PLANEADOR:

* Sin viento. Descenso rectilíneo no estacionario (Integrales). Descenso curvilíneo no estacionario $\gamma = cte$
  Vuelo invertido. → (1)

* Sin viento. Vuelo horizontal no estacionario. Descenso rectilíneo estacionario. $\gamma_d \ll 1$ → (2)
* Sin viento. Vuelo en picado no estacionario. Descenso curvilíneo no estacionario $\gamma \neq cte$
  Ascenso rectilíneo (VIENTO ASCENDENTE) estacionario. Ángulos peq. → (3)
* Sin viento. Descenso rectilíneo. Ecs. adimensionales con γ_d NO pequeño → (4)
* Sin viento. Ecs. con h como parámetro indep. Adimensionalización → (5) y (6)

* Viento horizontal CTE de cara/cola. Descenso rectilíneo estacionario. $\gamma_d \ll 1$ → (7) y (8) $\boxed{4.}$
* Viento horizontal f(h). Descenso rectilíneo estacionario. Uso de δ_e. Descenso rectilíneo no estacionario → (9)

* Viento horizontal CTE con ángulo φ sobre la horizontal. Ladera rectilínea. Uso de δ_e
  Proyección en ejes $x_w - z_w$ y $x_h - z_h$ → (10)
* Viento ⊥ al radiovector. Ladera circular → (11)

* Viraje simétrico en ascensión (Viento ascendente) Hélice → (12)
* Viraje simétrico en descenso. Hélice. Nº vueltas → (13)

* Planeador unido al origen por un cable. Ejes intrínsecos → (14) $\boxed{4.1}$

* Planeador. Actuaciones + Estabilidad → (15)

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1er E. Parcial - A + B + CD 04.12.99

PROBLEMA 1°

Un planeador efectúa un vuelo simétrico contenido en el plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los tres tramos siguientes (ver figura adjunta):

- Tramo 1-2: Descenso rectilíneo con ángulo de descenso γ_d no pequeño y conocido, desde una velocidad V_1, igual a la de mínima resistencia en esta condición de vuelo, hasta una velocidad V_2 conocida ($V_2 > V_1$).
- Tramo 2-3: Vuelo curvilíneo no estacionario, con velocidad angular $\dot{\gamma}$ constante y conocida, desde el punto 2 en el que la velocidad es V_2 y el ángulo de descenso es γ_d, hasta el punto 3 donde $\gamma_d = 0$.
- Tramo 3-4: Vuelo horizontal rectilíneo invertido, desde el punto 3 hasta el punto 4 en donde se alcanza la velocidad de pérdida.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el peso es W, $C_L = C_L(\alpha)$ con $C_{Lmax} > 0$ y $C_{Lmin} < 0$, la polar es parabólica de coeficientes constantes, etc).

b) La velocidad alcanzada en el punto 3 es superior a la de pérdida del tramo 3-4 y las transiciones entre los tres tramos pueden despreciarse.

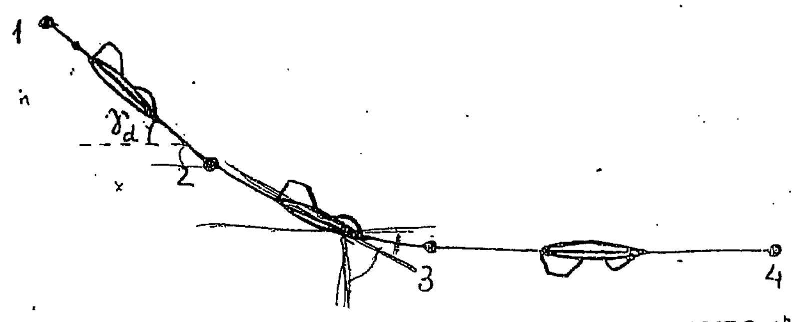
c) La densidad del aire ρ y la constante de gravedad g son constantes conocidas.

Se pide:

1°) Para el tramo 1-2, plantear dos integrales que permitan determinar el tiempo de vuelo t_{12} y la altura descendida Δh_{12}.

2°) Para el tramo 2-3, plantear una ecuación diferencial cuya solución proporcionaría $V = V(t)$ y determinar el tiempo de vuelo t_{23}.

3°) Para el tramo 3-4, razonar si es posible el vuelo. En el caso de que sea posible, determinar el tiempo de vuelo t_{34}.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

1

1) $-D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma = m\dot{V}$; $-D + W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = \frac{W}{g}\dot{V}$ (I)

$L - W\cos\gamma = 0$; $L - W\cos\gamma_d = 0$ (II)

$\dot{x}_e = V\cos\gamma$; $\dot{x}_e = V\cos\gamma_d$ (III)

$\dot{h} = V_a = V\,\mathrm{sen}\,\gamma$; $\dot{h} = V_d = -V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d$ (IV)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \sim C_L = \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho V^2 S}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + KC_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma_d}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$(I) \longrightarrow -\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma_d}{\rho^2 S^2 V^4}\right) + W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$\boxed{t_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{V_1}^{V_2} \frac{W}{-\frac{g}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma_d}{\rho^2 S^2 V^4}\right) + Wg\,\mathrm{sen}\,\gamma_d}\,dV} \sim t_{12} = f(V_2) \longrightarrow V = f(t_{12})$$

$$\frac{dD}{dV} = 0 \Rightarrow V_{D\min} = V_e = V_1 = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$$

$$(IV) \rightarrow \frac{dh}{dt} = -V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d \;;\; \boxed{\Delta h_{12} = \int_{h_1}^{h_2} dh = \int_{t_1}^{t_2} -V(t_{12})\,\mathrm{sen}\,\gamma_d\,dt}$$

2) $-D + W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = \frac{W}{g}\dot{V}$ (I)

$$-L + W\cos\gamma_d + \frac{W}{g}V\dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{x}_e = V\cos\gamma_d$$

$$\dot{h} = -V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho V^2 S} + \frac{2W\dot{\gamma}}{g\rho VS}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = cte \Rightarrow \ddot{\gamma} = 0 \;\; y \;\; \gamma_d = \gamma_0 + \dot{\gamma}_d t \sim t = \frac{\gamma_d - \gamma_{d0}}{\dot{\gamma}_d} \Rightarrow \boxed{t_{23} = \frac{0 - \gamma_{d12}}{\dot{\gamma}_d} \underset{\uparrow}{=} \frac{\gamma_{d12}}{\dot{\gamma}}}$$

$\dot{\gamma} = cte = -\dot{\gamma}_d$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D0} + K\left(\frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2} + \frac{2W\dot{\gamma}}{g\rho S V}\right)^2\right]$$

$$\boxed{(I) \sim \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D0} + K\left(\frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2} + \frac{2W\dot{\gamma}}{g\rho S V}\right)^2\right] - W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = 0}$$

3) $T\cancel{\cos\varepsilon}^{\,1} - D - W\cancel{\sin\gamma}^{\,0} - m\dot{V} = 0 \quad ; \quad -D = \frac{W}{g}\dot{V} \quad (I)$

$-\cancel{T\sin\varepsilon}^{\,0} + L + W\cancel{\cos\gamma}^{\,+1} + \cancel{mV\dot{\gamma}}^{\,0} = 0 \quad ; \quad L = -W$

$C_{L_{min}} < 0 \Rightarrow$ Si es posible el vuelo invertido

$\dot{X}_e = V\cancel{\cos\gamma}^{\,1}$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightsquigarrow C_L = \frac{-2W}{\rho S V^2}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho S V^2}\right)$

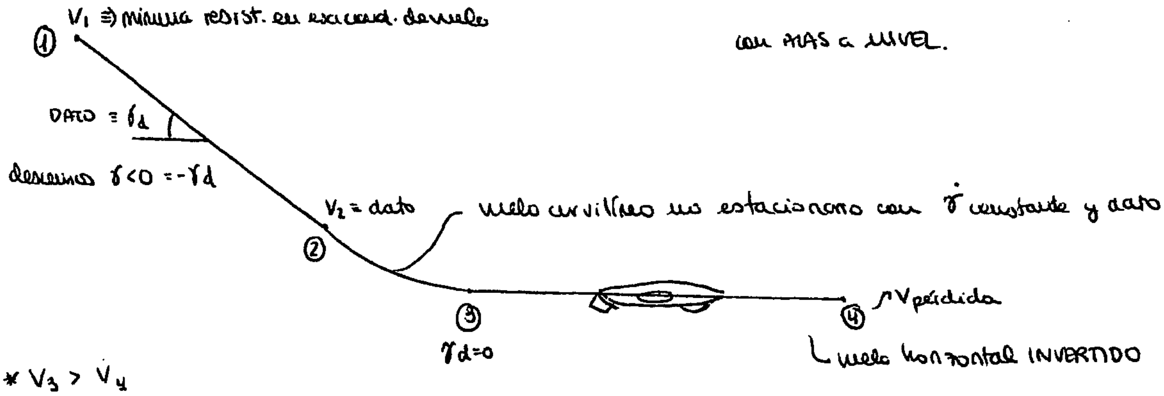
$(I) \longrightarrow \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$

$$\boxed{t_{34} = \int_{t_3}^{t_4} dt = \int_{V_3}^{V_4} \frac{-2W}{g\rho V^2 S\left(C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}\, dV}$$

$C_{L_{MIN}} = \frac{-2W}{\rho S V_5^2} \Rightarrow V_4 = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MIN}}}}$

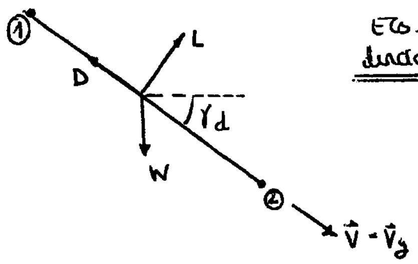
PROBLEMA DIC-99

PLANEADOR VUELO SIMÉT. en el PLANO VERTICAL con ALAS a NIVEL.



$* \; V_3 > V_4$

1 TRAMO 1-2 plantear 2 INTEGRALES que permiten DETERMINAR el tiempo de vuelo t_{12} y la altura descendida Δh_{12}



Ec. dinámicas:
$$\begin{cases} -L + W\cos\gamma_d = 0 \longrightarrow -\tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L + W\cos\gamma_d = 0 \\ -D + W\,\text{sen}\,\gamma_d = m\dot V \end{cases}$$

$$(1)\quad C_L = \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2}$$

$$(2)\quad W\,\text{sen}\,\gamma_d - \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + K C_L^2) = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{12}} dt = \int_{V_1}^{V_2} \frac{W/g\, dV}{W\,\text{sen}\,\gamma_d - \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D_0} + K\left(\frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2}\right)^2\right)}}$$

Necesito V_1 pero me dicen que es la de mínima resistencia:

$$D = \tfrac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D_0} + K\left(\frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2}\right)^2\right) \longrightarrow \frac{dD}{dV} = 0 = \rho S V C_{D_0} + K\cdot\frac{2W^2}{\rho S}\cos^2\gamma_d\cdot\frac{-2}{V^3} = 0$$

$$\rho S V^4 C_{D_0} = K\frac{4W^2}{\rho S}\cos^2\gamma_d\,;$$

Ecs. cinemáticas: $\dot h = -V\,\text{sen}\,\gamma_d = \dfrac{dh}{dt}$

$$V_1^4 = \frac{K}{C_{D_0}}\frac{4W^2}{\rho^2 S^2}\cos^2\gamma_d \longrightarrow \boxed{V_{1_{min}} = \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\sqrt{\frac{2W}{\rho S}\cos\gamma_d}}$$

$$\boxed{\Delta h = \int_0^{t_{12}} -V(t)\,\text{sen}\,\gamma_d\, dt}$$

2 TRAMO 2-3, EC. DIF. que proporcione $V = V(t)$, y t_{23} — — — —

$$\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt} = \text{cte} \longrightarrow \gamma_d = \gamma_{d_0} + \dot\gamma_d t \qquad \gamma_d = \gamma_d^{1-2} + \dot\gamma_d t$$
en $t=0 \to \gamma_{d_0} = \gamma_d^{1-2}$

$$t_{23} = \frac{\gamma_{d_3} - \gamma_d^{1-2}}{\dot\gamma_d} = \frac{0-\gamma_d^{1-2}}{\dot\gamma_d\;{<0}} > 0$$

Pero el dato es $\dot\gamma$!! $\dot\gamma = -\dot\gamma_d$

Así que $\boxed{t_{23} = \gamma_d^{1-2}/\dot\gamma}$

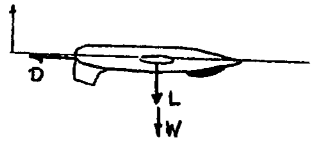
VUELO SIM PV
$$\begin{cases} -D = m(g\,\text{sen}\,\gamma + \dot V) \\ -L = -m(g\cos\gamma + V\cdot\dot\gamma) \rightarrow C_L = \dfrac{2(\frac{W}{g}V\cdot\dot\gamma + W\cos\gamma)}{\rho V^2 S} \end{cases}$$

$$\underline{W\,\text{sen}\,\gamma + \tfrac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D_0} + K\left[\frac{\qquad}{V^2}\right]^2\right] + \frac{W}{g}\dot V = 0}$$

$F(\dot V, V, t) = 0$
EDO que nos da $V(t)$

3 TRAMO 3-4. ¿Es posible el vuelo? t_{34} — — — — —

$C_{L\,min} < 0$ luego sí es posible el vuelo invertido.



$$\begin{cases} L + W = 0 \rightarrow L = -W \rightarrow C_L = \dfrac{-2W}{\rho S V^2} \\ -D = \dfrac{W}{g}\dot{V} \;;\; \rightarrow D = \tfrac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + K C_L^2) \end{cases}$$

$$\frac{W}{g}\cdot\dot{V} = -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} - \frac{2KW^2}{\rho S V^2}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{34}} dt = \int_{V_3}^{V_4} \frac{-W}{g} \frac{dV}{\left(\frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D_0} + \frac{2KW^2}{\rho S V^2}\right)}}$$

Se necesita V_4 = velocidad de pérdida $\frac{1}{2}\rho S V_4^2 C_{L\,min} = -W$

$$\boxed{V_4 = V_{pérdida} = \sqrt{\frac{-2W}{\rho S C_{L\,min}}}}$$

√

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO 11.02.00

E. Final Febrero - A + B + CD

PROBLEMA 1° (T8)

Un avión se encuentra en vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario a una altura h_0 y velocidad V_0 ambas conocidas (punto 0 de la figura adjunta), cuando se produce la parada notores. Inmediatamente el piloto actúa sobre los mandos de forma que el avión sigue una ria descompuesta en dos tramos:

- Tramo 0-1: Vuelo simétrico horizontal rectilíneo desde V_0 ($V_0 > V_s$) hasta V_1 ($V_1 \geq V_s$).
- Tramo 1-2: Descenso en planeo con velocidad constante e igual a V_1 hasta tocar tierra.

Suponiendo además que:

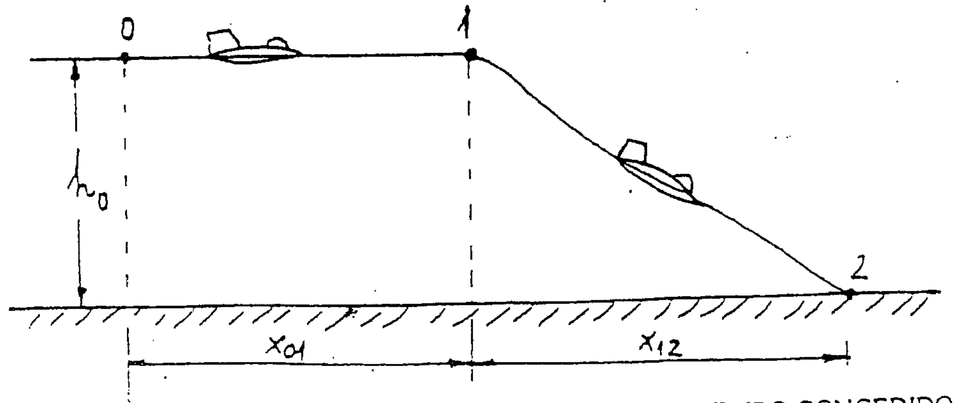
a) Se conocen las características geométricas aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (por ejemplo: el peso W, la superficie alar S, el coeficiente de sustentación máximo, los coeficientes de la polar parabólica supuestos constantes para el margen de velocidades considerado, etc).

b) En el tramo 1-2, el ángulo de descenso es muy pequeño y la aceleración normal a la trayectoria es despreciable.

c) La densidad atmosférica ρ y la constante de la gravedad son constantes conocidas para el margen de alturas considerado.

