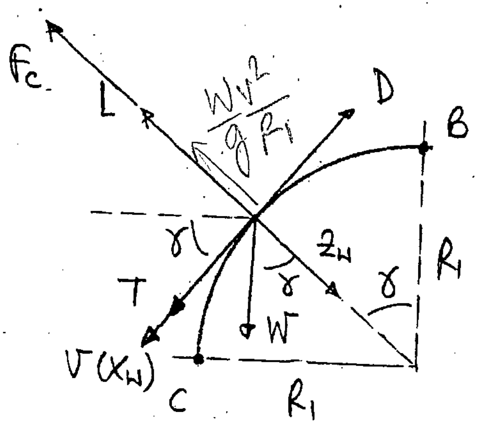
$C_D = C_{D0} + K C_L^2$

$T \parallel X_W$

W, ρ, g, V conocidas y constantes

1)

1.1)



$$F_c = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R_1}$$

$$\vec{i}_W)\quad T - D + W \operatorname{sen}\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{k}_W)\quad -L - \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} + W \cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

Sabemos que :

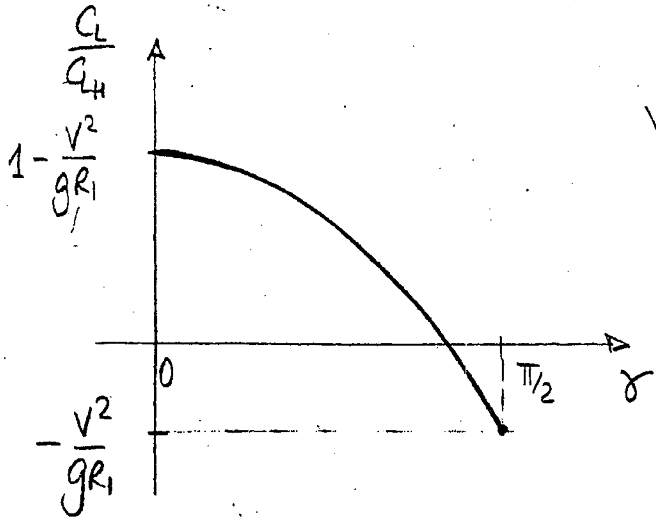
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (\cancel{C_{L0}} + C_{L\alpha}\alpha)$$ → 0

De (2) $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = -\frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} + W\cos\gamma$

C_L HORIZONTAL $\left(L = W \rightarrow C_{LH} = \frac{\quad}{\rho V^2 S}\right)$

Vamos a dibujar la función $\frac{C_L}{C_{LH}} = \cos\gamma - \frac{V^2}{gR_1}$ para $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$



Vemos que $C_{L_{min}}$ para $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Para $\gamma = \frac{\pi}{2} \longrightarrow C_{L_{min}} = \frac{2W}{\rho \cancel{V_0^2} S}\left(-\frac{\cancel{V_0^2}}{gR_{1_{min}}}\right) \longrightarrow \boxed{R_{1_{min}} = -\frac{2W}{g\rho S \underbrace{C_{L_{min}}}_{<0}}} > 0$

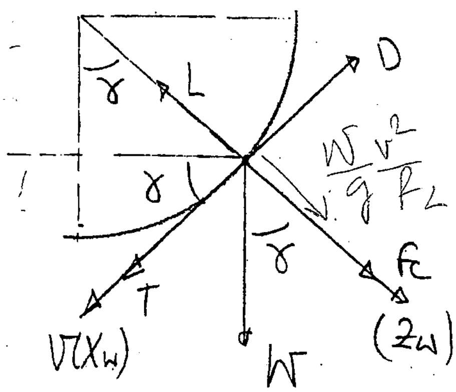
1.2) $V = cte = \dot{\gamma} R_1 \longrightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{V}{R_1} \longrightarrow \gamma = \frac{V}{R_{1_{min}}} t$

$$C_L = C_{L\alpha}\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma - \frac{V^2}{gR_{1_{min}}}\right) \longrightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\left(\cos\left(\frac{Vt}{R_{1_{min}}}\right) - \frac{V^2}{gR_{1_{min}}}\right)}$$

De la ecuación (1): $T = D - W\sin\gamma = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) - W\sin\gamma$

$$T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\left(\frac{Vt}{R_{1_{min}}}\right) - \frac{V^2}{gR_{1_{min}}}\right)\right)^2\right] - W\sin\left(\frac{Vt}{R_{1_{min}}}\right)$$

2) 2.1)



$F_c = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2}$ ✓

$\vec{i_w})\quad T - D + W\sin\gamma = 0 \quad (1)$

$\vec{k_w})\quad W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2} - L = 0 \quad (2)$

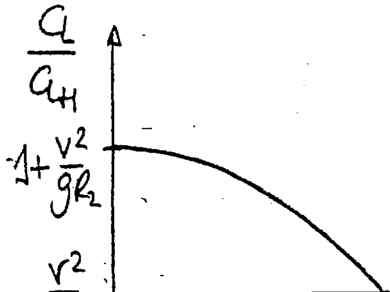
Sabemos que: $\begin{cases} D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0} + K C_L^2) \\ L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\cancel{C_{L_0}} + C_{L\alpha}\alpha) \end{cases}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0$

De (2) $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2}$

$\hookrightarrow C_L = \underbrace{\frac{2W}{\rho V^2 S}}_{C_{L\,HORIZONTAL}}\left(\cos\gamma + \frac{V^2}{gR_2}\right)$; Aquí se ve que si $R_2\downarrow$ $C_L\uparrow$
(El límite inferior de R_2 lo marcará $C_{L_{MAX}}$)

Si dibujamos $\frac{C_L}{C_{L_H}} = \cos\gamma + \frac{V^2}{gR_2}$ para $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$



Vemos que $C_{L_{MAX}}$ para $\gamma = 0$

$C_{L_{MAX}} = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(1 + \frac{V^2}{gR_2}\right)$

2.2) $v = \frac{d\ell}{dt} = \dot{\gamma}^* R_2$ donde $\gamma^* = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$\hookrightarrow \underbrace{v = -\dot{\gamma} R_2}_{\gamma \text{ va decreciendo}} = -\frac{d\gamma}{dt} R_2 \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{v}{R_{2min}}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\gamma = -\frac{v}{R_{2min}} t \rightarrow \left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{vt}{R_{2min}} \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R_{2min}}$$

Sabemos que: $C_L = C_{L\alpha}\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2}\left(\cos\gamma + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)$

$$\hookrightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Vt}{R_{2min}}\right) + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)}$$

De la ecuación (1): $T = D - W\sin\gamma = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_L^2) - W\sin\gamma$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Vt}{R_{2min}}\right) + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)\right)^2\right) - W\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Vt}{R_{2min}}\right)}$$

3) * Se puede observar que R_{1min} es independiente de la velocidad de vuelo del avión!