Se pide:

1. Determinar la distancia horizontal recorrida en el tramo 0-1, x_{01}, en función de la velocidad V_1 y representarla gráficamente de forma esquemática.
2. Determinar la distancia horizontal recorrida en el tramo 1-2, x_{12}, en función de la velocidad V_1 y representarla gráficamente de forma esquemática.
3. Plantear un polinomio que permitiría obtener la velocidad V_1 para máxima distancia horizontal total x_{02}.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

1)

Vuelo horizontal, rectilíneo y simétrico

$\dot{x} = V$

$\dot{h} = 0 \Rightarrow h = cte$

$-D = m\dot{V}$

$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D0} + \frac{2KW^2}{\rho S V^2}$

$$m\frac{dV}{dt} = mV\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D0} + \frac{2KW^2}{\rho S V^2}\right)$$

$$\int_0^1 dx = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{m\frac{1}{2}\rho S V^3\,dV}{\left(\frac{1}{2}\rho S V^2\right)^2 C_{D0} + KW^2} \Rightarrow x_{01} = \frac{m}{2\rho S C_{D0}} \ln \frac{\frac{1}{4}\rho^2 S^2 C_{D0} V_0^4 + KW^2}{\frac{1}{4}\rho^2 S^2 C_{D0} V_1^4 + KW^2}$$

2)

$\dot{x} = V_1$

$\dot{h} = -V\gamma_d$

$$\left.\begin{array}{l} -D - W\gamma_d = 0 \Rightarrow D = W\gamma_d \\ L = W = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \\ D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_d = \frac{\frac{1}{2}\rho S V_1^2 C_{D0} + \frac{KW}{\frac{1}{2}\rho S V_1^2}}{W} \;;\; tg\gamma_d = \frac{h_0}{x_{12}}$$

$$x_{12} = \frac{h_0}{\gamma_d} = \frac{h_0 W}{\frac{1}{2}\rho S V_1^2 C_{D0} + \frac{KW}{\frac{1}{2}\rho S V_1^2}}$$

3) $x_{02} = x_{01} + x_{12} \Rightarrow \frac{d x_{02}}{d V_1} = 0 \Rightarrow V_1\Big|_{x_{02}\,máx}$

(2)

1) $-D - W\cancel{\sin\gamma}^{\,0} - m\dot V = 0 \quad ; \quad -D = \frac{W}{g}\dot V \quad (\mathrm{I})$

$-L + W\cancel{\cos\gamma}^{\,1} + \cancel{mV\dot\gamma}^{\,0} = 0 \quad ; \quad L = W \quad (\mathrm{II})$

$\dot x_e = V\cancel{\cos\gamma}^{\,1} \Rightarrow \frac{dx_e}{dt} = V \quad (\mathrm{III}) \longrightarrow dt = \frac{dx_e}{V}$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$

$(\mathrm{I}) \rightarrow \frac{W}{g}\cdot \overset{V\frac{dV}{dx_e}}{\frac{dV}{dt}} + \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = 0$

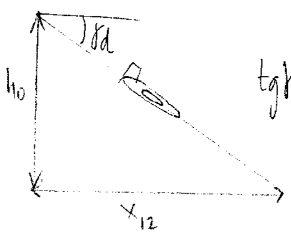
$\frac{W}{g}\cdot \cancel{V}\frac{dV}{dx_e} + \frac{1}{2}\rho V^{\cancel{2}} S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = 0$

$$\boxed{x_{01} = \int_{x_0}^{x_1} dx_e = \int_{V_0}^{V_1} \frac{-2W}{\rho V S g\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}\, dV}$$

2) $-D + W\gamma_d - \cancel{m\dot V}^{\,0} = 0 \quad ; \quad -D = -W\gamma_d \quad (\mathrm{I})$

$-L + W\cancel{\cos\gamma}^{\,1} + \cancel{mV\dot\gamma}^{\,0} = 0 \; ; \; L = W \quad (\mathrm{II})$

$\dot x_e = V\cancel{\cos\gamma}^{\,1} \Rightarrow \frac{dx_e}{dt} = V \quad (\mathrm{III}) \qquad \dot h = -V\gamma_d \quad (\mathrm{IV})$



$\mathrm{tg}\,\gamma_d = \frac{h_0}{x_{12}}$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V_1^2}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right)$

$(\mathrm{I}) \rightarrow -\frac{1}{2}\rho V_1^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right) = -W\gamma_d$

$\gamma_d = \frac{\rho V_1^2 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right)$

$\mathrm{tg}\,\gamma_d = \frac{h_0}{x_{12}} \Rightarrow \gamma_d = \frac{h_0}{x_{12}} \longrightarrow \boxed{x_{12} = \frac{2Wh_0}{\rho V_1^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right)}}$

3) $x_{02} = x_{01} + x_{02} = \int_{V_0}^{V_1} \frac{-2W}{\rho S V g\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}\, dV + \frac{2Wh_0}{\rho V_1^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_1^4}\right)} \; ; \; \frac{dx_{02}}{dV_1} = 0 \rightarrow V_1 = \dots$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \underbrace{\frac{dh}{dt}}_{V}$$

Planeador.

PROBLEMA 9

Un planeador cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas está efectuando una maniobra simétrica contenida en un plano vertical, que puede descomponerse en los tres tramos siguientes:

- Tramo AB: Picado vertical con velocidad inicial nula desde h_A hasta h_B.
- Tramo BC: Vuelo no estacionario desde $B(\gamma_B = -\pi/2)$ hasta $C(|\gamma_C| << 1)$.
- Tramo CD: Vuelo rectilíneo estacionario en presencia de una corriente ascendente de módulo V_w constante y conocido.

Suponiendo además que:

a) La polar del planeador es parabólica de coeficientes constantes y su coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque.

b) ρ y g son constantes conocidas para el margen de alturas considerado.

c) Todos los ángulos que intervienen en el tramo CD son pequeños:

Se pide:

1º) Determinar la velocidad del planeador en el punto B, V_B, y el tiempo que tarda en alcanzarla, t_B.

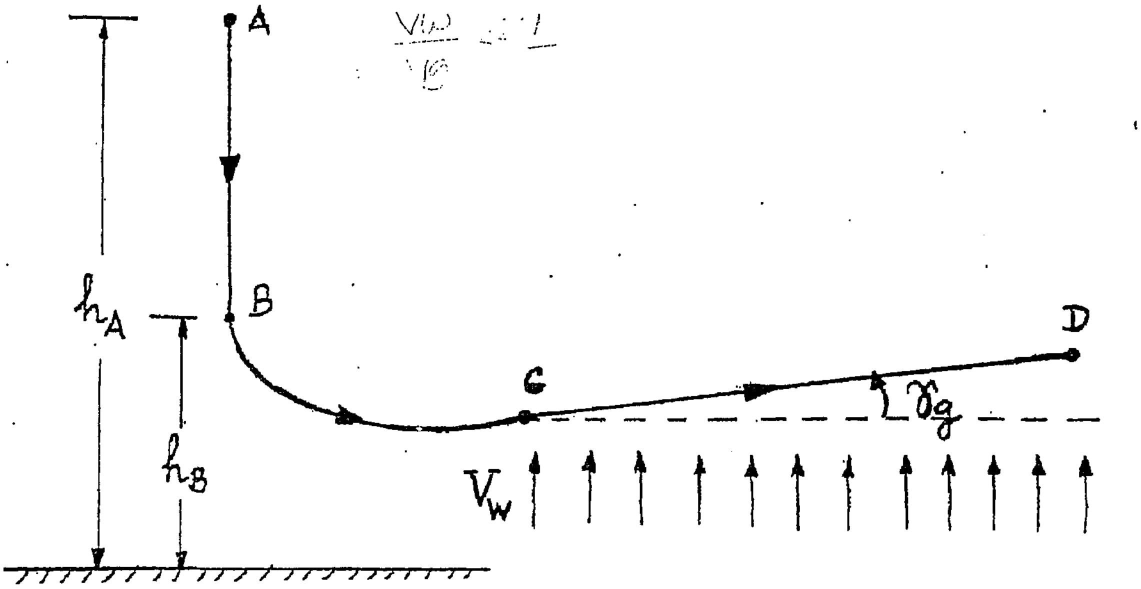
2º) Plantear para el tramo BC el sistema de ecuaciones diferenciales que permitiría obtener $\alpha(t), V(t), \gamma(t), h(t)$ para una $\boxed{\text{ley de control } \delta_e(t)}$ conocida.

3º) Para el tramo CD,

3.1) plantear el sistema de ecuaciones cinemáticas y dinámicas,

3.2) determinar el ángulo de asiento de velocidad respecto a tierra, γ_g, en función de C_L

3.3) y determinar el C_L que maximiza γ_g. ¿Coincide con el valor correspondiente para el caso de que no exista ascendencia?.



C-157

Planeador.
(Para $\gamma \not\ll 1$)

PROBLEMA 10

Se considera un planeador, cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, volando en una atmósfera en calma.

Suponiendo que el ángulo de descenso, γ_d, no es pequeño, se pide:

1º) Determinar la velocidad adimensional para ángulo de descenso mínimo, $\hat{V}_{\gamma_{dmin}}$, y el ángulo de descenso mínimo γ_{dmin}, en función de la eficiencia aerodinámica máxima, E_m.

2º) Determinar la velocidad adimensional para velocidad de descenso adimensional mínima, $\hat{V}_{\hat{V}_{dmin}}$, en función de E_m.

3º) Determinar la distancia horizontal máxima, x_{max}, que puede recorrer el planeador si se suelta a una altura h_0 conocida, así como la ley de deflexión del timón de profundidad en función de la altura necesaria para efectuar este descenso.

4º) Particularizar los apartados anteriores para el caso $E_m \to \infty$, comentando los resultados obtenidos.

$\cos^2\gamma = 1 - \operatorname{sen}^2\gamma$

③

1) $-D - W\cancel{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{-1} - m\dot V = 0$; $-D + W = \frac{W}{g}\dot V$ (I)

$-L + W\cancel{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{0} + \cancel{mV\dot\gamma}^{0} = 0 \rightarrow L = 0 \rightarrow C_L = 0$

$\dot h = V\cancel{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}^{-1} = -V \rightarrow \frac{dh}{dt} = -V$; $dt = \frac{dh}{-V}$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \cancel{K C_L^2}^{0}\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}$

(I) $\rightarrow \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - W = 0$

↳ $\frac{dV}{dh}(-V)$

$$\frac{W}{g}(-V)\cdot\frac{dV}{dh} = W - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D0} \Rightarrow (h_B - h_A)\,g = \int_0^{V_B}\frac{-WV}{W - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}}\,dV$$

$$(h_B - h_A)\,g = \int_0^{V_B}\frac{-V}{1 - \frac{1}{2W}\rho V^2 S C_{D0}}\,dV = W\cdot\frac{1}{\rho S C_{D0}}\int_0^{V_B}\frac{-\rho S C_{D0} V}{1 - \frac{1}{2W}\rho V^2 S C_{D0}}\,dV =$$

$$\frac{W}{\rho S C_{D0}}\cdot\ln\left(1 - \frac{1}{2W}\rho V^2 S C_{D0}\right)\Big|_0^{V_B} = \frac{W}{\rho S C_{D0}}\ln\left[1 - \frac{1}{2W}\rho V_B^2 S C_{D0}\right]$$

$$(h_B - h_A)\frac{g\rho S C_{D0}}{W} = \ln\left[1 - \frac{\rho V_B^2 S C_{D0}}{2W}\right] \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{D0}}\left(1 - e^{(h_B - h_A)\frac{g\rho S C_{D0}}{W}}\right)}}$$

$$\text{(I)} \rightarrow \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} = W - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D0} \Rightarrow \boxed{t_B = \frac{1}{g}\int_0^{V_B}\frac{1}{1 - \frac{1}{2W}\rho S C_{D0} V^2}\,dV = \frac{1}{g}\,\mathrm{arcth}\left(\sqrt{\frac{\rho S C_{D0}}{2W}}\,V_B\right)}$$

2)

$-D + W\sin\gamma_d = \frac{W}{g}\dot V$ (I)

$-L + W = -\frac{W}{g}V\dot\gamma$ (II)

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_e}\delta_e\right)$ (III)

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D0} + K\left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_e}\delta_e\right)^2\right]$

$\dot h = -V\gamma_d$ (IV)

4 ecuaciones con 4 incógnitas

$\delta_e(t) \equiv$ DATO

(I), (II), (III), (IV) → $\alpha(t)$, $V(t)$, $\gamma_d(t)$, $h(t)$

3)

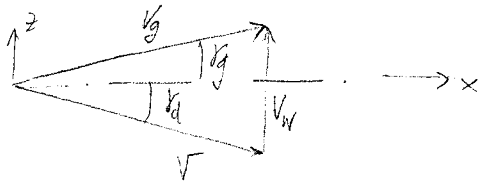
1)

$$-D + W\cdot\gamma_d = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$-L + W = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$$\dot{x}_e = V\cancel{\cos\gamma_g}^{\,1} \qquad (\mathrm{III})$$

$$\dot{h} = V\cdot\gamma_g \qquad (\mathrm{IV})$$



$$\vec{V} = V_g\cos\gamma_g\,\vec{i} + (V_W - V_g\operatorname{sen}\gamma_g)\,\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_g\,\vec{i} + (V_W - V_g\gamma_g)\,\vec{k}$$

$$tg\,\gamma_d = \frac{V_W - V_g\gamma_g}{V_g} \rightsquigarrow \gamma_d = \frac{V_W - V_g\gamma_g}{V_g}$$

$$\gamma_g = \frac{V_W}{V_g} - \gamma_d$$

2)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$$

$$(\mathrm{I}) \rightsquigarrow \gamma_d = \frac{\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + K C_L^2)$$

$$\gamma_g = \frac{V_W}{V_g} - \frac{\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + K C_L^2)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_g^2 + (V_W - V_g\gamma_g)^2} = \sqrt{V_g^2 + V_W^2 - \underbrace{\cancel{2V_W V_g\gamma_g}}_{\simeq 0} + \underbrace{\cancel{V_g^2\gamma_g^2}}_{\simeq 0}} \simeq \sqrt{V_g^2}$$

$$\boxed{\gamma_g = \frac{V_W}{\sqrt{\frac{\rho S C_L}{2W}}} - \frac{\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + K C_L^2) = \frac{V_W}{\sqrt{\frac{\rho S C_L}{2W}}} - \frac{C_{D0} + K C_L^2}{C_L}}$$

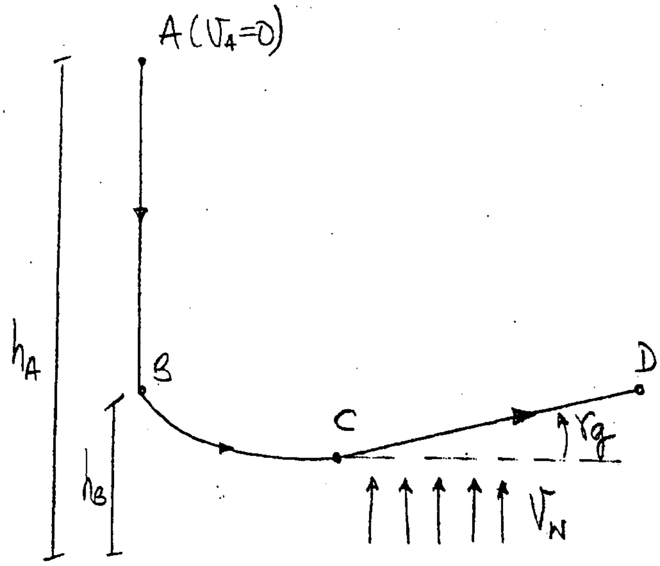
3)

$$\frac{d\gamma_g}{dC_L} = \frac{-V_W\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\cdot\frac{1}{\sqrt{C_L}}}{\frac{\rho S C_L}{2W}} - \frac{-C_{D0}}{C_L^2} + K = \frac{-\cancel{2}W^{1/2}V_W\cancel{\sqrt{\rho S}}}{\cancel{2}\rho^{1/2}S^{1/2}C_L\sqrt{C_L}\sqrt{2W}} + \frac{C_{D0}}{C_L^2} + K =$$

$$= \frac{-V_W}{C_L}\cdot\sqrt{\frac{W}{2C_L\rho S}} + \frac{C_{D0}}{C_L^2} + K = 0 \Rightarrow -V_W C_L\sqrt{\frac{W}{2C_L\rho S}} + C_{D0} + K C_L^2 = 0\,;$$

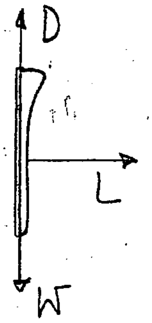
$$-V_W\sqrt{\frac{W C_L}{2\rho S}} + C_{D0} + K C_L^2 = 0$$

PROBLEMA 7 (6-11-1990)   problema 9



- ρ, g constantes y conocidas
- $\gamma_B = -\frac{\pi}{2}$; $\gamma_C \ll 1$
- $C_D = C_{D0} + K C_L^2$
- $C_L = C_{L\alpha}\alpha$
- TRAMO CD: ángulos pequeños

1) TRAMO AB



$$L = 0 \longrightarrow C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = 0$$

$$D - W = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

Sabemos que $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K \cancel{C_L^2}) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) $\rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - W = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ (3)

$$\frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - 1 = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{g}\frac{dV}{dh}\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{V} = \frac{V}{g}\frac{dV}{dh}$$

$$\int_{h_A}^{h_B} dh = \frac{1}{g}\int_{V_A=0}^{V_B} \frac{V}{\left(\frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - 1\right)} dV \longrightarrow (h_B - h_A) = \frac{W}{g\rho S C_{D0}} \ln\left(\frac{\frac{\rho V_B^2 S C_{D0}}{2W} - 1}{(-1)}\right)$$

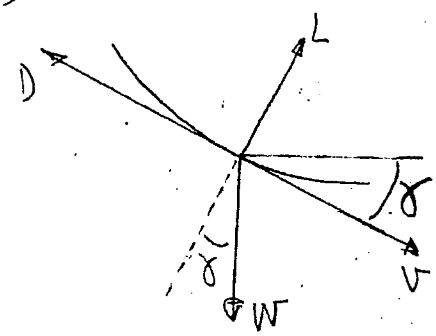
$$\frac{g\rho S C_{D0}}{W}(h_B - h_A) = \ln\left(1 - \frac{\rho V_B^2 S C_{D0}}{2W}\right) \longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{D0}}\left(1 - e^{(h_B - h_A)\frac{g\rho S C_{D0}}{W}}\right)}}$$

De la ecuación (3): $\rho\frac{V^2 S C_{D_0}}{2W} - 1 = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$ integrando ahora en dt.

$$\int_{\cancel{t_A}\,0}^{t_B} dt = \frac{1}{g}\int_{\cancel{V_A}\,0}^{V_B}\frac{dV}{\left(\rho\frac{V^2 S C_{D_0}}{2W}-1\right)} \rightarrow (t_B - 0) = \frac{1}{g}(-1)\int_0^{V_B}\frac{dV}{1-\left(\sqrt{\frac{\rho S C_{D_0}}{2W}}\,V\right)^2}$$

$$\boxed{t_B = -\frac{1}{g}\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{D_0}}}\cdot \arg\mathrm{Th}\left(\sqrt{\frac{\rho S C_{D_0}}{2W}}\,V_B\right)}$$

2) TRAMO BC



- Ecuaciones cinemáticas

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma \qquad (\gamma \text{ es negativo})$$

$$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma$$

- Ecuaciones dinámicas

$A_n = \frac{V^2}{R}$

$$L - W\cos\gamma = \frac{W}{g}V\cdot\dot{\gamma} \qquad (\gamma<0)$$

$$-D - W\sin\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

¡ojo! (Al incluir en las ecuaciones un $\gamma<0$ ya se ponen los signos correctos)

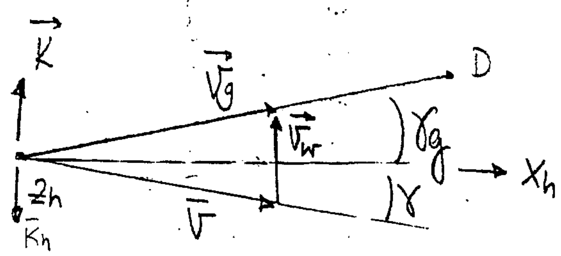
Sabemos que $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$, $C_L = C_{L_\alpha}\alpha$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$; $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$

la última ecuación vendrá definida por la ley de control:

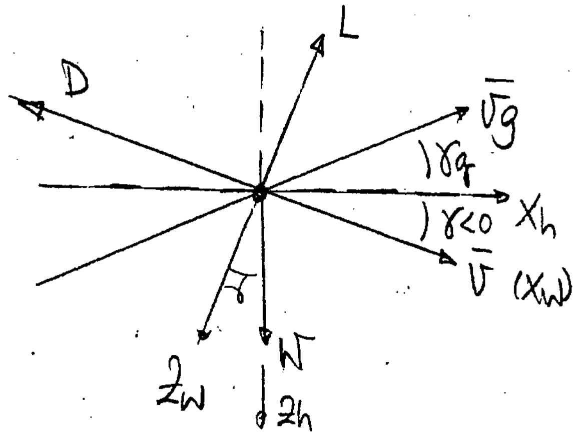
$\alpha = \alpha(\delta, \gamma, V)$ donde $\delta(t)$ es conocido.