* También se ve que R_{2min} depende de la velocidad de vuelo (V)

C-153

TR
Vuelo Sim.
en Plano Vertical.

PROBLEMA 11

Un avión está efectuando un vuelo simétrico en un plano vertical descompuesto en los siguientes tramos (ver Figura 1):

Tramo AB: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Tramo BC: Vuelo en maniobra, con velocidad V y radio de curvatura R_1 constante

Tramo CD: Vuelo en maniobra, con velocidad V y radio de curvatura R_2 constante

Tramo DE: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Suponiendo además que:

a) Son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En concreto: el coeficiente de sustentación del avión completo es una función lineal del ángulo de ataque, entre los valores $C_{L_{MAX}}$ y $C_{L_{MIN}}$, y es independiente de las deflexiones del timón de profundidad (ver Figura 2); la polar es parabólica con coeficientes constantes.

b) El empuje de los motores T está siempre dirigido según el eje x_w.

c) La velocidad de vuelo V es constante y conocida en todo el problema.

d) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

e) Se consideran constantes conocidas durante todo el vuelo el peso del avión W, la densidad atmosférica ρ y la aceleración de la gravedad g.

Se pide:

1º) En el tramo BC:

1.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, R_{1MIN}, que puede conseguir el avión

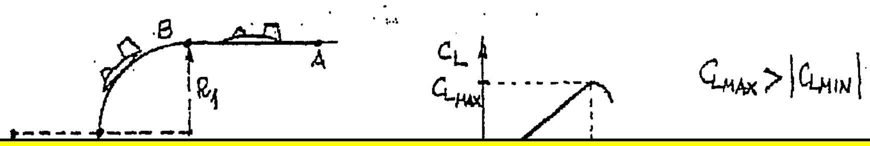
1.2) Para la condición de 1.1, determinar la evolución con el tiempo de α, δ_e, T

2º) En el tramo CD:

2.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, R_{2MIN}, que puede conseguir el avión

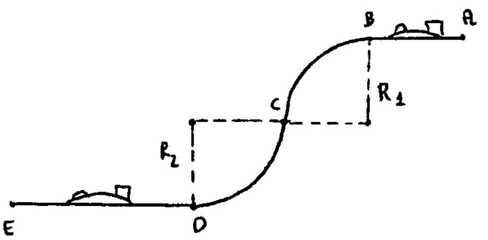
2.2) Para la condición de 2.1, determinar la evolución con el tiempo de α, δ_e, T

3º) Comparar los valores de R_{1MIN} y R_{2MIN} para las distintas velocidades de vuelo.



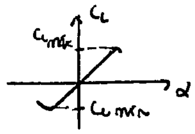
PROBLEMA 11 CLASE

AVIÓN VUELO SIMÉT. en el PLANO VERTICAL



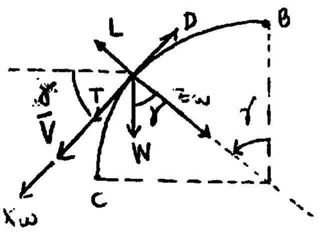
- TRAMO AB : VUELO HORIZONTAL, rectilíneo, estacionario ≡ DE
- TRAMO BC : Maniobra a $V=cte$ $R_1=cte$
- TRAMO CD : Maniobra a $V=cte$ $R_2=cte$

- Conocidas características geom, aerod, másicas. → $C_L = f$. lineal de α
- Polar parabólica
- Empuje de los motores según el x_w $\boxed{\varepsilon = \nu = 0}$
- V constante y conocida
- Transiciones entre tramos despreciables
- W, ρ, g dato



$C_{Lmax} > |C_{Lmin}|$

1.1 TRAMO BC : R_{1min}



$$\left\{\begin{array}{l} \vec{V} = R\dot{\gamma}\,\vec{i}_w \longrightarrow \underline{\dot{\gamma} = \frac{V}{R} = cte} \\ \vec{a} = \dot{\gamma}^2 R\,\vec{k}_w \end{array}\right.$$

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} \quad \left\{\begin{array}{ll} \vec{i}_w: & T - D + W\cdot\operatorname{sen}\gamma = 0 \quad (1) \\ \vec{k}_w: & -L + W\cos\gamma = m\dot{\gamma}^2 R = \frac{V^2}{R}\frac{W}{g} \; ; \quad (2) \end{array}\right.$$

En (2) $\quad L = W\left[\cos\gamma - \frac{V^2}{Rg}\right]$; $\longrightarrow n = \frac{L}{W} = \cos\gamma - \frac{V^2}{Rg}$;

- En el punto B $\gamma = 0 \longrightarrow n = 1 - \frac{V^2}{gR_1}$
- En el punto $\gamma = \pi/4 \longrightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{2} - V^2/gR_1$
- En el punto C $\gamma = \pi/2 \rightarrow n = 0 - V^2/gR_1 \longrightarrow$ sustentación NEGATIVA !!!

FACTOR de CARGA MÍNIMO → para una V dada y una S dada, el mayor valor que puedo tener de sustentación viene dado por C_{Lmin} ⟶ PUNTO MÁS CRÍTICO es el PUNTO C

$$n = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 C_L}{W} = \cos\gamma - \frac{V^2}{Rg}$$

En C → $\cos\gamma = 0$ $\quad \frac{\rho S \cancel{V^2} C_L}{2W} = \frac{-\cancel{V^2}}{gR}$ ← no puede ser radio de curvatura negativo !!

$$\boxed{R_{min} = -\frac{2W}{\rho S g\, C_{Lmin}} = \frac{2W}{\rho S g\,|C_{Lmin}|}}$$

Para la condición de 1.1.

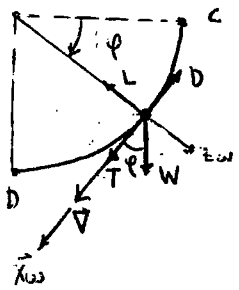
1.2 EVOLUCIÓN con el TIEMPO de α, δ_e, T

$* \; L = -\frac{W V^2}{...} ... \cos\gamma ...] \quad \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\underbrace{C_{L0}}_{=0\ (\text{de la figura})} + C_{L\alpha}\,\alpha(t)) = W\cos\left(\frac{V}{R_{min}}t\right) - \frac{W\cdot V^2}{g}\cdot\frac{\rho S g|C_{Lmin}|}{2W}$

vuelo simétrico

Así $\boxed{\delta_e(t) = ...}$

2.1 TRAMO CD : R_{2min}



$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_g$

$\vec{V} = \dot{\varphi} R_2 \vec{i}_w$

$\vec{a} = -\dot{\varphi}^2 R_2 \vec{k}_w$

$\dot{\varphi} R_2 = V$

$\dot{\varphi} = \frac{V}{R_2} = cte \rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$\boxed{\varphi = \frac{V}{R_2} t}$

$$\begin{cases} \vec{i}_w : T - D + W \cos\varphi = 0 \\ \vec{k}_w : W \operatorname{sen}\varphi - L = -\frac{V^2}{R_2} \frac{W}{g} \end{cases}$$

$$n = \frac{L}{W} = \operatorname{sen}\varphi + \frac{V^2}{g R_2} \begin{cases} \varphi_c = 0 \rightarrow n = V^2/g R_2 \\ \varphi_{\pi/4} = \pi/4 \rightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{2} + V^2/g R_2 \\ \varphi_D = \pi/2 \rightarrow n = 1 + V^2/g R_2 \end{cases}$$

Al aumentar φ tb lo hace el factor de carga n

$n_{min} = n_c$

En C: $n = \frac{1/2 \rho V^2 S C_L}{W} = V^2/g R_2$

$$\boxed{R_{2\,min} = \frac{2W}{\rho S g\, C_{L\,máx}}}$$

2.2 PARA R_{2min} $\alpha(t)$ $\delta_E(t)$ $T(t)$

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}\rho V^2 [C_{L\alpha}\, \alpha(t)] S = W\left[\operatorname{sen}\left[\frac{V}{R_2} t\right] + \frac{V^2\, \rho S \cancel{g} C_{L\,máx}}{\cancel{g}\, 2W}\right] \rightarrow \alpha(t) = \ldots \\ T = D - W\cos\varphi = \frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot [C_{D_0} + K \cdot [C_{L\alpha} \cdot \alpha(t)]^2] - W\cos\left(\frac{V}{R_2} t\right) = \ldots = T(t) \\ M = \frac{1}{2}\rho V^2 S_c \left(C_{m_0} + C_{m\alpha}\, \alpha(t) + C_{m\delta} \cdot \delta_E(t) + C_{mq} \cdot q \right) = I_y \dot{q} \longrightarrow \delta_E(t) = \ldots \end{cases}$$

$\dot{q} = \ddot{\theta} = \ddot{\alpha}(t)$

3 COMPARAR R_{2min} y R_{1min} PARA DIFERENTES VELOC. de VUELO

? $\left.\begin{matrix} R_{1min} \\ R_{2min} \end{matrix}\right\}$ no son función de la $\vec{V}$ $\longrightarrow$ Además como $C_{Lmáx} > |C_{Lmín}|$

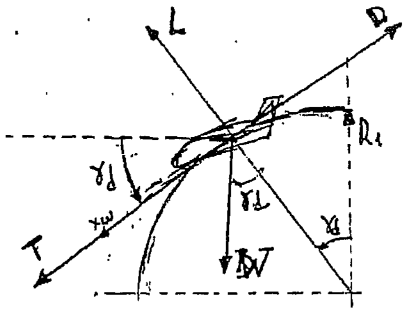
$\underline{R_{1min} > R_{2min}}$

PROBLEMA 11

T según eje x_w :

$V = cte$

1) · Tramo BC



$\dot{\gamma}_d = \frac{V}{R_1} \longrightarrow \gamma_d = \frac{V}{R_1} t$

Ojo positivo (que desciendes)

$$\begin{cases} T - D + W \operatorname{sen}\gamma_d = +\frac{W}{g}\cancel{\frac{dV}{dt}} \quad \circ\ (V=cte) \\ -L + W\cos\gamma_d = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R_1} \end{cases}$$

· $-L + W\cos\gamma_d = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} \Longrightarrow -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_L + W\cos\gamma_d = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma_d - \frac{V^2}{gR_1}\right)}$$

\# para cada R_1, como $\gamma_d \in [0, \frac{\pi}{2}]$; el C_L va disminuyendo haciéndose cada vez + negativo. ⟶ la situación + crítica se da en $\gamma_d = \frac{\pi}{2}$

\# para $\gamma_d = \frac{\pi}{2}$: $C_L = -\frac{2W}{\rho V^2 S}\cdot\frac{V^2}{gR_1} \longrightarrow \boxed{R_{1\,min} = -\frac{2W}{\rho V^2 S}\cdot\frac{V^2}{g\, C_{L_{MIN}}}}$ $C_{L_{MIN}} < 0$

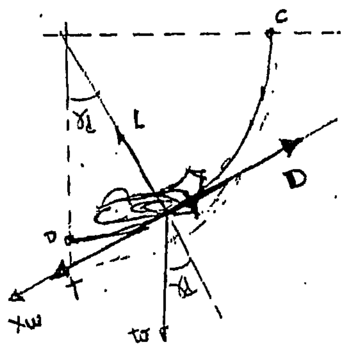
(ya que $C_{L_{MIN}}$ es el valor negativo de C_L con

donde $\gamma_d = \frac{V}{R_1} t$

- $T = D - W \operatorname{sen}\gamma_d = \boxed{\frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) - W \operatorname{sen}\gamma_d = T]_{R_{min}}}$

donde $C_L(t) = C_{L_0} + \alpha(t)_{R_{min}} \cdot C_{L\alpha}$; $\gamma_d = \frac{V}{R_{min}} t$