3) TRAMO CD



3.1) $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V} = \vec{V_g} - \vec{V_w} \\ \vec{V_g} = (\cos\gamma_g \, \vec{i_h} - \operatorname{sen}\gamma_g \, \vec{K_h}) V_g \\ \vec{V_w} = -V_w \, \vec{K_h} \end{array}\right\} \longrightarrow \vec{V} = (V_g \cos\gamma_g)\, \vec{i_h} + (V_w - V_g \operatorname{sen}\gamma_g)\, \vec{K_h}$$



lo damos la vuelta puesto que al meter un $\gamma<0$ volvería a tomar su signo.

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{V_g \operatorname{sen}\gamma_g - V_w}{\sqrt{(V_g\cos\gamma_g)^2 + (V_g \operatorname{sen}\gamma_g - V_w)^2}} \quad (1)$$

Como el enunciado dice que en el tramo CD los ángulos son pequeños:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \ll 1 \longrightarrow \begin{cases} \cos\gamma \simeq 1 \\ \operatorname{sen}\gamma \simeq \gamma \end{cases} \\ \gamma_g \ll 1 \longrightarrow \begin{cases} \cos\gamma_g \simeq 1 \\ \operatorname{sen}\gamma_g \simeq \gamma_g \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{(1)} \gamma \sim \frac{V_g\gamma_g - V_w}{\sqrt{(V_g)^2 + (V_g\gamma_g - V_w)^2}} \quad (1^*)$$

- Proyectando las fuerzas en ejes viento:

Ecuaciones dinámicas $= \left\{\begin{array}{l} L - W\cos\gamma = 0 \\ -D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\gamma \ll 1} \begin{array}{ll} L = W & (2) \\ -D - W\gamma = 0 & (3) \end{array}$

- Ecuaciones cinemáticas en ejes horizontales local:

$$\frac{dx}{dt} = V_g \cos\gamma_g$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g \operatorname{sen}\gamma_g$$

3.2) Si en la ecuación (1*) eliminamos los infinitésimos de 2 orden ($\gamma, \gamma_g \ll 1 \rightarrow V_W \ll 1$) tenemos:

$$\gamma \sim \frac{V_g \gamma_g - V_W}{V_g} = \gamma_g - \frac{V_W}{V_g} \qquad (*)$$

De la ecuación $\left\{ \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix} \right.$

$$\gamma = -\frac{D}{W} \underset{(2)}{=} -\frac{D}{L} = -\frac{\cancel{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\,\overbrace{(C_{D0}+KC_L^2)}^{C_D}}{\cancel{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\, C_L}$$

$$\gamma = -\frac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} \qquad (**)$$

Igualando las expresiones (*) y (**)

$$\gamma_g - \frac{V_W}{V_g} = -\frac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} \longrightarrow \gamma_g = -\frac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} + \frac{V_W}{V_g}$$

Falta calcular V_g: $|\vec{V}| = \sqrt{(V_g \cos\gamma_g)^2 + (V_g \operatorname{sen}\gamma_g - V_W)^2} =$

$$= \sqrt{V_g^2 + \underbrace{V_W^2 - 2V_g V_W \operatorname{sen}\gamma_g}_{\text{Se desprecian por ser infinitésimos de 2º orden}}} \simeq \sqrt{V_g^2} \simeq |\vec{V_g}|$$

Sustituyendo $\gamma_g = -\dfrac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} + \dfrac{V_W}{V} = -\dfrac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} + V_W\sqrt{\dfrac{\rho S C_L}{2W}}$

Como $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W \longrightarrow V = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_L}}$

$$\boxed{\gamma_g = -\frac{C_{D0}+KC_L^2}{C_L} + V_W\sqrt{\frac{\rho S C_L}{2W}}}$$

3.3) Maximizar γ_g

$$\frac{\partial \gamma_g}{\partial C_L} = 0 \longrightarrow \quad - \frac{2KC_L \cdot C_L - C_{D0} - KC_L^2}{C_L^2} + v_w \sqrt{\frac{\rho S}{2W}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{C_L}} = 0$$

$$- \frac{KC_L^2 - C_{D0}}{C_L^2} + \frac{1}{2} v_w \sqrt{\frac{\rho S}{2W}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L}} = 0$$

$$\frac{C_{D0}}{C_L^2} - K + \frac{1}{2} v_w \sqrt{\frac{\rho S}{2W}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L}} = 0$$

$$\frac{C_{D0} - KC_L^2 + \frac{v_w}{2}\sqrt{\frac{\rho S}{2W}} \cdot C_L^{3/2}}{C_L^2} = 0 \; ; \quad \frac{v_w}{2}\sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\, C_L^{3/2} - KC_L^2 + C_{D0} = 0 \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ De aquí obtenemos $\left. C_L \right)_{\gamma_g max}$

*) En el caso de que no hubiese ascendencia $v_w = 0 \longrightarrow \left. C_L \right)_{\gamma max} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$
que no coincidiría con el valor obtenido antes.

PROBLEMA 9 CLASE

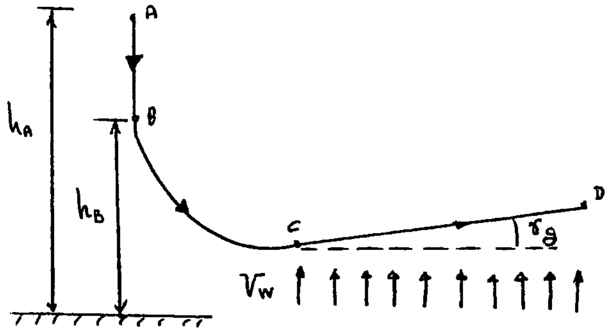
PLANEADOR $(T=0)$ — caract. geom, aerod, másicas conocidas; maniobra SIMÉTRICA EN EL PLANO VERTICAL

Suposiciones:
- POLAR PARABÓLICA de K, C_{D_0} = ctes
  - $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$
  - $C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha$
- ρ y g ctes DATO
- Ángulos en CD pequeños

AB: picado vertical con $V_0 = 0$ de h_A hasta h_B

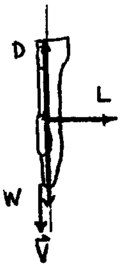
BC: vuelo NO ESTACIONARIO desde
- B con $\gamma_B = -\pi/2$
- C con $|\gamma_C| << 1$

CD: vuelo rectilíneo estacionario con una corriente ascendente de módulo V_w cte y conocido



1 VELOCIDAD en , V_B y tiempo en alcanzarlo t_B ---

TRAMO AB
- sin viento $\vec{V}_g = \vec{V}$ (x_h, x_w)
- Rectilíneo + vel // eje del avión $\gamma = \frac{3\pi}{2}$ + $\dot\gamma = 0$
- $L = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \to C_L = 0$



(1) $\to$ $-W\cancel{\operatorname{sen}\gamma} - D = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ ($\operatorname{sen}\gamma = -1$)

$$W - D = W - \tfrac{1}{2}\rho V^2 S[C_{D_0} + K\cancel{C_L^2}] \quad (=0)$$

Vuelo SIMÉT. PLANO VERTICAL $\boxed{\text{VSPV}}$ PLANEADOR $\boxed{T=0}$

$$\cancel{T\cos\varepsilon} - D - m(g\operatorname{sen}\gamma + \dot V) = 0 \quad (1)$$
$$\cancel{-T\operatorname{sen}\varepsilon} - L + m(g\cos\gamma + V\dot\gamma) = 0 \quad (2)$$
$$\dot X_e = V\cos\gamma \quad (3)$$
$$\dot h = V\operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{W}\left[W - \tfrac{1}{2}\rho V^2 S\cdot C_{D_0}\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{} = dV/dh\,(-V)$$

ec. (4) $\dot h = V\operatorname{sen}\gamma = -V$ ($\operatorname{sen}\gamma=-1$)

$$\frac{dV}{dt} = -V\frac{dV}{dh} = \frac{g}{W}\left[W - \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0}\right];$$

CAMBIAMOS LA VARIABLE: $V^2/2 = X$

$$-\frac{d(V^2/2)}{dh} = \frac{g}{W}\left[W - \rho S C_{D_0}(V^2/2)\right];$$

- En A $\equiv \frac{V_A^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} = 0$, $X_A = 0$
- En B $\equiv X_B = V_B^2/2$

$$-g/W\cdot dh = \frac{dx}{W - \rho S C_{D_0}\cdot X}$$

Integro: $$\int_{h_A}^{h_B}\frac{g}{W}dh = \int_{X_A}^{X_B}\frac{-dx}{W - a\cdot x};$$

$$g/W(h_B - h_A) = \frac{1}{a}\cdot\ln\left[W - ax\right]_0^{X_B = \frac{V_B^2}{2}} = \frac{1}{a}\left[\ln\left(W - a\frac{V_B^2}{2}\right) - \ln(W)\right] = \frac{1}{a}\ln\frac{W - a V_B^2/2}{W}$$

$$1 - \frac{aV_B^2}{2W} = e^{g/W\cdot a(h_B - h_A)} \longrightarrow V_B = \sqrt{\frac{2W}{a}\left(1 - e^{\boxed{}}\right)}$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{D_0}}\left[1 - e^{\frac{g\rho S C_{D_0}(h_B - h_A)}{W}}\right]}}$$

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = W - D; \quad \frac{W}{g}\frac{dV}{W - D} = dt$$

$$\int_0^{t_B} dt = \frac{W}{g}\int_0^{V_B}\frac{dV}{W - \frac{1}{2}\rho S C_{D_0}\cdot V^2}$$

$$t_B = \frac{W}{g}\int_0^{V_B}\frac{dV}{W - a/2\,V^2} = \frac{W}{g}\,\frac{2}{}$$

$$\int\frac{1}{c + ax^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac}}\operatorname{arctg}\frac{2ax}{\sqrt{4ac}} + cte$$

$c = W$

$a = -\frac{1}{2}\rho S C_{D_0}$

2 PARA EL TRAMO BC, sistema de ecs. diferenciales que permite obtener $\alpha(t)$, $V(t)$, $\gamma(t)$, $h(t)$ para una LEY de CONTROL $\delta_E(t)$ conocida

VSPV

$$\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma & (3) \\ \dot{h} = V \operatorname{sen}\gamma & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -D - W/g\,[g\operatorname{sen}\gamma + \dot{V}] = 0 & (1) \\ L - W/g\,[g\cos\gamma + V\cdot\dot{\gamma}] = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S\, C_L & (5) \\ D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S\, C_D & (6) \\ C_D = C_{D_0} + K\cdot C_L^2 & (7) \\ C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha & (8) \end{cases}$$

$$M = q_0 S C \cdot C_{mcg} = q_0 S C\,[C_{m_0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta}\cdot\delta_E + C_{mq}\cdot q] = I_y\,\dot{q} \quad (9)$$

q = velocidad de cabeceo $= \dot{\theta}\cancel{\cos}\phi + \dot{\psi}\,\cancel{\cos\theta}\operatorname{sen}\phi$

alas a nivel $\phi = 0$ | $q = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} = \dot{\theta}$

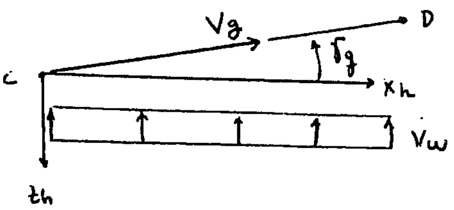
simétrico $\psi = 0$ | $\dot{q} = \ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}$ (10)

Var dependientes: $x_e, V, \gamma, h, D, L, C_L, C_D, \alpha, \delta_E, q = 11$

Ecs: 10

$N = 11 - 10 = 1$ gdl que será δ_E por lo que si se conoce $\delta_E(t)$ podemos obtener todas las variables $\alpha(t)$, $V(t)$, $\gamma(t)$, $h(t)$.

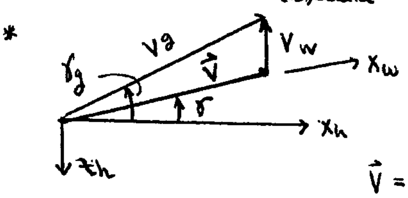
3 PARA EL TRAMO CD, PLANTEAR ECS. CINEMÁTICAS y DINÁMICAS



γ_g = ángulo de asiento de la velocidad absoluta

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w$$

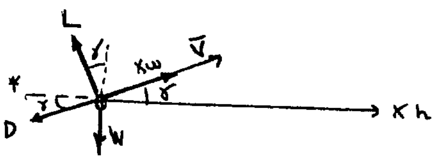
*



$$\begin{cases} \vec{V}_g = V_g\cos\gamma_g\,\vec{i}_h - V_g\operatorname{sen}\gamma_g\,\vec{k}_h \\ \vec{V}_w = -V_w\,\vec{k}_h \end{cases}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w = V_g\cos\gamma_g\,\vec{i}_h + (V_w - V_g\operatorname{sen}\gamma_g)\,\vec{k}_h$$

Como todos los ángulos son pequeños $\boxed{\vec{V} \simeq V_g\,\vec{i}_h + (V_w - \gamma_g V_g)\,\vec{k}_h}$ (1)



$$\boxed{\operatorname{tg}\gamma \simeq \gamma = \frac{V_w - V_g\gamma_g}{V_g} = \frac{V_w}{V_g} - \gamma_g} \quad (2)$$

$$* \; \Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{V}_g}{dt} = m\left[\frac{d\vec{V}}{dt} + \cancel{\frac{d\vec{V}_w}{dt}}\right] = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{W}{g}\cancel{\dot{\vec{V}}} = \vec{0}$$

V_w = cte

=0 ESTACIONARIO

$$\begin{cases} \vec{i}_h: & -D\cos\gamma - L\operatorname{sen}\gamma = 0 \rightarrow -D - L\gamma = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma = -\dfrac{D}{L} = -\dfrac{D}{W} = -\dfrac{C_D}{C_L}} \; (3) \\ \vec{k}_h: & D\operatorname{sen}\gamma - L\cos\gamma + W = 0 \rightarrow D\gamma - L + W = 0 \end{cases}$$

$$\gamma = -\frac{C_{D_0} + K C_L^2}{C_L} \quad (3)^*$$

En ejes viento
$$\begin{cases} \vec{i}_w: & -D - W\operatorname{sen}\gamma \simeq -D - W\gamma = 0 \\ \vec{k}_w: & -L + W\cos\gamma \simeq -L + W = 0 \rightarrow \boxed{W = L} \; (4) \end{cases}$$

$$W = L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \tfrac{1}{2}\rho S C_L\left[V_g^2 + V_w^2 + V_g^2\gamma_g^2 - 2V_w V_g\gamma_g\right] \quad (4)^*$$

Ec (1)

Ecs. cinemáticas (1), (2)
Ecs. dinámicas (3), (4)

3.2 DETERMINAR $\gamma_g = \gamma_g(C_L)$

2):
$$\gamma = \frac{V_w}{V_g} - \gamma_g \rightarrow \gamma_g = \frac{V_w}{V_g} - \gamma$$

Ec (4)*: $W = \frac{1}{2}\rho S C_L [V_g^2 + V_w^2 + \underbrace{V_g^2\gamma_g^2 + 2V_w V_g \gamma_g}_{\gamma_g^2 V_g^2 << V_g^2}] \simeq \frac{1}{2}\rho S C_L [V_g^2 + V_w^2]$

$$V_g(C_L) = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L} - V_w^2}$$

Ec (3)*: $\gamma(C_L) = -\frac{C_{D0} + K C_L^2}{C_L}$

Así
$$\boxed{\gamma_g(C_L) = \frac{V_w}{\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L} - V_w^2}} + \frac{C_{D0} + K C_L^2}{C_L}}$$

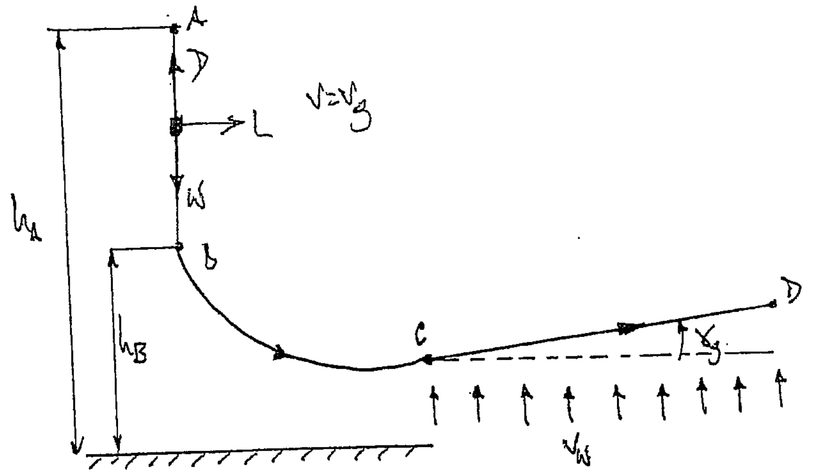
3.3 DETERMINAR C_L que MAXIMIZA γ_g ¿Coincide con el caso de que no haya ascendencia?

$\frac{\partial \gamma_g}{\partial C_L} = 0 \longrightarrow$ obtienes $C_{L\,opt}$ que da $\gamma_{g\,max}$.

Si no hay ascendencia $V_w = 0 \longrightarrow \gamma = \gamma_g = \frac{-C_D}{C_L}$

PROBLEMA 9

Planeador



1 V_B, t_B

AB $\begin{cases} L=0 \Rightarrow C_L=0 \Rightarrow C_D = C_{D0}+k\cancel{C_L^2}^{\,0} = C_{D0} \\ W-D = \dfrac{W}{g}\dfrac{dV_g}{dt} \quad \text{ACELERACIÓN ABSOLUTA !!} \Rightarrow W-\dfrac{1}{2}\rho \overset{V_g}{V^2} S \overset{C_{D0}}{C_D} = \dfrac{W}{g}\dfrac{dV_g}{dt} \Rightarrow \end{cases}$

$$\Rightarrow 1-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_g^2 = \underbrace{\frac{1}{g}\frac{dV_g}{dt}}_{(1)} = \frac{1}{g}\boxed{\frac{dV_g}{dh}\overbrace{\frac{dh}{dt}}^{-V_g}} = -\frac{1}{2g}\frac{d(V_g^2)}{dh}$$

$$\int_{h_A}^{h_B} dh = \int_{V_A=0}^{V_B} \frac{\frac{1}{2g}d(V^2)}{\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V^2-1} = \frac{W}{\rho g S C_{D0}}\ln\left(1-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2\right)$$

$$h_B-h_A = \frac{W/S}{\rho g C_{D0}}\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{\rho C_{D0}}{W/S}V_B^2\right)$$

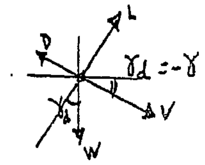
$$\boxed{V_B = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho C_{D0}}\left(1-e^{\frac{\rho g C_{D0}}{W/S}(h_B-h_A)}\right)}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \int_0^{t_B} dt = \int_{V_A=0}^{V_B} \frac{\frac{1}{g}dV_g}{1-\frac{1}{2}\frac{\rho C_{D0}}{W/S}V_g^2} \Rightarrow \boxed{t_B = \sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho C_{D0} g^2}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho C_{D0}}}V_B}{1-\sqrt{\frac{W/S}{\frac{1}{2}\rho C_{D0}}}V_B}}$$

VUELO NO ESTACIONARIO.