2) Tramo **CD**



- $\gamma_d = \frac{\pi}{2} - \frac{V}{R_2} t \longrightarrow \dot{\gamma}_d = -\frac{V}{R_2}$

- $\begin{cases} T - D + W \operatorname{sen}\gamma_d = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \overset{(V = cte)}{=} 0 & [1] \\ -L + W \cos\gamma_d = -\frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2} & [2] \end{cases}$

- De [2] : $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\frac{V^2}{g R_2} + \cos\gamma_d\right) = \underbrace{C_{L_H}}_{C_L \text{ en vuelo horizontal } (L=W)}\left(\frac{V^2}{g R_2} + \cos\gamma_d\right)$

- Luego; el C_L va disminuyendo con valor positivo ya que $\gamma_d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para cada R_2
→ la situación de máximo para C_L (para cada R_2) se dará para $\gamma_d = 0$:

$$C_{L_{max}} = \left(\frac{V^2}{g R_{2_{min}}} + 1\right) \cdot C_{L_H} \longrightarrow \boxed{R_{2_{min}} = \frac{V^2}{g\left(\frac{\rho V^2 S C_{L_{max}}}{2W} - 1\right)}}$$

3)

: R_{min} independiente de V

... de perdida en vuelo horizontal rectilíneo

$g R_1$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 29.04.08

CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ (V_{w0} y k_w son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).
b) El empuje del motor es paralelo al eje x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
d) ρ y g son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

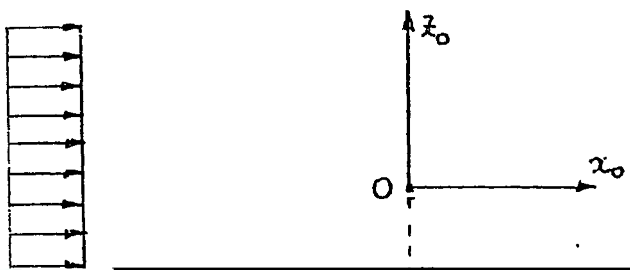
Se pide:

1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra x_0,z_0 de la figura.

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4º) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 07.05.10

CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ (V_{w0} y k_w son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).
b) El empuje del motor es paralelo al eje x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
d) ρ y g son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

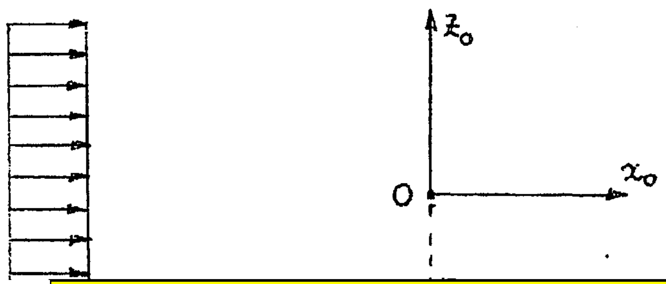
Se pide:

1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra x_0,z_0 de la figura.

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

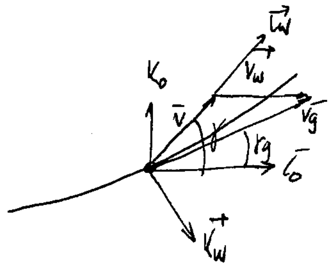
3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4º) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.



1) Empuje según $\vec{x_b} \Rightarrow \alpha = \varepsilon$

$$\dot\gamma = \frac{V}{R} = cte \Rightarrow \gamma = \frac{V}{R}t \; ; \; \ddot\gamma = 0$$



$$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w} = (V\cos\gamma + V_{w0} + K_w t)\,\vec{i_0} + V\sin\gamma\,\vec{k_0}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = K_w\,\vec{i_0} = K_w\cos\gamma\,\vec{i_w} + K_w\sin\gamma\,\vec{k_w}$$

$$\vec{i_0} = \cos\gamma\,\vec{i_w} + \sin\gamma\,\vec{k_w}$$

$$\frac{dx_0}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma + V_{w0} + K_w t \; ; \; \boxed{x_0 = \int_0^t \left(V\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + V_{w0} + K_w t\right)dt = R\sin\frac{Vt}{R} + V_{w0}t + \frac{K_w t^2}{2}}$$

$$\frac{dz_0}{dt} = V_g\sin\gamma_g = V\sin\gamma \; ; \; \int_{-R}^{z_0} dz_0 = \int_0^t V\sin\frac{Vt}{R}\,dt \; ; \; \boxed{z_0 = -R\cos\frac{Vt}{R}}$$

2)

$$T - D - W\sin\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \rightarrow \boxed{T - D - W\sin\gamma = \frac{W}{g}\cdot K_w\cos\gamma \quad (I)}$$

$$-\underset{\substack{\downarrow \\ 0\,(\text{enunciado})}}{T\alpha} - L + W\cos\gamma = \frac{-W}{g}\cdot V\cdot\frac{d\gamma}{dt} \rightarrow -L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\cdot K_w\sin\gamma - \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} \quad (II)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (III)$$

3)

$$(II) \rightarrow L = W\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} - \frac{W}{g}K_w\sin\left(\frac{V}{R}t\right)$$

$$C_L = C_{L\alpha}\,\alpha$$

$$(III) \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}\left[W\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} - \frac{W}{g}K_w\sin\left(\frac{V}{R}t\right)\right]}$$

$$\boxed{n = \frac{L}{W} = \cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{V^2}{gR} - \frac{K_w}{g}\sin\left(\frac{V}{R}t\right)}$$

$$t = \frac{\pi R}{V} \Rightarrow \boxed{n = -1 + \frac{V^2}{gR} = n_{min}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{n\,min} = \pi}$$

7

Ingenieros Aeronáuticos
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H6: 25-06-97

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ (c_w es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

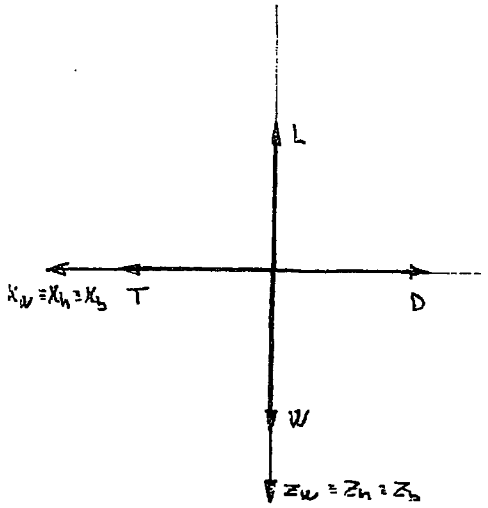
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{L_q} = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- ρ y g son constantes conocidas y $V > V_w$.

Se pide:

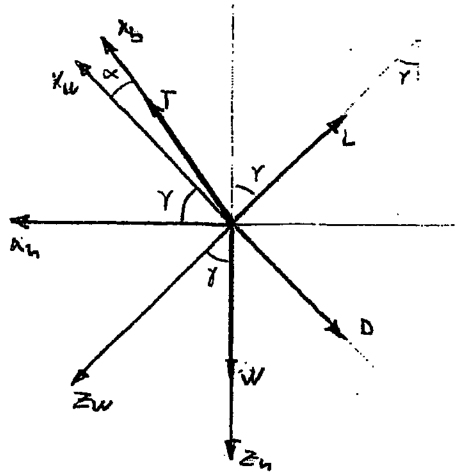
1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como todos los puntos donde se producen.

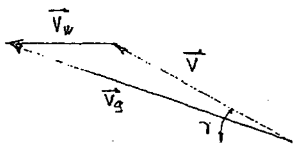
1)

$t=0$



$t>0$





$$V = cte \Rightarrow \gamma = \frac{Vt}{R}$$

$$\vec{V_g} = (V\cos\gamma + V_w)\,\vec{i_0} + V \operatorname{sen}\gamma\,\vec{k_0}$$

$$\vec{V_g} = \frac{dx_0}{dt}\vec{i_0} + \frac{dz_0}{dt}\vec{k_0} = \left(V\cos\frac{Vt}{R} + C_w t\right)\vec{i_0} + V \operatorname{sen}\frac{Vt}{R}\,\vec{k_0}$$

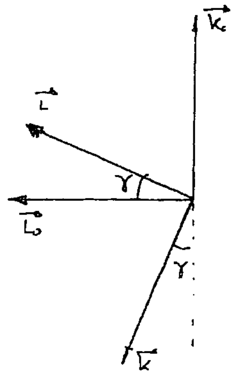
$$\frac{dx_0}{dt} = V\cos\frac{Vt}{R} + C_w t \Rightarrow \int_0^{x_0} dx_0 = \int_0^t \left(V\cos\frac{Vt}{R} + C_w t\right) dt$$

$$\frac{dz_0}{dt} = V \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} \Rightarrow \int_{-R}^{z_0} dz_0 = \int_0^t V \operatorname{sen}\frac{Vt}{R}\, dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= R \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} + \frac{C_w t^2}{2} \\ z_0 &= -R\cos\frac{Vt}{R} \end{aligned}}$$

$$\vec{V_g} = \left(V \cos \frac{Vt}{R} + C_w t \right) \vec{i_0} + V \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} \vec{k_0}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = \left(-\frac{V^2}{R} \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} + C_w \right) \vec{i_0} + \frac{V^2}{R} \cos \frac{Vt}{R} \vec{k_0}$$



$$\vec{i_0} = \cos\gamma\, \vec{i} + \operatorname{sen}\gamma\, \vec{k}$$

$$\vec{k_0} = \operatorname{sen}\gamma\, \vec{i} - \cos\gamma\, \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{V^2}{R} \cancel{\operatorname{sen}\frac{Vt}{R} \cos \frac{Vt}{R} \vec{i}} + C_w \cos \frac{Vt}{R} \vec{i} - \frac{V^2}{R} \operatorname{sen}^2 \frac{Vt}{R} \vec{k} + C_w \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} \vec{k}$$

$$+ \frac{V^2}{R} \cancel{\cos \frac{Vt}{R} \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} \vec{i}} - \frac{V^2}{R} \cos^2 \frac{Vt}{R} \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = C_w \cos \frac{Vt}{R} \vec{i} + \left(C_w \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R} \right) \vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T\cos\alpha - D - W \operatorname{sen}\gamma &= \frac{W}{g} C_w \cos \frac{Vt}{R} \\ W \cos\gamma - L &= \frac{W}{g} \left(C_w \operatorname{sen} \frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R} \right) \end{aligned}}$$

3)

$$C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\, \alpha$$

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L$$

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\left[W\cos\frac{Vt}{R} - \frac{W}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)\right]\frac{1}{\frac{1}{2}\rho S V^2} - C_{L0}\right]}$$

$$n = \frac{L}{W} = \cos\gamma - \frac{1}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)$$

$$\boxed{n = \cos\frac{Vt}{R} - \frac{1}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)}$$

4)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 = -\frac{V}{R}\operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{C_W}{g}\frac{V}{R}\cos\frac{Vt}{R} \Rightarrow \gamma = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_{max} &= 1 + \frac{V^2}{gR} \quad ; \quad \gamma = 0 \\ n_{min} &= \frac{V^2}{gR} - 1 \quad ; \quad \gamma = \pi \end{aligned}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 29.04.08
CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ (V_{w0} y k_w son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).
b) El empuje del motor es paralelo al eje x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
d) ρ y g son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

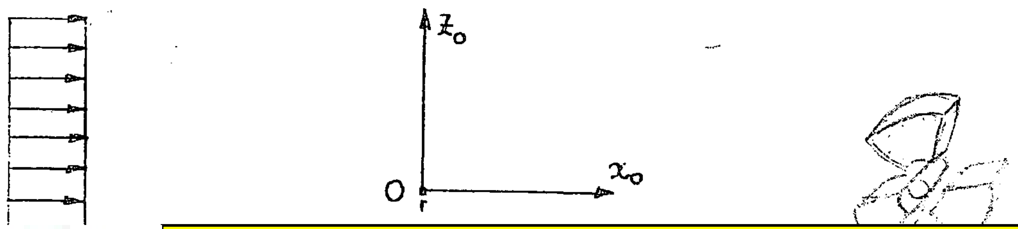
Se pide:

1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra x_0,z_0 de la figura.

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4º) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.