2 $\alpha(t), V(t), \gamma(t), h(t)$ para $\delta_e(t)$ conocido (sist ecs) 3C

Ecs. 4.7.3 con T=0 (planeado)



Cinemáticas
$$\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma & (1) \\ \dot{h} = V\,\mathrm{sen}\,\gamma & (2) \end{cases}$$

Dinámicas
$$\begin{cases} -D - m(g\,\mathrm{sen}\,\gamma + \dot{V}) = 0 & (3) \\ -L + m(g\cos\gamma + V\dot{\gamma}) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \ (5); \quad C_D = C_{D0} + kC_L^2 \ (7)$$
$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \ (6); \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \ (8)$$

$\boxed{\text{Ec. momento } y_b: f(\delta, \alpha, \gamma) = 0}$ (9

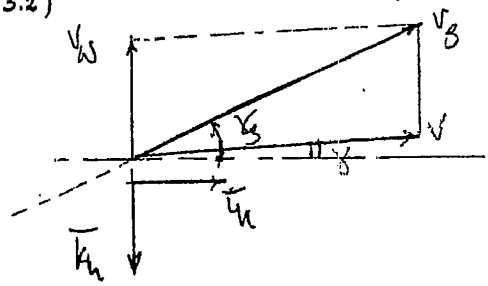
$\delta = \delta_e(t)$ (10) ⇐ DATO ENUNCIADO

10 ecs
Incógnitas $(x_e, V, \gamma, h, D, L, C_D, C_L, \alpha, \delta)$ 10 } ⇒ 0 gdl

---

3 D Trayectoria rectilínea
Ángulos pequeños

3.1) 3.2) Sist. ecs. cinemáticas y dinámicas



* $\boxed{\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_W} = (V_g\cos\gamma_g\,\vec{i}_h - V_g\,\mathrm{sen}\,\gamma_g\,\vec{k}_h) - (-V_W\,\vec{k}_h) =$
$\simeq V_g\,\vec{i}_h + (V_W - V_g\gamma_g)\,\vec{k}_h$

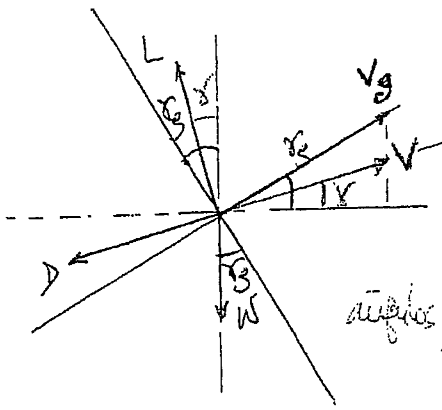
* $\vec{i}_W = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$
$\vec{i}_W\cdot\vec{k}_h = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = -\mathrm{sen}\,\gamma$ } ⇒

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\gamma = \frac{\gamma_g V_g - V_W}{\sqrt{V_g^2 + (V_W - \gamma_g V_g)^2}} \Rightarrow \boxed{\gamma \simeq \frac{\gamma_g V_g - V_W}{\sqrt{V_g^2 + V_W^2}} \simeq \gamma_g - \frac{V_W}{V_g}} \ (***)$$

$$= V_g^2\left(1 + \underbrace{\frac{V_W^2}{V_g^2}}_{\ll 1} + \cancel{\gamma_g^2} - 2\cancel{\overbrace{\frac{V_W}{V_g}}^{\ll 1}\gamma_g}_{\ll 1}\right)$$

$\boxed{\frac{V_W}{V_g} \ll 1}$

⇒ Ec^{nes} del Movimiento:



* Estacionario:

$$\begin{cases} -L\cos(\gamma_g-\gamma)+W\cos\gamma_g-D\,\mathrm{sen}(\gamma_g-\gamma)=0 \\ L\,\mathrm{sen}(\gamma_g-\gamma)-W\,\mathrm{sen}\,\gamma_g-D\cos(\gamma_g-\gamma)=m\dfrac{dV_g}{dt}=0 \end{cases}$$

$D\sim\frac{L}{E}\ll L \quad (E>10)$

ángulos $\ll 1$ ⇒

$$\begin{cases} -L+W-\cancel{D(\gamma_g-\gamma)} \Rightarrow W=L \\ L(\gamma_g-\gamma)-W\gamma_g-D=0 \Rightarrow -W\gamma-D=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma=-\frac{D}{W}=-\frac{C_D}{C_L}$$

$$\gamma_g \simeq \gamma+\frac{V_w}{V_g} \simeq \frac{V_w}{V_g}-\frac{C_{D0}+kC_L^2}{C_L}$$

$$W=L \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L=\frac{1}{2}\rho\left(V_g^2-(V_w^2+V_g^2\gamma_g^2-2V_wV_g\gamma_g)\right) \Rightarrow V_g \simeq \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \simeq V$$

$$\boxed{\gamma_g=V_w\sqrt{\frac{\rho S C_L}{2W}}-\frac{C_{D0}+kC_L^2}{C_L}}$$

3.3)

$$\frac{d\gamma_g}{dC_L}=0 \Rightarrow V_w\sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\frac{1}{2\sqrt{C_L}}-\frac{C_{D0}}{C_L^2}+k=0 \Rightarrow C_{L\gamma_g max}$$

Si no hay ascendencia $V_w=0 \Rightarrow C_{L\gamma_g max}=\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}=C_{L opt}.$

C-157

PROBLEMA 10

Se considera un planeador, cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, volando en una atmósfera en calma.

Suponiendo que el ángulo de descenso, γ_d, no es pequeño, se pide:

1º) Determinar la velocidad adimensional para ángulo de descenso mínimo, $\hat{V}_{\gamma_{dmin}}$, y el ándulo de descenso mínimo γ_{dmin}, en función de la eficiencia aerodinámica máxima, E_m.

2º) Determinar la velocidad adimensional para velocidad de descenso adimensional mínima, $\hat{V}_{\hat{V}_{dmin}}$, en función de E_m.

3º) Determinar la distancia horizontal máxima, x_{max}, que puede recorrer el planeador si se suelta a una altura h_0 conocida, así como la ley de deflexión del timón de profundidad en función de la altura necesaria para efectuar este descenso.

4º) Particularizar los apartados anteriores para el caso $E_m \to \infty$, comentando los resultados obtenidos.

$\boxed{\gamma_{dmin}}$ es una constante del planeador que depende únicamente de las características aerodinámicas (k, C_{D0}) ; $k = \frac{1}{\pi A e}$

$\gamma_{dmin} \propto \sqrt{\frac{C_{D0}}{A}}$ $\quad \uparrow C_{D0} \to \gamma_{dmin} \uparrow$; $\downarrow A$ (Alargamiento)

$\boxed{\hat{V}_{dmin}}$ tb es una característica aerodinámica del planeador, la velocidad mínima con dimensiones depende de las condiciones del vuelo (ρ)

- ACTUACIONES INTEGRALES, lo que condiciona el problema es la cantidad de combustible, pero en el caso de los planeadores ese condicionante es la ALTURA $\Rightarrow$ h VARIABLE INDEPENDIENTE
- Se obtendrá $\Delta x_{máx}$ cuando γ_{dmin}

Generalmente lo que condiciona el problema la cantidad de combustible, pero en el ca[so] de los planeadores que condiciona es la altura. Tomamos entonces (h) como varia[ble] independiente.

C-146

Y

PROBLEMA 9

Un planeador cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas está efectuando una maniobra simétrica contenida en un plano vertical, que puede descomponerse en los tres tramos siguientes:

- Tramo AB: Picado vertical con velocidad inicial nula desde h_A hasta h_B.
- Tramo BC: Vuelo no estacionario desde $B(\gamma_B = -\pi/2)$ hasta $C(|\gamma_C| << 1)$.
- Tramo CD: Vuelo rectilíneo estacionario en presencia de una corriente ascendente de módulo V_w constante y conocido.

Suponiendo además que:

a) La polar del planeador es parabólica de coeficientes constantes y su coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque.

b) ρ y g son constantes conocidas para el margen de alturas considerado.

c) Todos los ángulos que intervienen en el tramo CD son pequeños:

Se pide:

1°) Determinar la velocidad del planeador en el punto B, V_B, y el tiempo que tarda en alcanzarla, t_B.

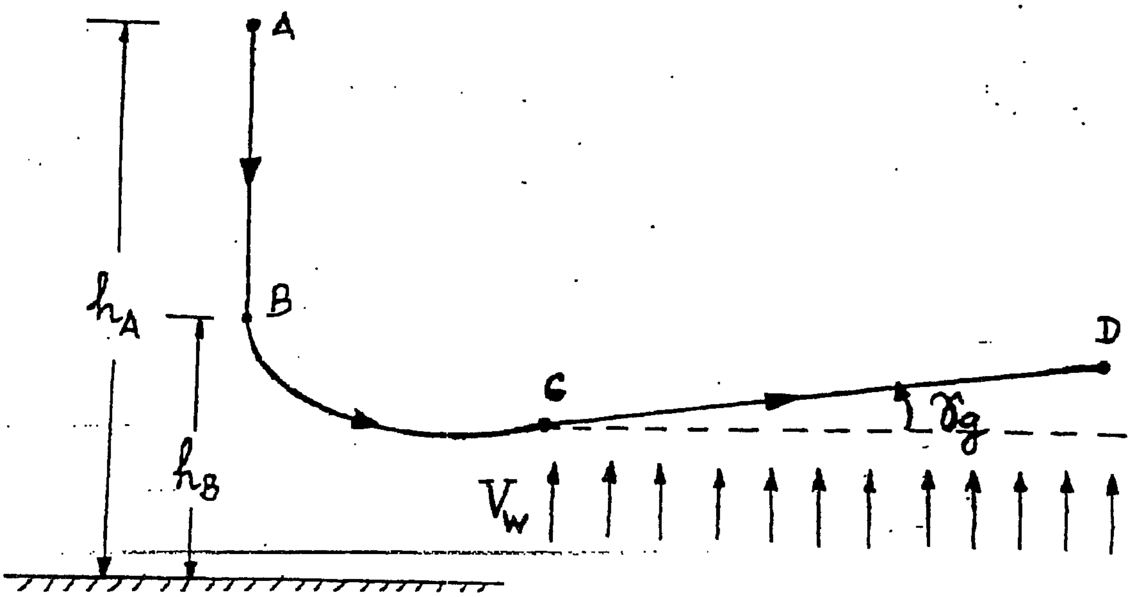
2°) Plantear para el tramo BC el sistema de ecuaciones diferenciales que permitiría obtener $\alpha(t), V(t), \gamma(t), h(t)$ para una ley de control $\delta_e(t)$ conocida.

3°) Para el tramo CD,

3.1) plantear el sistema de ecuaciones cinemáticas y dinámicas,

3.2) determinar el ángulo de asiento de velocidad respecto a tierra, γ_g, en función de C_L

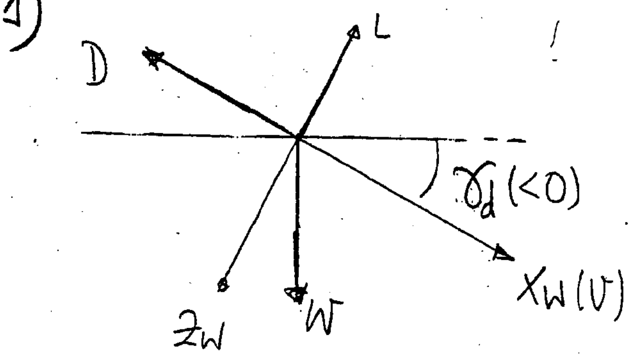
3.3) y determinar el C_L que maximiza γ_g. ¿Coincide con el valor correspondiente para el caso de que no exista ascendencia?.



PROBLEMA 8 (6-11-1990) problema 10

- Atmósfera en calma: $V_W = 0 \longrightarrow V_g = V$
- Suponemos que γ_d no es pequeño

1)



- Ecuaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{x} - V\cos\gamma = 0 \\ \dot{h} - V\operatorname{sen}\gamma = 0 \end{cases}$$

- Ecuaciones dinámicas

$$\begin{cases} -D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \\ L - W\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

Adimensionalizando las ecuaciones con $V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$ y $T_B = 2W\sqrt{KC_{D0}}$

velocidad base

- Ecuaciones cinemáticas:

$$\frac{\dot{x}}{V_B} - \hat{V}\cos\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\dot{h}}{V_B} - \hat{V}\operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow \hat{V}_a - \hat{V}\operatorname{sen}\gamma = 0 \qquad (2)$$

- Ecuaciones dinámicas

empuje base

$$-\frac{DE_m}{W} - E_m\operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow -\hat{D} - E_m\operatorname{sen}\gamma = 0 \qquad (3)$$

$$n - \cos\gamma = 0 \longrightarrow n = \cos\gamma \qquad (4)$$

Sabemos que

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \quad (5) \\ &n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}} \quad \text{donde } C_{Lopt} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \end{aligned}} \quad (6)$$

- Hay que tener en cuenta que $\gamma_d = (-\gamma)$

Sustituyendo (5) en (3) tenemos: $-\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) - E_m\operatorname{sen}\gamma = 0 \quad (3^*)$

Si sustituimos (4) en (3*) queda: $-\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{\cos^2\gamma}{\hat{V}^2}\right) - E_m\operatorname{sen}\gamma = 0$

$$-\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2+\frac{1-\operatorname{sen}^2\gamma}{\hat{V}^2}\right)-E_m \operatorname{sen}\gamma=0$$

Como $-\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}(-\gamma)=\operatorname{sen}(\gamma d) \longrightarrow -\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2+\frac{1-\operatorname{sen}^2\gamma d}{\hat{V}^2}\right)+E_m\operatorname{sen}\gamma d=0$

$$\operatorname{sen}^2\gamma d-(\hat{V}^4+1)+2E_m\hat{V}^2\operatorname{sen}\gamma d=0$$

Tenemos una ecuación de 2º orden en $\operatorname{sen}\gamma d$:

→ Nos quedamos con ⊕ ya que el término de dentro de la raíz es mayor.

$$\operatorname{sen}\gamma d=\frac{-2E_m\hat{V}^2\pm\sqrt{4E_m^2\hat{V}^4+4(\hat{V}^4+1)}}{2}=-E_m\hat{V}^2+\sqrt{E_m^2\hat{V}^4+\hat{V}^4+1} \quad (*)$$

Minimizar γd es lo mismo que minimizar $\operatorname{sen}\gamma d$

$$\frac{\partial\operatorname{sen}\gamma d}{\partial\hat{V}}=0 \rightarrow -\cancel{2}E_m\hat{V}+\frac{\cancel{4}\hat{V}^3E_m^2+\cancel{4}\hat{V}^3}{\cancel{2}\sqrt{E_m^2\hat{V}^4+\hat{V}^4+1}}=0$$

$$\hat{V}^3(E_m^2+1)=E_m\hat{V}\sqrt{E_m^2\hat{V}^4+\hat{V}^4+1}$$

$$\hat{V}^2(E_m^2+1)=E_m\sqrt{E_m^2\hat{V}^4+\hat{V}^4+1}$$

$$\hat{V}^4(E_m^2+1)^2=E_m^2(E_m^2\hat{V}^4+\hat{V}^4+1)=E_m^4\hat{V}^4+E_m^2\hat{V}^4+E_m^2$$

$$\hat{V}^4(\cancel{E_m^4}+2E_m^2+1-\cancel{E_m^4}-E_m^2)=E_m^2$$

$$\hat{V}^4=\frac{E_m^2}{E_m^2+1} \longrightarrow \boxed{\hat{V}_{\gamma d_{min}}=\sqrt[4]{\frac{E_m^2}{E_m^2+1}}}$$

Sustituyendo en (*): $\operatorname{sen}\gamma_{d_{min}}=-E_m\sqrt{\frac{E_m^2}{E_m^2+1}}+\sqrt{\frac{\cancel{(E_m^2+1)}E_m^2}{\cancel{E_m^2+1}}+1}$

$$\operatorname{sen}\gamma_{d_{min}}=-\frac{E_m^2}{\sqrt{E_m^2+1}}+\sqrt{E_m^2+1}=\frac{\cancel{E_m^2}+1-\cancel{E_m^2}}{\sqrt{E_m^2+1}} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\gamma_{d_{min}}=\frac{1}{\sqrt{E_m^2+1}}}$$

2) De (2) tenemos: $\hat{v}_a = \hat{v}\,\text{sen}\,\gamma$

Como $\left.\hat{v}_d\right|_{min} = -\left.\hat{v}_a\right)_{min}$, $\gamma_d = -\gamma$ $\longrightarrow$ $\hat{v}_d = \hat{v}\,\underline{\text{sen}\,\gamma_d}$

↳ Del apartado anterior.

$$\hat{v}_d = \hat{v}\left(-E_m\hat{v}^2 + \sqrt{E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1}\right) = \hat{v}\sqrt{E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1} - E_m\hat{v}^3$$

$$\hat{v}_{d\,min} \longrightarrow \frac{\partial \hat{v}_d}{\partial \hat{v}} = 0 \;;\; \sqrt{E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1} + \frac{\hat{v}\left(4\hat{v}^3E_m^2+4\hat{v}^3\right)}{2\sqrt{E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1}} - 3E_m\hat{v}^2 = 0$$

$$2\left(E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1\right) + 4\left(\hat{v}^4E_m^2+\hat{v}^4\right) = 6E_m\hat{v}^2\sqrt{(E_m^2+1)\,\hat{v}^4+1}$$

$$\left(E_m^2\hat{v}^4+\hat{v}^4+1+2E_m^2\hat{v}^4+2\hat{v}^4\right) = 3E_m\hat{v}^2\sqrt{(E_m^2+1)\hat{v}^4+1}$$

$$\left(3E_m^2\hat{v}^4+3\hat{v}^4+1\right)^2 = 9E_m^2\hat{v}^4\left((E_m^2+1)\hat{v}^4+1\right)$$

$$9(E_m^2+1)^2\hat{v}^8 + 6(E_m^2+1)\hat{v}^4 + 1 = 9E_m^2(E_m^2+1)\hat{v}^8 + 9E_m^2\hat{v}^4$$

$$\left(\cancel{9E_m^4}+18E_m^2+9-\cancel{9E_m^4}-9E_m^2\right)\hat{v}^8 + \left(6E_m^2+6-9E_m^2\right)\hat{v}^4+1=0$$

$$9\hat{v}^8\left(E_m^2+1\right) + 3\left(2-E_m^2\right)\hat{v}^4 + 1 = 0$$

$$\hat{v}^4 = \frac{-3(2-E_m^2) \pm \sqrt{9(2-E_m^2)^2 - 4\cdot 9(E_m^2+1)}}{2\cdot 9\,(E_m^2+1)} =$$

$$= \frac{3(E_m^2-2) \pm 3\sqrt{\cancel{4}-4E_m^2+E_m^4-4E_m^2-\cancel{4}}}{2\cdot 9\,(E_m^2+1)} =$$

$$= \frac{(E_m^2-2) \oplus E_m\sqrt{E_m^2-8}}{6\,(E_m^2+1)} \longrightarrow \boxed{\hat{V}_{\hat{v}_{a\,min}} = \sqrt[4]{\frac{(E_m^2-2)+E_m\sqrt{E_m^2-8}}{6\,(E_m^2+1)}}}$$

Nos quedamos con $\oplus$, sino $\hat{v}^4 < 0$

2

3) (1) $\frac{\dot{x}}{V_B} - \hat{V}\cos\gamma = 0$ | Dividiendo las ecuaciones

(2) $\frac{\dot{h}}{V_B} - \hat{V}\operatorname{sen}\gamma = 0$ | $\frac{dx}{dh} = \frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{1}{Tg\gamma} \rightarrow dx = \frac{1}{Tg\gamma} dh$ (A)

De las ecuaciones dinámicas

Eficiencia aerodinámica

$$\left.\begin{aligned} -D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \\ L - W\cos\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{L}{D} = -\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} = -\frac{1}{Tg\gamma} \rightarrow E = -\frac{1}{Tg\gamma} \quad (B)$$

Si queremos X_{max} deberemos tener E_m, por tanto de (A) y (B)

0 (llegada del planeador al suelo h=0)

$$dx = -E_m dh \rightarrow \int_0^{X_{max}} dx = -E_m \int_{h_0}^{0} dh = E_m h_0$$

$$\boxed{X_{max} = E_m h_0}$$ Donde $E_m = \frac{1}{2\sqrt{KC_{D0}}}$

4) Si $E_m \rightarrow \infty$

$$\hat{V}_{\gamma_{dmin}} \rightarrow 1$$

$$\operatorname{sen}\gamma_{dmin} = \frac{1}{E_m} \sim \gamma_{dmin} \quad (\gamma_{dmin} \ll 1)$$

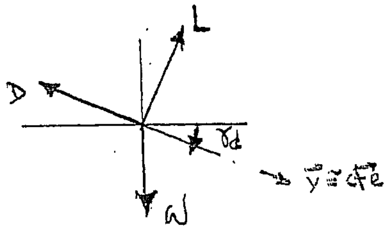
$$\hat{V}_{\hat{V}_{a\,min}} \rightarrow \sqrt[4]{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Estos valores coinciden con los que se obtendrían si hubiesemos supuesto directamente $\gamma \ll 1$.

PROBLEMA 10

Sin viento

γ_d no pequeño



$\boxed{1}$ Ecs. planeador con $\gamma = -\gamma_d$

Cinemáticas $\begin{cases} \dot{x} = V\cos\gamma_d \\ \dot{h} = -V \operatorname{sen}\gamma_d \end{cases}$

Adim.

Dinámicas $\begin{cases} -D + W\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \\ -L + W\cos\gamma_d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div} \cancel{\operatorname{tg}\gamma_d = \frac{D}{L} = \frac{1}{E}} = \dfrac{\frac{D E_m}{W}}{\frac{L E_m}{W}} = \dfrac{\hat{D}}{\underset{\cos\gamma_d}{n}\, E_m}$

Si $\gamma_d \ll 1 \Rightarrow \gamma_d = \frac{\hat{D}}{E_m}$ y solución lo mismo de (*)

$\gamma_{d\,min} \Rightarrow E_{max}$; $\hat{V}_{\gamma_{d\,min}} = ?$

$$n = \frac{L}{W} = \cos\gamma_d$$

$$\hat{D} = \frac{D E_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right)$$

(*) $\quad -\hat{D} + E_m \operatorname{sen}\gamma_d = 0$

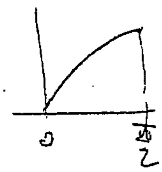
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{\overbrace{\cos^2\gamma_d}^{1-\operatorname{sen}^2\gamma_d}}{\hat{V}^2}\right) + E_m \operatorname{sen}\gamma_d = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\gamma_d + 2E_m \operatorname{sen}\gamma_d \cdot \hat{V}^2 - (1+\hat{V}^4) = 0 \Rightarrow$$

(+) q no hay viento $\Rightarrow$ si $\gamma_d < 0 \Rightarrow$ ascendería

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\gamma_d = -E_m\hat{V}^2 \oplus \sqrt{E_m^2\hat{V}^4 + 1 + \hat{V}^4} \stackrel{+}{=} \sqrt{1+\hat{V}^4(1+E_m^2)} - E_m\hat{V}^2$$

$\gamma_d \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \operatorname{sen}\gamma_d$ monótona creciente



$(\gamma_d)_{min} \Leftrightarrow (\operatorname{sen}\gamma_d)_{min}$

$$\frac{d\operatorname{sen}\gamma_d}{d\hat{V}} = 0 \Rightarrow \frac{4\hat{V}\sqrt{1+E_m^2}}{2\sqrt{1+\hat{V}^4(1+E_m^2)}} - 2E_m\hat{V} = 0 \Rightarrow \quad \hat{V}_{\gamma_{d\,min}} = \left(\frac{E_m^2}{1+E_m^2}\right)^{1/4}$$

$$\operatorname{sen}\gamma_d = \frac{1}{\sqrt{1+E_m^2}}$$

$E_m \to \infty \rightarrow \begin{cases} \hat{V}_{\gamma_{d\,min}} \to 1 \\ \operatorname{sen}\gamma_d \to \frac{1}{E_m} \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\hat{V}_{\hat{V}_{d\,min}} = f(E_m)$

$$\hat{V}_d = -\hat{h} = \hat{V}\,\text{sen}\,\gamma_d = \hat{V}\sqrt{1+\hat{V}^4(1+E_m^2)} - E_m\hat{V}^3$$

$$\frac{d\hat{V}_d}{d\hat{V}} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{V}^4_{\hat{V}_{d\,min}} = \frac{E_m^2 - 2 \pm E_m\sqrt{E_m^2-8}}{6(1+E_m^2)}$$

$$E_m \to \infty \Rightarrow \hat{V}^4_{\hat{V}_{d\,min}} \simeq \frac{E_m^2 \pm E_m E_m\left(1-\frac{8}{E_m^2}\right)^{1/2}}{6E_m^2} \simeq \frac{E_m^2 \pm E_m^2\left(1-\frac{4}{E_m^2}\right)}{6E_m^2} \quad \begin{cases} (+) \to \frac{1}{3} \\ (-) \to \cancel{\frac{2}{3E_m^2}} \end{cases}$$

No tiene sentido

$\boxed{3}$ $\frac{\dot{x}}{\dot{h}} = -\cot g\,\gamma_d = \frac{dx}{dh} \Rightarrow dx = -\cot g\,\gamma_d\,dh = -E\,dh$ $\qquad E = \frac{L}{D} = \frac{W\cos\gamma_d}{W\text{sen}\,\gamma_d} = \cot g\,\gamma_d$

$\boxed{x_{max} \Leftrightarrow \gamma_{d\,min}}$; $\text{sen}\,\gamma_{d\,min} = \frac{1}{\sqrt{1+E_m^2}} \Rightarrow \cot g\,\gamma_{d\,min} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{1+E_m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+E_m^2}}} = E_m$

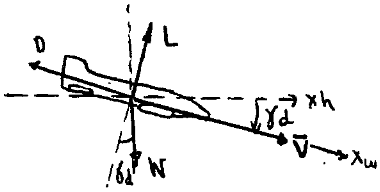
$$x_{max} = -\int_{h_0}^{0} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{1+E_m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+E_m^2}}}\,dh = \int_0^{h_0} E_m\,dh = E_m h_0$$

Ley $\Rightarrow$ Ec. de Momentos.

PROBLEMA 10 CLASE

- PLANEADOR
- CONOCIDAS CARACTERÍST. GEOMÉTRICAS, AEROD., MÁSICAS
- ATMÓSF. EN CALMA $V_w = 0$
- γ_d no es pequeño:

1 VELOCIDAD ADIMENSIONAL PARA ÁNG. de DESCENSO MÍNIMO $\hat{V}_{\gamma_{d\,min}}$ y ÁNG. de DESC. MÍNIMO $\gamma_{d\,min}$ $f(E_{máx})$



$$\begin{cases} -D + W \operatorname{sen}\gamma_d = 0 \quad (1) \\ -L + W\cos\gamma_d = 0 \quad (2) \end{cases}$$ Suponiendo cuasi estacionario

$$\longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\gamma_d = \frac{-D}{L} = \frac{1}{E}} \quad \boxed{n = \frac{L}{W} = \cos\gamma_d} \ (2)$$

ecs cinemáticas $\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma_d \quad (3) \\ \dot{h} = -V\operatorname{sen}\gamma_d \quad (4) \end{cases}$

Adimensionalizo (1) con $T_B = \frac{W}{E_m} = \frac{D E_m}{W}$

$$-\frac{D}{T_B} + \frac{W}{T_B}\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \rightarrow -\hat{D} + E_m \operatorname{sen}\gamma_d = 0 \quad (1)$$

Adimensionalizo (3) y (4) con $V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}$ $\begin{cases} \hat{\dot{x}}_e = \hat{V}\cos\gamma \ (3) \\ \hat{\dot{h}} = \hat{V}\operatorname{sen}\gamma \ (4) \end{cases}$ $\left(\hat{V} = \frac{V}{V_B}\right)$

$$D = \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0}}_{\text{parásita}} + \underbrace{\frac{K L^2}{\tfrac{1}{2}\rho V^2 S}}_{\text{inducida}} \xrightarrow[\text{Adim}]{} D = \tfrac{1}{2}\rho V_B^2 S C_{D_0}\cdot\hat{V}^2 + \frac{n^2 W^2 K}{\tfrac{1}{2}\rho V_B^2 S\,\hat{V}^2} \Rightarrow \underline{\hat{D} = \frac{D E_m}{W} = \frac{1}{2}\left[\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right]}$$

$$\underline{n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L_{opt}}}}$$

Ec (1): $\operatorname{sen}\gamma_d = \frac{\hat{D}}{E_m} = \frac{1}{E_m}\cdot\frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) = \frac{1}{2E_m}\left[\hat{V}^2 + \frac{\cos^2\gamma_d}{\hat{V}^2}\right] =$

$\operatorname{sen}\gamma_d = \frac{1}{2E_m}\left[\hat{V}^2 + \frac{1-\operatorname{sen}^2\gamma_d}{\hat{V}^2}\right]$; $\quad 1 - \operatorname{sen}^2\gamma_d + \hat{V}^4 - 2E_m\hat{V}^2\operatorname{sen}\gamma_d = 0$

$\operatorname{sen}^2\gamma_d + 2E_m\hat{V}^2\operatorname{sen}\gamma_d - (1+\hat{V}^4) = 0 \quad \underline{\operatorname{sen}\gamma_d = -E_m\hat{V}^2 + \sqrt{E_m^2\hat{V}^4 + \hat{V}^4 + 1}}$

* $\hat{V}_{\gamma_{d\,min}} \longrightarrow \frac{\partial(\operatorname{sen}\gamma_d)}{\partial\hat{V}} = 0 \quad \dots$

$$\boxed{\hat{V}_{\gamma_{d\,min}} = \frac{E_m^2}{1+E_m^2} = 1} \ (E_m \gg 1)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\gamma_{d\,min}) = \frac{1}{\sqrt{1+E_m^2}} = 1/E_m}$$

2 $\hat{V}_{\hat{V}_{d\,min}}$, PARA VEL. ADIM. MÍNIMA

$\hat{V}_{descenso} = -\hat{\dot{h}} = \underline{\hat{V}\operatorname{sen}\gamma_d} \rightarrow -E_m\hat{V}^2 + \sqrt{E_m^2\hat{V}^4 + \hat{V}^4 + 1} \quad \dots \quad \frac{dV_{desc}}{d\hat{V}} = 0 \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{V}^4_{\hat{V}_{d\,min}} &= \frac{E_m^2 - 2 \pm E_m\sqrt{E_m^2 - 8}}{8(1+E_m^2)} \underset{E_m \gg 1}{=} 1/3^{1/4} = 0'76 \\ \hat{V}_{d\,min} &= 2/3^{3/4}\, E_m \end{aligned}}$$

3

C-166

PROBLEMA 16 (27.11.90)

Se considera la entrada en la atmósfera de un planeador a una altura h_i, con un ángulo de asiento de velocidad γ_i ($\gamma_i < 0$ y no necesariamente pequeño) y con una velocidad V_i.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (en concreto C_L y C_D son constantes conocidas positivas en el rango de alturas estudiado).

b) La tierra puede considerarse plana.

c) Las componentes del peso tangenciales y normales a la trayectoria son despreciables en relación con el resto de fuerzas que intervienen en el problema.

d) La densidad atmosférica puede expresarse en función de la altura mediante $\rho/\rho_0 = e^{-h/h_0}$, donde ρ_0 y h_0 son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones que permiten determinar el movimiento del centro de gravedad en un plano vertical y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar las funciones $x = x(\gamma)$, $h = h(\gamma)$, $V = V(\gamma)$, utilizando como parámetros, entre otros, la eficiencia aerodinámica, $E = C_L/C_D$, y el coeficiente de sustentación modificado, $\lambda_L = \frac{\rho_0 S C_L}{2m}$ (S representa la superficie alar y m la masa del planeador).

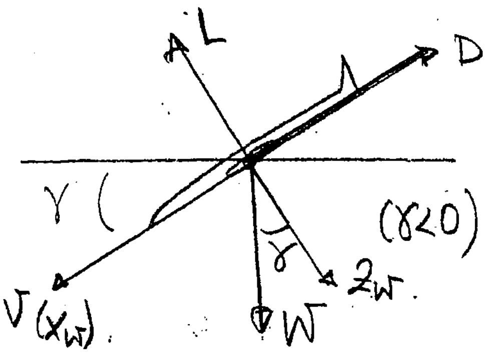
3º) Determinar [illegible] condición que deben satisfacer los distintos parámetros del problema para que el planeador remonte el vuelo antes de llegar al suelo.

4º) Representar gráficamente (de forma esquemática) las funciones $\gamma = \gamma(t)$, $V = V(t)$ y $h = h(x)$. Comentar físicamente los resultados obtenidos.

PROBLEMA 16 (27-11-1990)

- Reentrada de un planeador a una altura h_i, con γ_i y V_i.
- Tierra se considera plana
- Componentes del peso tangenciales y normales despreciables.
- $\rho/\rho_0 = e^{-h/h_0}$; ρ_0 y h_0 son constantes conocidas

1)



- ECUACIONES CINEMÁTICAS

$$\dot{x} = V\cos\gamma \quad (1)$$
$$\dot{h} = V\sin\gamma \quad (2)$$

¡OJO! Al ser $\gamma<0$ cambia el signo al sustituir.

- ECUACIONES DINÁMICAS

Nos dicen que despreciemos las componentes del peso.

$$-L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g} V\dot{\gamma} \longrightarrow L = +\frac{W}{g} V\frac{d\gamma}{dt} \quad (3)$$

$$-D - W\sin\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \longrightarrow D = -\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \quad (4)$$

- ENUNCIADO : $\rho/\rho_0 = e^{-h/h_0}$ (5)

$\rho(h, \gamma, x)$

$x, v, \gamma, h, L, D, \rho$

Tenemos 5 ecuaciones con 6 incógnitas : $\rho, h, x, V, \gamma, \alpha$.
Por tanto, el sistema tiene un grado de libertad.

2) $x = x(\gamma)$; $h = h(\gamma)$; $V = V(\gamma)$?

Usando como parámetros :
- $E = C_L/C_D$ (Eficiencia aerodinámica)
- $\lambda_L = \frac{\rho_0 S C_L}{2m} = \rho_0 \frac{S C_L g}{2W}$ (coeficiente de sustentación modificado).

De (3) $L=\frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = +\frac{W}{g}\frac{d\gamma}{dt}\cdot v$

De (4) $D=\frac{1}{2}\rho v^2 S C_D = -\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}$

$\frac{(3)}{(4)} \rightarrow \frac{C_L}{C_D} = \frac{-d\gamma \cdot v}{dv}$

$$\frac{dv}{v} = -\underbrace{\left(\frac{C_D}{C_L}\right)}_{\simeq \frac{1}{E}} d\gamma = \frac{d\gamma}{E} \; ; \; \int_{v_i}^{v}\frac{dv}{v} = \frac{-1}{E}\int_{\gamma_i}^{\gamma} d\gamma \; ; \; \ln\frac{v}{v_i} = \frac{-1}{E}(\gamma-\gamma_i)$$

Por tanto: $\boxed{v = v(\gamma) = v_i\, e^{\frac{1}{E}(\gamma_i-\gamma)}}$

De (2) $\dot{h} = v \operatorname{sen}\gamma \rightarrow \frac{dh}{dt} = v\operatorname{sen}\gamma$

De (3) $\frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = +\frac{W}{g}\frac{d\gamma}{dt}\cdot v$

$\frac{(2)}{(3)} \rightarrow \frac{dh/\cancel{dt}}{\frac{W}{g}\frac{d\gamma}{\cancel{dt}}\cancel{v}} = +\frac{\cancel{v}\operatorname{sen}\gamma}{\frac{1}{2}\rho v^{\cancel{2}} S C_L}$

$$\underbrace{\rho}_{\rho_0 e^{-h/h_0}} dh = \frac{2W}{S g C_L}(+\operatorname{sen}\gamma)d\gamma \; ; \quad e^{-h/h_0}dh = \underbrace{\left(\frac{2W}{S C_L g \rho_0}\right)}_{\simeq 1/\lambda_L}(+\operatorname{sen}\gamma)d\gamma$$

$$\int_{h_i}^{h} e^{-h/h_0}dh = \frac{1}{\lambda_L}\int_{\gamma_i}^{\gamma}(+\operatorname{sen}\gamma)d\gamma \; ; \quad -h_0 e^{-h/h_0}\Big]_{h_i}^{h} = \frac{-1}{\lambda_L}\cos\gamma\Big]_{\gamma_i}^{\gamma}$$

$$+h_0\left(e^{-h/h_0} - e^{-h_i/h_0}\right) = \frac{1}{\lambda_L}\left(\cos\gamma - \cos\gamma_i\right) ;$$

$$e^{-h_i/h_0}\left(e^{\frac{-h+h_i}{h_0}} - 1\right) = \frac{1}{h_0\lambda_L}\left(\cos\gamma - \cos\gamma_i\right) ;$$

$$e^{\frac{-h+h_i}{h_0}} = 1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}\left(\cos\gamma - \cos\gamma_i\right) ;$$

Por tanto:

$$\boxed{h = h_i - h_0 \ln\left(1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0 \lambda_L}(\cos\gamma - \cos\gamma_i)\right)}$$ ✓

De (1) $\dot{x} = v\cos\gamma$
De (2) $\dot{h} = v\,\text{sen}\,\gamma$

$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v\cos\gamma \\ \frac{dh}{dt} = v\,\text{sen}\,\gamma \end{array}\right\} \frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{dx}{dh} = \frac{1}{\text{Tg}\,\gamma}$

ignorando $\gamma \approx 0$

$$dx = \frac{1}{\text{Tg}\gamma} dh = \frac{1}{\text{Tg}\gamma} \frac{dh}{d\gamma} \cdot d\gamma \quad (*)$$

Sabemos que $$\frac{dh}{d\gamma} = -\cancel{h_0} \cdot \frac{\cdot\left(+\frac{e^{h_i/h_0}}{\cancel{h_0}\lambda_L} \cdot (-\text{sen}\,\gamma)\right)}{1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}(\cos\gamma - \cos\gamma_i)} = + \frac{e^{h_i/h_0}}{\lambda_L} \cdot \frac{\text{sen}\,\gamma}{1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}(\cos\gamma - \cos\gamma_i)}$$

Sustituyendo en (*) $$dx = + \frac{e^{h_i/h_0}}{\lambda_L} \cdot \frac{\cos\gamma\, d\gamma}{1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}(\cos\gamma - \cos\gamma_i)}$$

Si integramos obtendremos $\longrightarrow$ $x = x(\gamma)$

3) Para que el planeador levante el vuelo se tiene que cumplir que en $h \geq 0$; $\gamma = 0$.