TIEMPO CONCEDIDO: 1

Ingenieros Aeronáuticos
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

TR
Vuelo Simétrico
en Plano Vert.

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2°A - 91 543 45 12

H6: 25-06-97 ¡ V_w variable con t !

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ (c_w es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

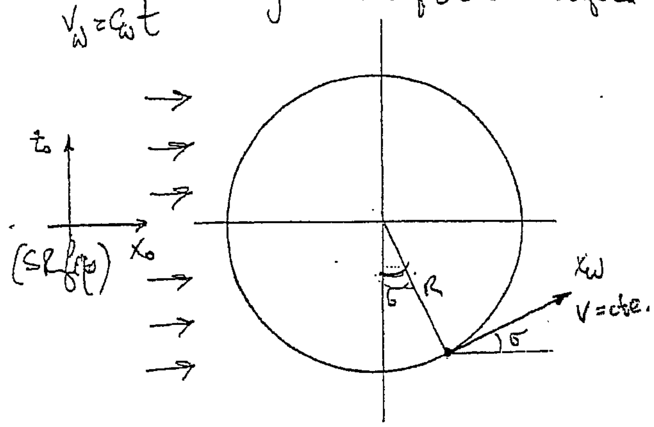
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- ρ y g son constantes conocidas y $V > V_w$.

Se pide:

1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como todos los puntos donde se producen.

$\boxed{\text{H6 (25-06-97)}}$

Trayectoria respecto la tuneladora



$\sigma = \frac{v}{R} t \quad \varepsilon \quad \gamma = (\widehat{x_\omega, x_h}) \Rightarrow$ imprescindible saber para escribir los cos !!

$\alpha \ll 1$

1 Posición absoluta

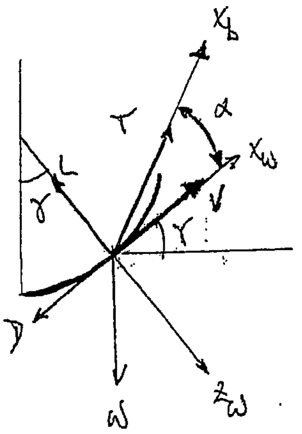
$$\vec V_g = \vec V + \vec V_\omega = (V\cos\sigma + \overset{C_\omega t}{V_\omega})\,\vec i_0 + V\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\vec k_0 = \frac{dx_0}{dt}\vec i_0 + \frac{dz_0}{dt}\vec k_0$$

$$\int_0^{x_0} d\xi = \int_0^t \left(v\cos\frac{v}{R}\tau + C_\omega \tau\right) d\tau = R\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{R}t + \frac{C_\omega t^2}{2} \Rightarrow \boxed{x_0 = R\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{R}t + \frac{C_\omega}{2}t^2}$$

$$\int_{-R}^{z_0} d\eta = z_0 + R = \int_0^t V\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{R}\tau\, d\tau = -R\cos\frac{v}{R}t + R \Rightarrow \boxed{z_0 = -R\cos\frac{v}{R}t}$$

---

2 Ecs. dinámicas en ejes viento



$\sum \vec F = m\vec a \Rightarrow$ 2 métodos:

a) $\vec a$ obtenida de derivar la velocidad absoluta en ref. inercial y luego proyectar en ejes viento.

b) Proyectar la $\vec a$ absoluta y luego derivar en ejes móviles.

b) $\vec{V}_g = (V\cos\sigma + C_\omega t)\vec{i}_0 + V\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\vec{k}_0 = (V + C_\omega t\cos\sigma)\vec{i}_\omega + C_\omega t\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\vec{k}_\omega$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_{li} = \left.\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}\right|_\omega + \underbrace{\vec{\omega}_{\omega h}}_{\dot{\gamma}\vec{j}_\omega} \wedge \vec{V}_{g\omega}} = \left(C_\omega\cos\sigma + C_\omega t\left(-\mathrm{sen}\,\sigma\right)\frac{V}{R}\right)\vec{i}_\omega + \left(C_\omega\,\mathrm{sen}\,\sigma + C_\omega t\cos\sigma\,\frac{V}{R}\right)\vec{k}_0 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i}_\omega & \vec{j}_\omega & \vec{k}_\omega \\ 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ - & 0 & - \end{vmatrix} = \dots$$

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. En ejes viento:

$$\begin{cases} T\cos\alpha - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma = \frac{W}{g}C_\omega\cos\sigma & (1) \\ -\underbrace{\cancel{T\,\mathrm{sen}\,\alpha}}_{\ll L,W} - L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(-\frac{V^2}{R} + C_\omega\,\mathrm{sen}\,\sigma\right) & (2) \end{cases}$$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$; $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta_e}}^{0}\delta_e + \cancel{C_{Lq}}^{0}q$ (3), (4)

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$; $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ (5), (6)

$\cancel{m + \dot{q} = 0}$ $\boxed{\text{Sólo para actuaciones integrales}}$

Ec. momentos ; $M_A = q S c C_m = I_y \dot{q}$ (7)

$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e + C_{mq} q$ (8)

$q = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}$ (9)

Sin estas queda 3 con 3.

9 ecs.
9 incógnitas : $T, \alpha, D, L, C_L, C_D, C_m, q, \delta_e$ $\Rightarrow$ 0 gdl

---

$\boxed{3}$ $\alpha, n(t)$

* De (2) ; $-L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(-\frac{V^2}{R} + C_\omega\,\mathrm{sen}\,\sigma\right)$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\frac{V}{R}t + \frac{V^2}{gR} - \frac{C_\omega}{g}\mathrm{sen}\frac{V}{R}t\right) - \dots\right.$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$

$\Rightarrow \left| \sigma = \arctan\left(\frac{-C_\omega}{g}\right) + k\pi \right.$; $k = 1, 2 \dots \Big|$

25-06-97

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ (c_w es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica V y radio R ambos constantes y conocidos.

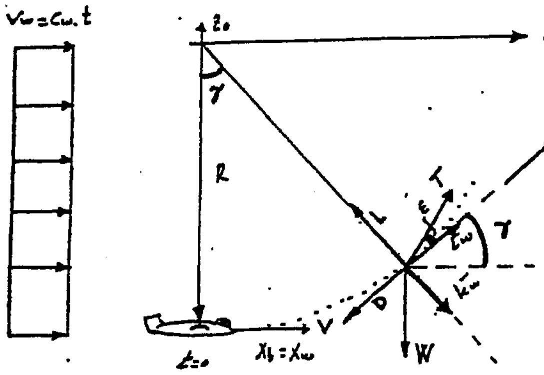
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = CL_q = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a x_b y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje z_w siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- ρ y g son constantes conocidas y $V > V_w$.