Por tanto: $$h|_{\gamma=0} = h_i - h_0 \ln\left(1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}(1 - \cos\gamma_i)\right) \geq 0$$

$$\frac{h_i}{h_0} \geq \ln\left(1 + \frac{e^{h_i/h_0}}{h_0\lambda_L}(1 - \cos\gamma_i)\right) ;$$

$$e^{h_i/h_o} \geqslant \left(1 + \frac{e^{h_i/h_o}}{h_o \lambda_L}\left(1 - \cos\gamma_i\right)\right)$$

$$e^{h_i/h_o} + 1 + \frac{e^{h_i/h_o}}{h_o \lambda_L}\left(1 - \cos\gamma_i\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{e^{h_i/h_o}\left(1 + \frac{(1 - \cos\gamma_i)}{\lambda_L}\right) \lesseqgtr 1}$$

PROBLEMA 11 (20.11.90)

Se considera la reentrada en la atmósfera, a una altura h_i y con un ángulo de inclinación de trayectoria γ_i, de un misil balístico no sustentador con empuje nulo y velocidad inicial V_i.

Se supone además que:

a) El coeficiente de resistencia aerodinámica del misil y la aceleración de la gravedad se pueden considerar constantes a lo largo de la trayectoria.

b) La densidad atmosférica puede expresarse, con buena aproximación, en función de la altura mediante la ley $\sigma = \rho/\rho_0 = e^{-h/\lambda}$, siendo ρ_0 y λ constantes conocidas.

c) $\varepsilon = \dfrac{g h_i}{V_i^2} \ll 1$ y $\dfrac{W \operatorname{sen}\gamma}{D} = O(\varepsilon)$

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del misil en un plano vertical, tomando h como variable independiente.

2º) Adimensionalizar las ecuaciones anteriores introduciendo las variables:

$$v = \frac{V}{V_i}, \quad \zeta = \frac{h}{h_i}, \quad \xi = \frac{x}{h_i}$$

3º) Suponiendo que ξ, v, γ se pueden expresar de la forma:

$$\xi(\zeta) = \xi_0(\zeta) + \varepsilon \xi_1(\zeta) + O(\varepsilon^2)$$
$$v(\zeta) = v_0(\zeta) + \varepsilon v_1(\zeta) + O(\varepsilon^2)$$
$$\gamma(\zeta) = \gamma_0(\zeta) + \varepsilon \gamma_1(\zeta) + O(\varepsilon^2)$$

determinar $\gamma_0(\zeta), \gamma_1(\zeta), v_0(\zeta), \xi_0(\zeta)$.

NOTA

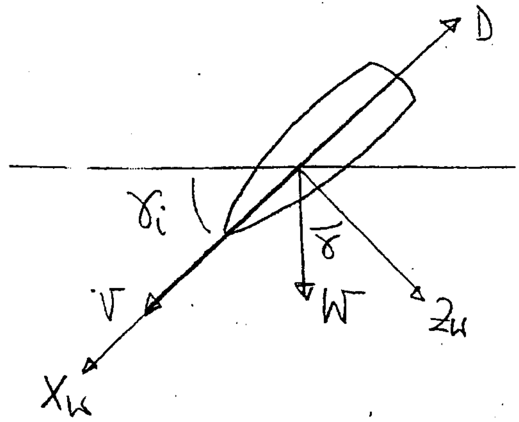
Se suponen conocidos los datos geométricos, aerodinámicos y másicos del misil necesarios para la resolución del problema.

PROBLEMA 11 (20-11-1990)

No sustentador : $L=0$
Empuje nulo : $T=0$
C_D y g son constantes

$\sigma \stackrel{!}{=} \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-h/\lambda}$; ρ_0, λ constantes

$\epsilon = \frac{g h_i}{V_i^2} \ll 1$; $\frac{W \operatorname{sen}\gamma}{D} = O(\epsilon)$



1) Ecuaciones cinemáticas : $\dot{x} = V\cos\gamma$ (1) $(\gamma<0)$
$\dot{h} = V\operatorname{sen}\gamma$ (2)

Ecuaciones dinámicas : $\vec{i}_W)$ $-D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ (3)

$\vec{k}_W)$ $-W\cos\gamma = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} = \frac{W}{g}V\frac{d\gamma}{dt} = \frac{W}{g}V\dot{\gamma}$ (4)

$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{dx}{dh} = \frac{1}{\operatorname{Tg}\gamma} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{\operatorname{Tg}\gamma}dh}$ (A)

Sabemos que $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho_0 e^{-h/\lambda} S V^2 C_D$

Sustituyendo en (3) $\longrightarrow$ $\boxed{-\frac{1}{2}\rho_0 e^{-h/\lambda} V^2 S C_D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dh}\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{V\operatorname{sen}\gamma \text{ (De (2))}}}$ (B)

De (4) $\longrightarrow$ $\boxed{-\cancel{W}\cos\gamma = \frac{\cancel{W}}{g}V\frac{d\gamma}{dh}\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{V\operatorname{sen}\gamma \text{ (De (2))}}}$ (C)

De (2) $\longrightarrow$ $\frac{dh}{dt} = V\operatorname{sen}\gamma \longrightarrow \boxed{dt = \frac{dh}{V\operatorname{sen}\gamma}}$ (D)

(A)(B)(C) y (D) constituye un sistema de 4 ecuaciones que con la variable independiente h determina : x, t, γ, V.

2) Adimensionalización : $v = \frac{V}{V_i}$; $\zeta = \frac{h}{h_i}$; $\xi = \frac{x}{h_i}$

(A) $dx = \frac{dh}{Tg\gamma} \longrightarrow \cancel{h_i} d\xi = \frac{\cancel{h_i} d\zeta}{Tg\gamma}$; $d\xi = \frac{d\zeta}{Tg\gamma}$ (A*)

(B) $-\frac{1}{2}\rho_0 e^{-h/\lambda} V^2 S C_D - W \operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\operatorname{sen}\gamma \cdot V \cdot \frac{dV}{dh} \longrightarrow$

$\longrightarrow -\frac{1}{2}\rho_0 e^{-h_i\zeta/\lambda} V_i^2 v^2 S C_D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\operatorname{sen}\gamma\, V_i^2 v \cdot \frac{dv}{d\zeta} \cdot \frac{1}{h_i}$

Del enunciado sabemos que $\frac{g h_i}{V_i^2} = \epsilon$ y si llamamos a $\frac{1}{2}\rho_0 V_i^2 S C_D = D^*$

$-D^* e^{-h_i\zeta/\lambda} v^2 - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\epsilon} W \operatorname{sen}\gamma\, v \frac{dv}{d\zeta}$

$\frac{-D^*}{W\operatorname{sen}\gamma}\epsilon \cdot v e^{-h_i\zeta/\lambda} - \frac{\epsilon}{v} = \frac{dv}{d\zeta} \longrightarrow \frac{dv}{d\zeta} = -\frac{\epsilon}{v}\left(1 + \frac{D^*}{W\operatorname{sen}\gamma} v^2 e^{-h_i\zeta/\lambda}\right)$ (B*)

(C) $-\cos\gamma = \frac{V^2}{g}\operatorname{sen}\gamma \frac{d\gamma}{dh} \longrightarrow -\cos\gamma = \frac{V_i^2 v^2}{g}\operatorname{sen}\gamma \frac{d\gamma}{d\zeta}\cdot\frac{1}{h_i}$

Como $\epsilon = \frac{g h_i}{V_i^2} \longrightarrow -\frac{1}{Tg\gamma}\epsilon = v^2 \frac{d\gamma}{d\zeta} \longrightarrow \frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{-\epsilon}{v^2 Tg\gamma}$ (C*)

(D) $dt = \frac{dh}{V\operatorname{sen}\gamma} \longrightarrow dt = \frac{h_i\, d\zeta}{V_i v \operatorname{sen}\gamma}$; $d\Big(\underbrace{\frac{t}{h_i/V_i}}_{\tau}\Big) = \frac{d\zeta}{\operatorname{sen}\gamma \cdot v}$

τ (Tiempo adimensional)

$\frac{d\tau}{d\zeta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma\, v}$ (D*)

3) De (A*) $\dfrac{d\xi}{d\rho} = \dfrac{d(\xi_0+\epsilon\xi_1+O(\epsilon^2))}{d\rho} = \dfrac{d\xi_0}{d\rho}+\epsilon\dfrac{d\xi_1}{d\rho} = \dfrac{1}{Tg\gamma}$

- $Tg\gamma = Tg(\gamma_0+\epsilon\gamma_1+O(\epsilon^2)) = (\gamma_0+\epsilon\gamma_1)+\frac{1}{3}(\gamma_0+\epsilon\gamma_1)^3 = (\gamma_0+\frac{1}{3}\gamma_0+\dots)+O(\epsilon) =$

$$= Tg\gamma_0 + O(\epsilon) = Tg\gamma_0(1+O(\epsilon)^*)$$

- $\dfrac{1}{Tg\gamma} = \dfrac{1}{Tg\gamma_0}\cdot\dfrac{1}{(1+O(\epsilon)^*)} = \dfrac{1}{Tg\gamma_0}(1-O(\epsilon)^*)$

Sustituyendo : $\dfrac{d\xi_0}{d\rho}+\epsilon\dfrac{d\xi_1}{d\rho} = \dfrac{1}{Tg\gamma_0}(1-O(\epsilon)^*)$

$$\hookrightarrow \frac{d\xi_0}{d\rho} = \frac{1}{Tg\gamma_0} \quad (F)$$

De (C*) $\dfrac{d\gamma}{d\rho} = \dfrac{-\epsilon}{v^2 Tg\gamma}$; $\dfrac{d[\gamma_0+\epsilon\gamma_1+O(\epsilon^2)]}{d\rho} = -\dfrac{\epsilon}{(v_0+\epsilon v_1+O(\epsilon^2))^2 Tg\gamma}$

$$\frac{d\gamma_0}{d\rho}+\epsilon\frac{d\gamma_1}{d\rho} = -\frac{\epsilon}{Tg\gamma_0 v_0^2} \quad (*)$$

- $(v_0+\epsilon v_1+O(\epsilon^2))^2 Tg\gamma = (v_0^2+O(\epsilon^2))Tg\gamma_0(1+O(\epsilon)^*) = Tg\gamma_0 v_0^2(1+O(\epsilon^2))$

- $\dfrac{\epsilon}{(v_0+\epsilon v_1+O(\epsilon^2))^2 Tg\gamma} = \dfrac{1}{Tg\gamma_0 v_0^2}\epsilon(1-O(\epsilon^2)) = \dfrac{\epsilon}{Tg\gamma_0 v_0^2}+O(\epsilon^3)$

De (*) $\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\gamma_0}{d\rho} = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_0 = cte} = \gamma_i \\ \dfrac{d\gamma_1}{d\rho} = -\dfrac{1}{Tg\gamma_0 v_0^2} \longrightarrow \boxed{\gamma_1 = -\dfrac{1}{Tg\gamma_0 v_0^2}(\rho-1)} \end{cases}$ $\tau=0\begin{cases}\gamma_1=0\\ \rho=1\end{cases}$

Si ahora sustituimos $\gamma_0 = cte$ en (F) tenemos:

$$\frac{d\xi_0}{d\rho} = \frac{1}{Tg\gamma_0} \longrightarrow \boxed{\xi_0 = \frac{1}{Tg\gamma_0}(\rho - 1)} \quad \text{En } \tau=0 \begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \rho = 1 \end{cases}$$

De (D*) $\dfrac{d\tau}{d\rho} = \dfrac{1}{v\,\text{sen}\,\gamma}$ (Suponemos $\tau = \tau_0 + \epsilon\tau_1 + O(\epsilon^2)$)

- $\text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,(\gamma_0 + \epsilon\gamma_1 + O(\epsilon^2)) = (\gamma_0 + \epsilon\gamma_1) - \frac{1}{3!}(\gamma_0 + \epsilon\gamma_1)^3 + \ldots =$
  $= (\gamma_0 - \frac{1}{3}\gamma_0^3 + \ldots) + O(\epsilon) = \text{sen}\,\gamma_0 + O(\epsilon)$
- $v\,\text{sen}\,\gamma = (v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2))(\text{sen}\,\gamma_0 + O(\epsilon)) = \text{sen}\,\gamma_0\, v_0 + O(\epsilon)$
- $\dfrac{1}{v\,\text{sen}\,\gamma} = \dfrac{1}{v_0\,\text{sen}\,\gamma_0\,(1 + O(\epsilon)^*)} = \dfrac{1}{v_0\,\text{sen}\,\gamma_0}(1 - O(\epsilon^*))$

Sustituyendo $\dfrac{d\tau_0}{d\rho} = \dfrac{1}{v_0\,\text{sen}\,\gamma_0} \longrightarrow \boxed{\tau_0 = \dfrac{1}{v_0\,\text{sen}\,\gamma_0}(\rho - 1)}$ En $\tau=0$; $\rho = 1$

De (B*) $$\frac{dv}{d\rho} = \frac{-\epsilon}{v}\Big(1 + \underbrace{\frac{D^*}{W\,\text{sen}\,\gamma}\, v^2 e^{-hi\xi/\lambda}}_{\sim 1/O(\epsilon)}\Big)$$

$$\frac{d(v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2))}{d\rho} = -\frac{\epsilon}{(v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2))}\left(1 + \frac{1}{O(\epsilon)}\right) = -\frac{\epsilon}{v_0}\left(1 - \epsilon\frac{v_1}{v_0}\right)\left(1 + \frac{1}{O(\epsilon)}\right) =$$

$$= -\frac{\epsilon}{v_0}\left(1 + \frac{1}{O(\epsilon)} - \epsilon\frac{v_1}{v_0} - \epsilon\frac{v_1}{v_0 \cdot O(\epsilon)}\right) =$$

$$= -\frac{\epsilon}{v_0 \cdot O(\epsilon)} - \frac{\epsilon}{v_0}\left(1 - \frac{\epsilon}{O(\epsilon)}\cdot\frac{v_1}{v_0}\right) + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{dv_0}{d\rho} + \epsilon\frac{dv_1}{d\rho} = \underbrace{-\frac{\epsilon}{v_0 \cdot O(\epsilon)}}_{\sim O(1)} \underbrace{- \frac{\epsilon}{v_0}\left(1 - \frac{\epsilon}{O(\epsilon)} \cdot \frac{v_1}{v_0}\right)}_{\sim O(\epsilon)}$$

$$\frac{dv_0}{d\rho} = -\frac{\epsilon}{v_0 \cdot O(\epsilon)} = -\frac{\epsilon}{v_0} \cdot \frac{D^*}{W \operatorname{sen}\gamma} v^2 e^{-h_i\rho/\lambda} = -\frac{\epsilon D^* v_0^{\cancel{2}} e^{-h_i\rho/\lambda}}{\cancel{v_0} W \operatorname{sen}\gamma_0}$$

$$\frac{dv_0}{d\rho} = -\frac{\epsilon D^*}{W \operatorname{sen}\gamma_0} v_0 e^{-h_i\rho/\lambda} \quad ; \quad \frac{dv_0}{v_0} = -\frac{\epsilon D^*}{W \operatorname{sen}\gamma_0} e^{-h_i\rho/\lambda} d\rho \; ;$$

$$\ln\frac{v_0}{1} = + \frac{\epsilon D^*}{W \operatorname{sen}\gamma_0} \cdot \frac{\lambda}{h_i} e^{-h_i\rho/\lambda}\Big|_1^{\rho} \rightarrow \boxed{v_0 = \exp\left(\frac{\epsilon D^*}{W \operatorname{sen}\gamma_0} \cdot \frac{\lambda}{h_i}\left(e^{-\frac{h_i\rho}{\lambda}} - e^{-\frac{h_i}{\lambda}}\right)\right)}$$

$$\text{En } \tau = 0 \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1 \; ; \; v_1 = 0 \\ \rho = 1 \end{array} \right.$$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H3: 05-12-98

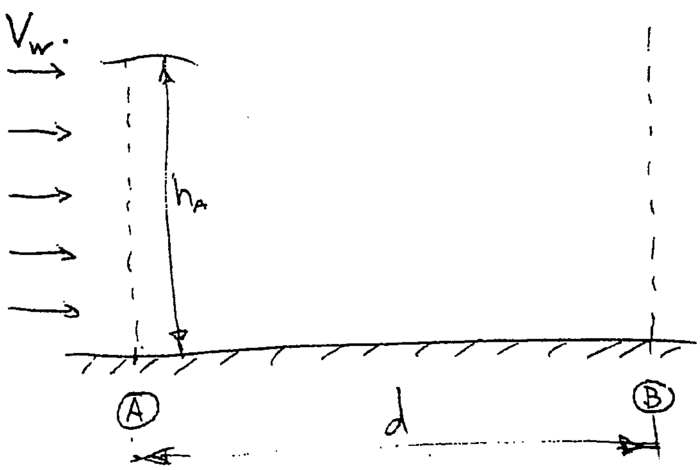
Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel desde la vertical de un punto A hasta la vertical de un punto B, en presencia de un viento horizontal de cola de módulo V_w constante y conocido, y vuelve desde la vertical de B hasta la de A en presencia del mismo viento, pero ahora de cara. Todo el vuelo (ida y vuelta) lo realiza a velocidad aerodinámica V constante y a ángulo de asiento de velocidad aerodinámica constante.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes).
- La altura h_A es lo suficientemente grande como para que el planeador no choque contra el suelo; la distancia d entre los puntos A y B es conocida.
- La transición efectuada en la vertical de B para dar la vuelta es despreciable.
- Los módulos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto a tierra son pequeños; $V > V_w$.
- ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

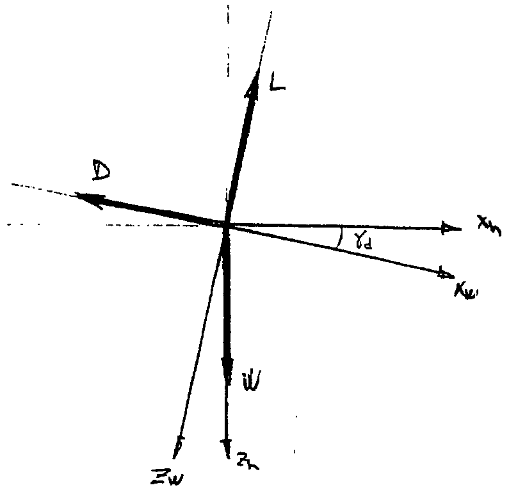
Se pide:

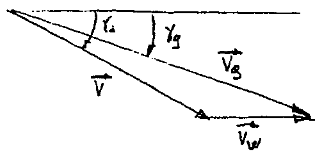
1. Determinar la velocidad aerodinámica, V, y el coeficiente de sustentación, C_L, que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical, así como la altura total descendida mínima. Comparar estos resultados con los que se obtendrían para atmósfera en calma.
2. Repetir el apartado anterior para el caso de viento en sentido contrario (desde A a B de cara y desde B a A de cola). Comentar los resultados obtenidos.

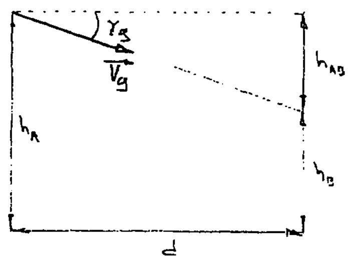


1)

Tramo de Ida







$$\left.\begin{array}{l} V_g \operatorname{sen} \gamma_g = V \operatorname{sen} \gamma_d \\ V_g \cos \gamma_g = V \cos \gamma_d + V_w \end{array}\right\} \quad tg\, \gamma_g = \frac{V \operatorname{sen} \gamma_d}{V \cos \gamma_d + V_w} \overset{\gamma_d \ll 1}{\simeq} \frac{V \gamma_d}{V + V_w}$$

$$tg\, \gamma_d = \frac{h_{AB}}{d} \Rightarrow h_{AB} = d\, tg\, \gamma_d = \frac{V \cdot d \cdot \gamma_d}{V + V_w}$$

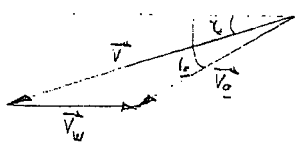
$$L = W \cos \gamma_d = W$$

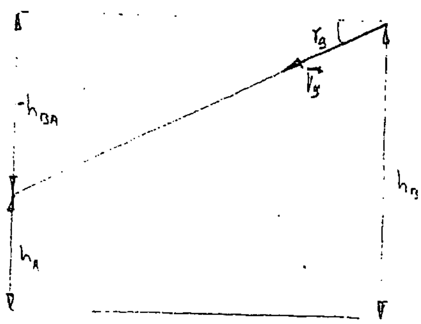
$$D = W \operatorname{sen} \gamma_d = W \gamma_d \Rightarrow \gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{\frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{D_0} + K C_L^2)}{W}$$

$$C_L = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho S V^2} \Rightarrow \gamma_d = \frac{\rho S V^2}{2W} \left(C_{D_0} + K \frac{4 W^2}{\rho^2 S^2 V^4} \right)$$

Tramo de Vuelta

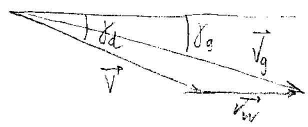
$\gamma_d \rightarrow$ Constante en todo el vuelo



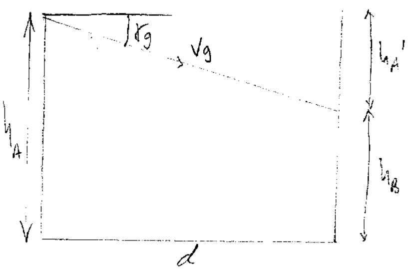


(7)

1)



$$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$$



$$tg\,\gamma_g = \frac{h_A'}{d} \Rightarrow \gamma_g = \frac{h_A'}{d}$$

$$h_A' = \gamma_g \cdot d = \frac{V d \gamma_d}{V+V_W}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_g \cos\gamma_g = V \cos\gamma_d + V_W \\ V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma_d \end{array}\right| \longrightarrow tg\,\gamma_g = \frac{V \operatorname{sen}\gamma_d}{V \cos\gamma_d + V_W} \Rightarrow \gamma_g = \frac{V\gamma_d}{V+V_W}$$

$$-D + W\gamma_d - \cancel{m\dot{V}}^{\,0} = 0 \;;\; D = W\gamma_d$$

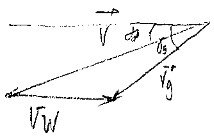
$$-L + W + \cancel{mV\dot{\gamma}}^{\,0} = 0 \;;\; L = W$$

$$\dot{x}_e = V$$

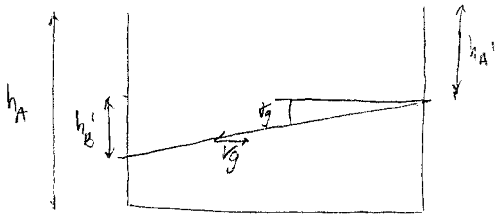
$$\dot{h} = -V \operatorname{sen}\gamma_d$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = W\gamma_d \sim \gamma_d = \frac{\rho S V^2}{2W}\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right]$$



$$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W}$$



$$tg\,\gamma_g = \frac{h_B'}{d} \Rightarrow \gamma_g = \frac{h_B'}{d}$$

$$h_B' = \gamma_g \cdot d = \frac{V d \gamma_d}{V - V_W}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma_d \\ V_g \cos\gamma_g = V \cos\gamma_d - V_W \end{array}\right| \longrightarrow tg\,\gamma_g = \frac{V \operatorname{sen}\gamma_d}{V\cos\gamma_d - V_W} \Rightarrow \gamma_g = \frac{V \cdot \gamma_d}{V - V_W}$$

$$h = h_A' + h_B' = \frac{Vd\gamma_d}{V+V_W} + \frac{Vd\gamma_d}{V-V_W} = \frac{(V-V_W)Vd\gamma_d + (V+V_W)Vd\gamma_d}{(V+V_W)(V-V_W)} = \frac{2V^2 d \cdot \gamma_d}{V^2 - V_W^2}$$

$$h = \frac{2V^2 d}{V^2 - V_W^2} \cdot \frac{\rho S V^2}{\cancel{2}W}\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right] = \frac{1}{W(V^2 - V_W^2)}\left(\rho S V^4 d\, C_{D0} + \frac{4KW^2 d}{\rho S}\right) = \frac{\rho S d}{W(V^2 - V_W^2)}\left[C_{D0} V^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right]$$

$$\frac{dh}{dV} = 0 = \frac{4V^3 C_{D0}(V^2 - V_W^2) - \left(C_{D0}V^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right)2V}{V^2 - V_W^2} \Rightarrow 4C_{D0}V^5 - 4V^3 C_{D0} V_W^2 - 2C_{D0}V^5 - \frac{8KW^2}{\rho^2 S^2}V = 0$$

$$2C_{D0}V^4 - 4C_{D0}V_W^2 V^2 - \frac{8KW^2}{\rho^2 S^2} = 0 \;;\; V^4 - 2V_W^2 V^2 - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = 0 \sim V^2 = \frac{2V_W^2 \pm \sqrt{4V_W^4 + \frac{16KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}{2}$$

$$\boxed{V = \sqrt{V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}$$

$$\boxed{C_L = \frac{2W}{\rho S \left[V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}\right]}}$$

Resolver el problema al revés es análogo en todos los sentidos.

$$\left.\begin{aligned} V_g \operatorname{sen}\gamma_g &= V \operatorname{sen}\gamma_t \\ V_g \cos\gamma_g &= V \cos\gamma_t - V_w \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma_g = \frac{V \operatorname{sen}\gamma_t}{V\cos\gamma_t - V_w} \simeq \frac{V\gamma_t}{V - V_w}$$

$$h = h_{AB} + h_{BA} = \frac{V\gamma_t}{V+V_w} + \frac{V\gamma_t}{V - V_w} = \frac{2V^2 \cdot d \cdot \gamma_d}{V^2 - V_w^2}$$

$$h = \frac{2V^2 d}{V^2 - V_w^2}\,\frac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D_0} + K\frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \frac{\rho S d}{V^2 - V_w^2}\left(C_{D_0} V^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right)$$

$$\frac{dh}{dV} = 0 = \frac{4C_{D_0}V^3(V^2 - V_w^2) - \left(C_{D_0}V^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right)2V}{(V^2 - V_w^2)}$$

$$2C_{D_0}V^2(V^2 - V_w^2) - C_{D_0}V^4 - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2} = 0$$

$$V^4 - 2V_w^2 V^2 - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D_0}} = 0 \Rightarrow V^2 = \frac{2V_w^2 \pm \sqrt{4V_w^4 + \frac{16KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D_0}}}}{2}$$

$$\boxed{V_{opt} = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D_0}}}}}$$

$$C_{L_{opt}} = \frac{2W}{\rho S V_{opt}^2}$$

$$\boxed{C_{L_{opt}} = \frac{2W}{\rho S}\,\frac{1}{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D_0}}}}}$$

2)

Con el viento de cara a la ida, el resultado es el mismo que el anterior puesto que la altura de la ida del apartado anterior será la de la vuelta en este y de la vuelta el de ida .

La igualdad en resultados se debe a que en la hipótesis 5, se considera ρ constante con la altura. Si no se considerara constante, la resistencia aerodinámica aumenta con ρ, es decir, al disminuir la altura. Por lo tanto, al tener el viento de cara a la vuelta se consigue que la variación de altura sea menor

H3: 05-12-98

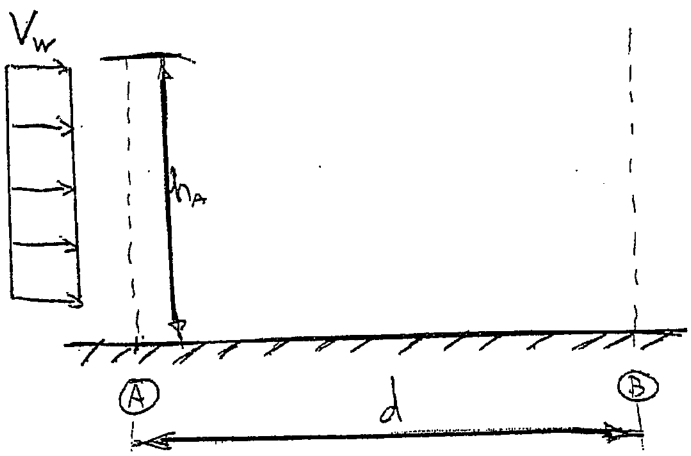
Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel desde la vertical de un punto A hasta la vertical de un punto B, en presencia de un viento horizontal de cola de módulo V_w constante y conocido, y vuelve desde la vertical de B hasta la de A en presencia del mismo viento, pero ahora de cara. Todo el vuelo (ida y vuelta) lo realiza a velocidad aerodinámica V constante y a ángulo de asiento de velocidad aerodinámica constante.

Suponiendo además que:

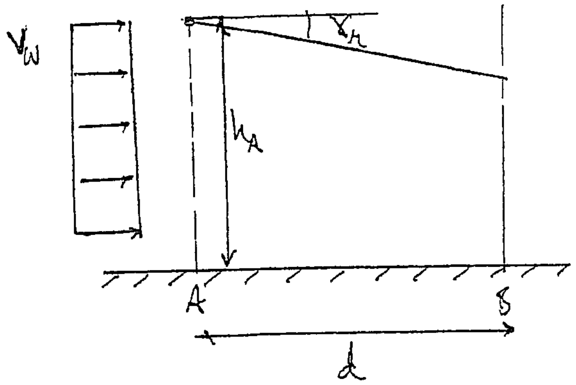
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes).
- La altura $h_A$es lo suficientemente grande como para que el planeador no choque contra el suelo; la distancia d entre los puntos A y B es conocida.
- La transición efectuada en la vertical de B para dar la vuelta es despreciable.
- Los módulos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto a tierra son pequeños; $V > V_w$.
- ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

Se pide:

1. Determinar la velocidad aerodinámica, V, y el coeficiente de sustentación, C_L, que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical, así como la altura total descendida mínima. Comparar estos resultados con los que se obtendrían para atmósfera en calma.
2. Repetir el apartado anterior para el caso de viento en sentido contrario (desde A a B de cara y desde B a A de cola). Comentar los resultados obtenidos.

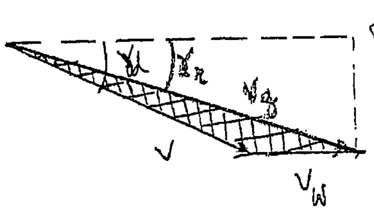


$\boxed{\text{H3 (5-12-98)}}$



- Planeador ⇒ vuelo simétrico en plano vertical con alas a nivel
- V, γ = ctes en todo el vuelo

$\boxed{1}$

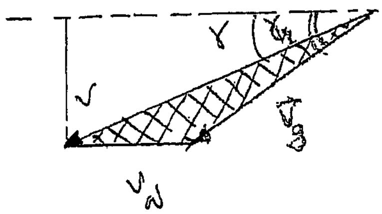



¡ ! γ con viento

$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_W$

$tg\,\gamma_r = \frac{V\,sen\,\gamma_d}{V\cos\gamma_d + V_W} \approx \frac{V\gamma_d}{V+V_W} \Rightarrow \gamma_r^{AB} \approx \frac{V\gamma_d}{V+V_W}$

$h_{AB} = d\,tg\,\gamma_r \approx d\cdot\gamma_r = \frac{dV\gamma_d}{V+V_W}$

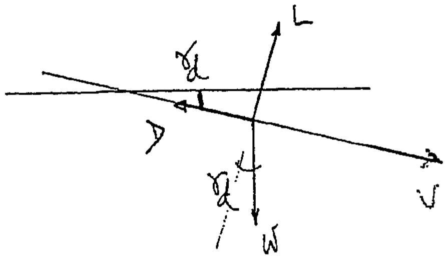


En sentido contrario (B→A):

$tg\,\gamma_r = \frac{V\,sen\,\gamma_d}{V\cos\gamma_d - V_W} \approx \frac{V\gamma_d}{V-V_W} \approx \gamma_r^{BA}$

$h_{BA} = \frac{dV\gamma_d}{V-V_W}$

$h_{ABA} = h_{AB} + h_{BA} = \frac{2V^2 d\gamma_d}{V^2 - V_W^2}$



Ec.^{nes} del Movimiento:

$$\begin{cases} -L + W\cos\gamma_d = 0 \Rightarrow C_L \approx \frac{2W}{\rho V^2 S} \\ -D + W\,sen\,\gamma_d = 0 \Rightarrow \gamma_d \approx \frac{D}{W} \Rightarrow \end{cases}$$

vel cte

$\Rightarrow \gamma_d = \frac{\rho V^2 S}{2W}(C_{D0} + kC_L^2) = \frac{\rho V^2 S}{2W} C_{D0} + \frac{2kW}{\rho V^2 S}$

$\Rightarrow h_{ABA} = \frac{2dV^2}{V^2 - V_W^2}\left[\frac{\rho V^2 S}{2W} C_{D0} + \frac{2kW}{\rho V^2 S}\right]$

$$\frac{dh_{ABA}}{dV} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{opt} = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{k}{C_{D0}}\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^2}}}$$

$$\boxed{C_{L\,opt} = \frac{2W}{\rho V_{opt}^2 S}}$$

$\boxed{2}$ h_{ABA} la misma que antes xq la variación de altura es pequeña (ρ, S cte). No sería así si la variación de altura fuera muy grande

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H3: 05-12-98

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel desde la vertical de un punto A hasta la vertical de un punto B, en presencia de un viento horizontal de cola de módulo V_w constante y conocido, y vuelve desde la vertical de B hasta la de A en presencia del mismo viento, pero ahora de cara. Todo el vuelo (ida y vuelta) lo realiza a velocidad aerodinámica V constante y a ángulo de asiento de velocidad aerodinámica constante.

Suponiendo además que:

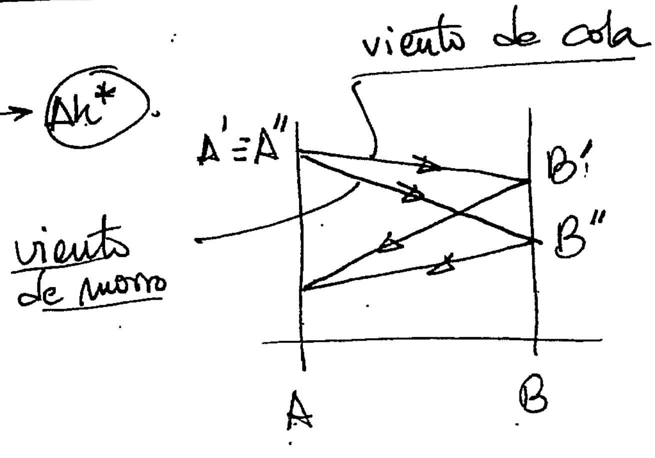
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes).
- La altura h_A es lo suficientemente grande como para que el planeador no choque contra el suelo; la distancia d entre los puntos A y B es conocida.
- La transición efectuada en la vertical de B para dar la vuelta es despreciable.
- Los módulos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto a tierra son pequeños; $V > V_w$.
- ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

Se pide:

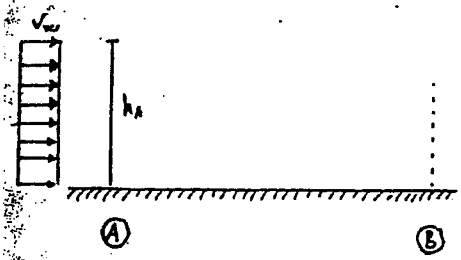
1. Determinar la velocidad aerodinámica, V, y el coeficiente de sustentación, C_L, que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical, así como la altura total descendida mínima. Comparar estos resultados con los que se obtendrían para atmósfera en calma.
2. Repetir el apartado anterior para el caso de viento en sentido contrario (desde A a B de cara y desde B a A de cola). Comentar los resultados obtenidos.

$$\boxed{\Delta h = \frac{2d}{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2}\left(\frac{\rho V^2 C_{D0}}{2W} + \frac{2kW}{\rho V^2 S}\right) = \Delta h(V)}$$

$$\frac{\partial(\Delta h)}{\partial V} = 0 \longrightarrow V^* \longrightarrow \Delta h^*$$



Problema nº H3: 05-12-98

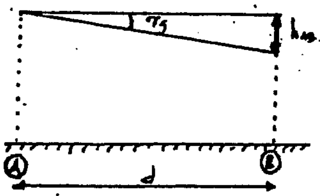


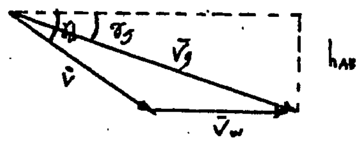
Tanto a la ida como a la vuelta: $V = cte$ y $\gamma = -\gamma_d = cte \ll 1$

$V > V_w$

1) Determinar la velocidad aerodinámica, V, y el coeficiente de sustentación, C_L, que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical, así como la altura total descendida mínima. Comparar estos resultados con los que se obtuvieron para atmósfera en calma.