Se pide:

1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como todos los puntos donde se producen.

* PROBLEMA nº: 25-06-97



- $\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w$
- El avión describe "respecto a la atmósfera" una circunferencia
- $C_L \delta_e = C_{L_j} = 0$
- $T \parallel X_b$; en $t=0$ $X_b = X_w \Rightarrow \hat{T, X_w} = \varepsilon$; $\alpha = \hat{X_b, X_w}$

De la 2ª suposición obtenemos que $\varepsilon = \alpha$

Por otro $T \parallel X_b$ y además a $t=0$ $X_b \parallel X_w \Rightarrow$ el dirigido es cero $\varepsilon = \alpha$

- $\alpha \ll 1$; $T \sin \varepsilon \ll F_{zero}$
- γ, $\dot{\gamma}$ cte y $V > V_w$

1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.

$$\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w = V(\cos\gamma \cdot \bar{i}_h - \sin\gamma \cdot \bar{k}_h) + C_w \cdot t\, \bar{i}_h = (V\cos\gamma + C_w \cdot t)\cdot \bar{i}_h - V \sin\gamma \cdot \bar{k}_h \Rightarrow$$

Como $\bar{i}_o = \bar{i}_h$; $\bar{k}_o = -\bar{k}_h$

¡ Se describe una circunferencia respecto a la atmósfera con $V = cte$ y $R = cte$ $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{V}{R} t}$!

$$\Rightarrow \bar{V}_g = \frac{dx_h}{dt}\bar{i}_h + \frac{dz_h}{dt}\cdot \bar{k}_h = \frac{dx_o}{dt}\cdot \bar{i}_o - \frac{dz_o}{dt}\cdot \bar{k}_o .$$

$$\int_0^{x_o} d\xi = \int_0^t \left[V\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + C_w \cdot t\right] dt = R \sin\left(\frac{V}{R}\cdot t\right) + \frac{C_w}{2}\cdot t^2$$

$$\int_{-R}^{z_o} d\eta = \int_0^t V \sin\left(\frac{V}{R}\cdot t\right) dt = -R\cos\left(\frac{V}{R}\cdot t\right) + R = z_o - (-R) = z_o + R$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_o &= R\sin\left(\frac{V}{R}\cdot t\right) + \frac{C_w}{2}\cdot t^2 \\ z_o &= -R\cos\left(\frac{V}{R}\cdot t\right) \end{aligned}}$$

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

A la hora de poner m·a podemos proceder de 2 maneras distintas cuando $\bar{V}_g$.

a) · Poner una aceleración relativa y en el otro lado una fuerza de inercia.

b) · Poner directamente una aceleración absoluta.

1) Primero derivo $\bar{V}_g$ en eje "e" $(\dot{\bar{V}}_g|_e)$ y luego proyecto en ejes "viento". → Normalmente éste es más corto

2) Primero proyecto $\bar{V}_g$ en ejes "viento" y luego derivo pero con mucho cuidado ya → $\frac{\partial \bar{V}|_w}{\partial t} + \bar{\omega}_{we} \wedge \bar{V}|_w$

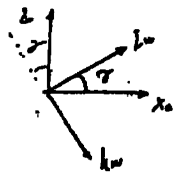
En nuestro problema los ejes absolutos son los "0"

$$\bar{V}_g|_0 = \left[V \cdot \cos\left(\frac{V}{R} t\right) + C_w \cdot t\right] \bar{i}_0 + V \cdot \sin\left(\frac{V}{R} \cdot t\right) \cdot \bar{k}_0$$

$$\dot{\bar{V}}_g|_0 = \left[-V \cdot \frac{V}{R} \sin\left(\frac{V}{R} \cdot t\right) + C_w\right] \cdot \bar{i}_0 + V \cdot \frac{V}{R} \cos\left(\frac{V}{R} \cdot t\right) \cdot \bar{k}_0$$

$$\dot{\bar{V}}_g|_0 = \left[-\frac{V^2}{R} \cdot \sin\left(\frac{V}{R} t\right) + C_w\right] \bar{i}_0 + \frac{V^2}{R} \cos\left(\frac{V}{R} t\right) \bar{k}_0$$

Ahora lo proyectamos en ejes viento: a)



$\bar{i}_0 = \cos\gamma \cdot \bar{i}_w + \sin\gamma \cdot \bar{k}_w$

$\bar{k}_0 = +\sin\gamma \cdot \bar{i}_w - \cos\gamma \cdot \bar{k}_w$

b) En matrices.

$$\dot{\bar{V}}_g|_w = \left[-\frac{V^2}{R} \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{V}{R} \cdot t}_{\gamma}\right) + C_w\right] \left(\cos\gamma \cdot \bar{i}_w + \sin\gamma \cdot \bar{k}_w\right) + \frac{V^2}{R} \cos\gamma \cdot \left(\sin\gamma \cdot \bar{i}_w - \cos\gamma \cdot \bar{k}_w\right)$$

$$\boxed{\dot{\bar{V}}_g|_w = C_w \cdot \cos\gamma \cdot \bar{i}_w + \left(C_w \cdot \sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) \cdot \bar{k}_w}$$

Finalmente:

$$-D + T \cdot \cos\alpha - W \cdot \sin\gamma = \frac{W}{g} \cdot C_w \cdot \cos\gamma$$

¡ CUANDO HAYA VIENTO JAMÁS ...

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \,(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \,[C_{D0} + k\,(C_{L0}+C_{L\alpha}\cdot\alpha)^2]$$

$$-L + W\cos\gamma = -\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha) + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(c_w\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right)$$

Nota: Si queremos comprobar si los signos son correctos → vemos los límites:

Para peso y viento no importa → $-L = -\frac{V^2}{R}$ ¡ok!

ya podemos sacar α →

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left\{\left[\frac{W}{g}\left(c_w\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) - W\cos\gamma\right]\cdot\frac{-1}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - C_{L0}\right\}}$$

$\gamma = \frac{V}{R}t$

$$-\frac{L}{W} + \cos\gamma = \frac{1}{g}\left(c_w\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) \Rightarrow \boxed{n = -\frac{1}{g}\left(c_w\sin\left(\frac{V}{R}t\right) - \frac{V^2}{R}\right) + \cos\left(\frac{V}{R}t\right)}$$

4º) Determinar todos los factores de carga máximo y mínimo, n_{max} y n_{min}, así como todos los puntos donde se producen.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"* 21.09.11

PROBLEMA 1º

Un avión efectúa un vuelo en subida simétrico rectilíneo casi-estacionario con las alas a nivel, y con ángulo de asiento de velocidad, γ, conocido y no pequeño. Todo el vuelo se efectúa a velocidad equivalente, V_e, constante (la velocidad equivalente se define mediante $V_e = V\sqrt{\sigma}$, donde V es la velocidad de vuelo y $\sigma = \rho/\rho_0$, siendo ρ la densidad del aire a cierta altitud h y ρ_0 la densidad al nivel del mar).

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso constante, W, la superficie alar, S, los coeficientes constantes de la polar parabólica, C_{D0}, k, etc.).
b) El empuje de los motores está dirigido según el eje x_w.
c) El vuelo se realiza en la troposfera de una atmósfera ISA (la variación de la densidad con la altitud viene dada por la ley $\sigma = (1 - c_1 h)^{c_2}$ donde ρ_0, c_1, c_2 son constantes conocidas).

Se pide:

1º) Determinar la velocidad equivalente que minimiza la relación empuje-peso (T/W), así como el correspondiente valor de $(T/W)_{min}$.

2º) Si en toda la subida se vuela en las condiciones del apartado 1º), determinar la velocidad de vuelo y el coeficiente de sustentación como funciones de la altitud. Comentar los resultados obtenidos.

3º) Si en toda la subida se vuela en las condiciones del apartado 1º), determinar el tiempo que tarda el avión en ascender desde el nivel del mar hasta una altitud H dada.

(14)

1) $T - D - W\sin\gamma = 0 \qquad V = \dfrac{V_e}{\sqrt{\sigma}}$

$-L + W\cos\gamma = 0$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = \frac{1}{2}\rho S \frac{V_e^2}{\sigma} C_L \rightarrow C_L = \frac{2\sigma W\cos\gamma}{\rho S V_e^2} = \frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S V_e^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S \frac{V_e^2}{\sigma}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 V_e^4}\right)$$

$$\frac{T}{W} = \frac{D}{W} + \sin\gamma = \frac{\rho_0 S V_e^2}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 V_e^4}\right) + \sin\gamma$$

$$\frac{d\left(\frac{T}{W}\right)}{dV_e} = \frac{2\rho_0 S C_{D0} V_e}{2W} - \frac{4KW\cos^2\gamma}{\rho_0 S V_e^3} = 0$$

$$\cancel{2}\rho_0^2 S^2 V_e^4 C_{D0} = \cancel{8}^{\,4} K W^2 \cos^2\gamma \ ; \ V_e^4 = \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 C_{D0}} \ ; \ V_e^2 = \frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}$$

$$\boxed{V_e = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}} \cdot \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}$$

$$\left.\frac{T}{W}\right|_{MIN} = \frac{\cancel{\rho_0 S}}{\cancel{2W}} \cdot \frac{\cancel{2W}\cos\gamma}{\cancel{\rho_0 S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}} \cdot \left[C_{D0} + \frac{\cancel{4KW^2\cos^2\gamma}}{\cancel{\rho_0^2 S^2}\,\frac{\cancel{4KW^2\cos^2\gamma}}{\cancel{\rho_0^2 S^2} C_{D0}}}\right] + \sin\gamma = \cos\gamma\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\left[2C_{D0}\right] + \sin\gamma$$

$$\boxed{\left.\frac{T}{W}\right|_{MIN} = 2\cos\gamma\sqrt{K C_{D0}} + \sin\gamma}$$

2) $$\boxed{V = \frac{V_e}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}} \cdot \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-C_1 h)^{C_2}}}}$$

$$C_L = \frac{2W\cos\gamma}{\ldots} = \frac{2W\cancel{\cos\gamma}}{\ldots}\,(1-C_1 h)^{C_2} \ldots (1-C_1 h)^{C_2} \ldots \cancel{(1-C_1 h)}^{C_2} \ldots \sqrt{C_{D0}} \ldots$$

3) $\dfrac{dh}{dt} = V \operatorname{sen}\gamma$

$$\int_0^H \frac{dh}{V \operatorname{sen}\gamma} = \int_0^t dt = t$$

$$t = \int_0^H \frac{\sqrt{(1-C_1 h)^{C_2}}}{\sqrt{\frac{2WG\delta}{\rho_0 S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}} \operatorname{sen}\gamma} dh = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma \sqrt{\frac{2WG\delta}{\rho_0 S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}} \int_0^H (1-C_1 h)^{\frac{C_2}{2}} dh$$

$$\int (1-C_1 x)^{\frac{C_2}{2}} dx = \frac{-C_1}{-C_1} \int (1-C_1 x)^{\frac{C_2}{2}} dx = \frac{1}{-C_1} \cdot \frac{(1-C_1 x)^{1+\frac{C_2}{2}}}{1+\frac{C_2}{2}}$$

$$t = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma \sqrt{\frac{2WG\delta}{\rho_0 S}} \cdot \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}} \left[\frac{-1}{C_1} \cdot \frac{(1-C_1 h)^{1+\frac{C_2}{2}}}{\left(1+\frac{C_2}{2}\right)} \right]_0^H = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma \sqrt{\frac{2WG\delta}{\rho_0 S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}} \left[\frac{(C_1 H - 1)^{1+\frac{C_2}{2}}}{C_1\left(1+\frac{C_2}{2}\right)} + \frac{1}{C_1\left(1+\frac{C_2}{2}\right)} \right]$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma \sqrt{\frac{2WG\delta}{\rho_0 S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}} \left[\frac{(C_1 H - 1)^{1+\frac{C_2}{2}} + 1}{C_1\left(1+\frac{C_2}{2}\right)} \right]}$$