Tramo A-B:



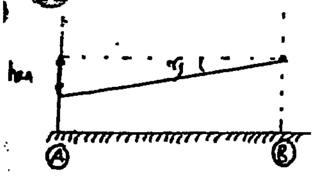


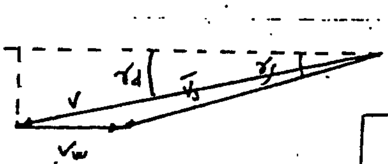
$\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w$

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma_g^{AB} = \frac{V \cdot \sin \gamma_d}{V \cdot \cos \gamma_d + V_w} \overset{\gamma_d \ll 1}{=} \frac{V \cdot \gamma_d}{V + V_w}}$$

$$\boxed{h_{AB} = d \cdot \operatorname{tg} \gamma_g^{AB} \simeq d \cdot \gamma_g^{AB} = \frac{d \cdot V \cdot \gamma_d}{V + V_w}}$$

Tramo B-A:





$\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w$

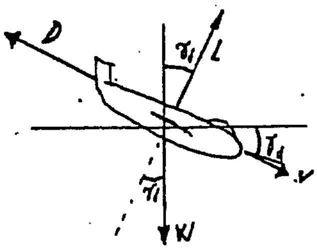
$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma_g^{BA} = \frac{V \cdot \sin \gamma_d}{V \cdot \cos \gamma_d - V_w} \simeq \frac{V \cdot \gamma_d}{V - V_w}}$$

$$\boxed{h_{BA} = d \cdot \operatorname{tg} \gamma_g^{BA} = d \cdot \frac{V \cdot \sin \gamma_d}{V \cdot \cos \gamma_d - V_w} \simeq \frac{d \cdot V \cdot \gamma_d}{V - V_w}}$$

$$h_{TOTAL} = h_{AB} + h_{BA} = \frac{V \cdot d \cdot \gamma_d}{V + V_w} + \frac{V \cdot d \cdot \gamma_d}{V - V_w} = \frac{(V - V_w)(V \cdot d \cdot \gamma_d) + (V + V_w)(V \cdot d \cdot \gamma_d)}{(V + V_w)(V - V_w)} =$$

$$\boxed{h_{TOTAL} = \underline{d} \cdot \left[\frac{V \cdot \gamma}{V + V_w} + \frac{V \cdot \gamma}{V - V_w} \right]} \quad \Rightarrow h = h(V, \gamma)$$

En ejes viento



- $-L + W\cos\gamma_d = 0 \Rightarrow (\gamma_d \ll 1) \Rightarrow L \simeq W \Rightarrow \boxed{C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}}$

- $-D + W\sin\gamma_d = 0$ ($V = cte$) $\Rightarrow \boxed{D = W\cdot\gamma_d} \Rightarrow \gamma_d = \frac{D}{W}$

$$\gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + k C_L^2) = \frac{\rho S V^2}{2W} C_{D0} + \frac{2kW}{\rho S V^2} \cdot \gamma_d(V)$$

$$\boxed{\gamma_d = \gamma_d(V) = \frac{\rho S V^2}{2W} C_{D0} + \frac{2kW}{\rho S V^2}}$$

Tenemos $h = h(\gamma_d, V)$ y $\gamma_d = \gamma_d(V) \Rightarrow h = h(V)$

$$\boxed{h = 2d_0 \frac{\left(\frac{\quad}{2W}\cdot C_{D0} + \frac{\quad}{\rho S}\right)}{V^2 - V_w^2} = \frac{2dV^2}{V^2 - V_w^2}\cdot\left(\cdot \quad \right) = h(V)}$$

Si quitamos el viento, es la velocidad base.

$$\frac{dh}{dV} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{opt} = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{k}{C_{D0}}\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^2}}}$$

$$\boxed{C_L = \frac{2W}{\rho S\left[V_w^2 + \left(V_w^4 + \frac{k}{C_{D0}}\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^2\right)^{1/2}\right]}}$$

2º) Repetir el apartado anterior para el caso de viento en sentido contrario (desde A a B de cara y desde B a A de cola). Comentar los resultados obtenidos.

Sale lo mismo pero se cambian por tanto $h_{AB} \longrightarrow h_{BA}$
$h_{BA} \longrightarrow h_{AB}$

PASEO-MENTAL $\rightarrow$ podría verse si consideramos los cambios de densidad al descender. Sabemos que para aviones $\gamma_d \sim \frac{1}{E} <$ avión ~ 15, planeador ~ 40

$D\uparrow$ cuando $\rho\uparrow \Rightarrow h\downarrow \Rightarrow$ descenderá menos si va la zona que más me cuesta (más abajo).

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 06.06.05

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1°

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel desde la vertical de un punto A hasta la vertical de un punto B, en presencia de un viento horizontal de cara de módulo V_w constante y conocido, y vuelve desde la vertical de B hasta la de A en presencia del mismo viento, pero ahora de cola. Todo el vuelo (ida y vuelta) lo realiza a velocidad aerodinámica, V, constante y a ángulo de asiento de velocidad aerodinámica constante.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el peso W, la superficie alar S, los coeficientes constantes de la polar parabólica, etc.).

b) La altura h_A es lo suficientemente grande como para que el planeador no choque contra el suelo; la distancia d entre los puntos A y B es conocida.

c) La transición efectuada en la vertical de B para dar la vuelta es despreciable.

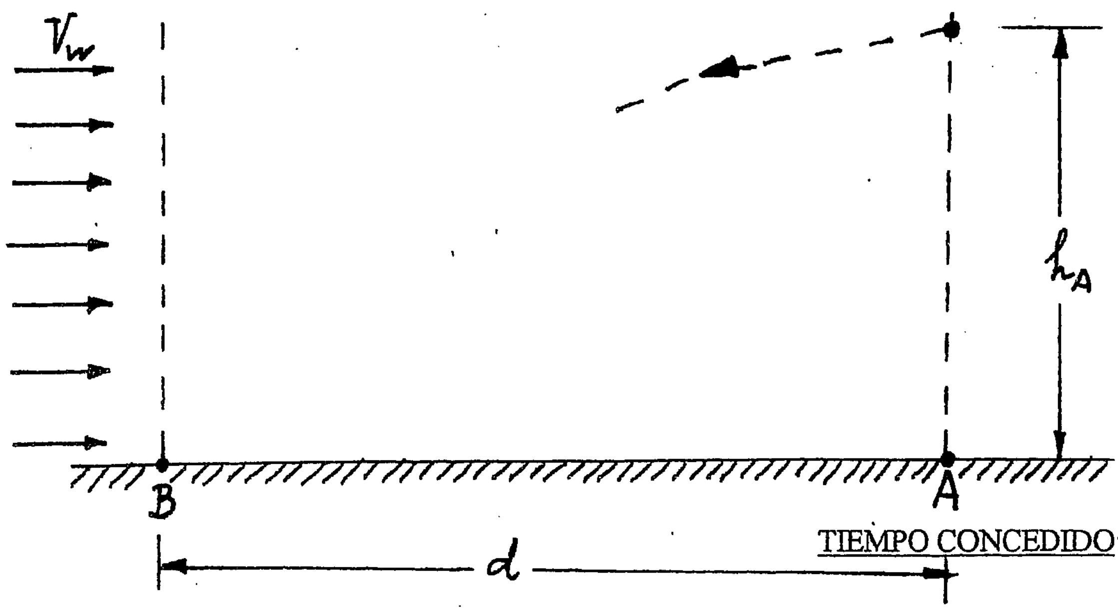
d) Los módulos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto a tierra son pequeños; $V > V_w$.

e) ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

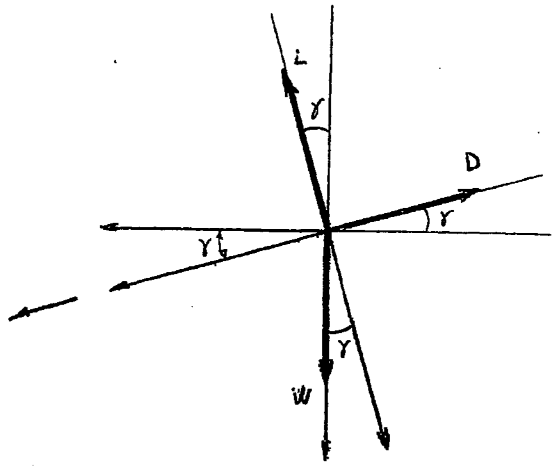
Se pide:

1°) Determinar la velocidad aerodinámica, V, y el coeficiente de sustentación, C_L, que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical. Determinar asimismo esa altura total descendida mínima y el tiempo total que emplea el planeador en ir y volver.

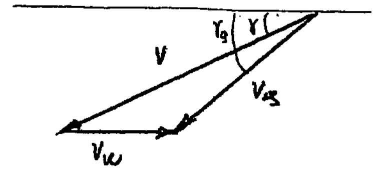
2°) Discutir la influencia sobre la velocidad aerodinámica y sobre la altura descendida, obtenidas en el apartado anterior, de V_w, W/S y ρ.



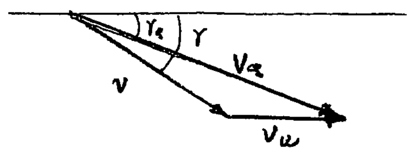
TIEMPO CONCEDIDO: 1^h



Tramo de Ida



Tramo de Vuelta



Tramo de ida:

$$\left.\begin{aligned} V_g \operatorname{sen} \gamma_g &= V \operatorname{sen} \gamma \\ V_g \cos \gamma_g &= V \cos \gamma - V_W \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma_g = \frac{V \operatorname{sen} \gamma}{V \cos \gamma - V_W} \xrightarrow[\text{pequeños}]{\text{ángulos}} \gamma_g = \frac{V\gamma}{V - V_W}$$

$$L = W \cos \gamma \Rightarrow L = W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

$$D = W \operatorname{sen} \gamma \Rightarrow D = W\gamma = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left(C_{D0} + K C_L^2 \right)$$

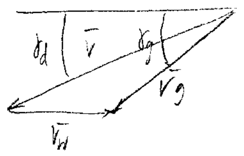
$$\gamma = \frac{\rho V^2 S \left(C_{D0} + K C_L^2 \right)}{2W}$$

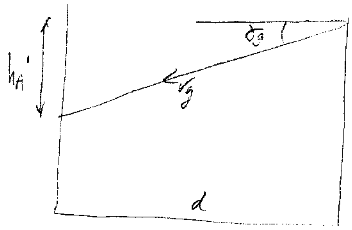
$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho V^2 S C_{D0} + \rho V^2 S K \dfrac{4W^2}{\rho^2 V^4 S^2}}{2W}$$

$$\gamma = \frac{\rho V^2 S C_{D0} + \dfrac{4W^2 K}{\rho V^2 S}}{2W}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_g \simeq \gamma_g = \frac{\Delta h_1}{d} \Rightarrow \Delta h_1 = d \frac{V\gamma}{V - V_W}$$

8



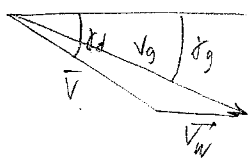


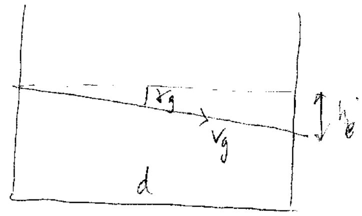
$$\tan\gamma_g = \frac{h_A'}{d} \Rightarrow \gamma_g = \frac{h_A'}{d}$$

$$h_A' = \gamma_g \cdot d = \frac{V d \cdot \gamma_d}{V - V_W}$$

$$\vec{V_g} = \bar V - \bar V_W$$

$$\left.\begin{aligned} V_g \sin\gamma_g &= V \sin\gamma_d \\ V_g \cos\gamma_g &= V\cos\gamma_d - V_W \end{aligned}\right| \longrightarrow \tan\gamma_g = \frac{V\sin\gamma_d}{V\cos\gamma_d - V_W} \Rightarrow \gamma_g = \frac{V\cdot\gamma_d}{V - V_W}$$





$$\tan\gamma_g = \frac{h_B'}{d} \Rightarrow \gamma_g = \frac{h_B'}{d}$$

$$h_B' = \gamma_g \cdot d = \frac{V d \cdot \gamma_d}{V + V_W}$$

$$\vec{V_g} = \bar V + \bar V_W$$

$$\left.\begin{aligned} V_g \sin\gamma_g &= V \sin\gamma_d \\ V_g \cos\gamma_g &= V\cos\gamma_d + V_W \end{aligned}\right| \longrightarrow \tan\gamma_g = \frac{V\sin\gamma_d}{V\cos\gamma_d + V_W} \Rightarrow \gamma_g = \frac{V\cdot\gamma_d}{V + V_W}$$

$$-D + W\gamma_d = 0$$

$$-L + W = 0$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightsquigarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = W\gamma_d \rightsquigarrow \gamma_d = \frac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$h = h_A' + h_B' = \frac{V d\,\gamma_d}{V - V_W} + \frac{V d\,\gamma_d}{V + V_W} = \frac{2V^2 d\,\gamma_d}{V^2 - V_W^2}$$

$$h = \frac{2V^2 d}{V^2 - V_W^2}\cdot\frac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \frac{\rho S d}{W(V^2 - V_W^2)}\left[C_{D0} V^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right]$$

$$\frac{dh}{dV} = 0 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} C_{D0} V^{\overset{2}{\cancel{3}}}(V^2 - V_W^2) - C_{D0} V^4 2\cancel{V} - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2} \cancel{2V}}{V^2 - V_W^2} \Rightarrow C_{D0} V^4 - V_W^2 C_{D0} V^2 - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2} = 0$$

$$V^4 - V_W^2 V^2 - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = 0$$

$$V^2 = \frac{2V_W^2 + \sqrt{4V_W^4 + \frac{16KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}{2} = V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}$$

$$\boxed{V_{h_{min}} = \sqrt{V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}$$

$$\boxed{h_{min} = \frac{\rho S d}{W(V_{h_{min}}^2 - V_W^2)}\left[C_{D0} V_{h_{min}}^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2}\right]}$$

$$C_{L_{h_{min}}} = \frac{2W}{\rho S \left[V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\ldots}}\right]}$$

$$\dot{h} = -V \operatorname{sen}\gamma_d \; ; \quad \frac{dh}{dt} = -V \operatorname{sen}\gamma_d \qquad \int_0^{h_{min}} dh = -V_{h_{min}} \operatorname{sen}\gamma_d \int_0^{t_{min}} dt \; ; \quad h_{min} = -V_{h_{min}} \operatorname{sen}\gamma_d \cdot t_{h_{min}}$$

$$tg\,\gamma_d = \frac{h_{min}}{d} \Rightarrow \frac{h_{min}}{\operatorname{sen}\gamma_d} = \frac{d}{\cos\gamma_d} \Rightarrow \frac{d}{\cancel{\cos\gamma_d}^{\,1}} = -V_{h_{min}} \cdot t_{h_{min}}$$

$$\boxed{t_{min} = \frac{-d}{\sqrt{V_W^2 + \sqrt{V_W^4 + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}}$$

2)

$$\uparrow V_W \Rightarrow \begin{cases} \uparrow V_{h_{min}} \\ \uparrow h_{min} \end{cases}$$

$$\uparrow W/S \Rightarrow \begin{cases} \uparrow V_{h_{min}} \\ \uparrow h_{min} \end{cases}$$

$$\uparrow \rho \Rightarrow \begin{cases} \downarrow V_{h_{min}} \\ \downarrow h_{min} \end{cases}$$

Tramo de vuelta:

$$\left.\begin{array}{l} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma \\ V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma + V_w \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_g = \frac{V\gamma}{V+V_w}$$

$$\left.\begin{array}{l} L = W\cos\gamma \\ D = W \operatorname{sen}\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho V^2 S C_{D0} + \frac{4W^2 \cancel{K}}{\rho V^2 S}}{2W}$$

$$\gamma_g = \frac{\Delta h_2}{d} \Rightarrow \Delta h_2 = d\,\frac{V\gamma}{V+V_w}$$

Altura total descendida:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = d\,\frac{V\gamma}{V-V_w} + d\,\frac{V\gamma}{V+V_w} = d V\gamma\left(\frac{V+\cancel{V_w}+V-\cancel{V_w}}{V^2-V_w^2}\right)$$

$$\Delta h = \frac{2dV^2}{V^2-V_w^2}\;\frac{\rho V^2 S C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho V^2 S}}{2W} = \frac{d}{W}\;\frac{\rho S C_{D0} V^4 + \frac{4W^2K}{\rho S}}{V^2-V_w^2}$$

$$\frac{d\Delta h}{dV} = \frac{d}{W}\;\frac{\rho S C_{D0}\, 4V^3 (V^2-V_w^2) - \left(\rho S C_{D0} V^4 + \frac{4W^2K}{\rho S}\right)2V}{(V^2-V_w^2)^2} = 0$$

$$2V^2(V^2-V_w^2) - V^4 \cancel{+}\, - \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = V^4 - 2V_w^2V^2 - \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = 0$$

$$V^2 = \frac{2V_w^2 \pm \sqrt{4V_w^4 + \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}{2}$$

$$\boxed{V_{opt} = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}$$

$$C_{Lopt} = \frac{2W}{\rho S V_{opt}^2} \Rightarrow \boxed{C_{Lopt} = \frac{2W}{\rho S}\;\frac{1}{\sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}}$$

$$\Delta h_{\cancel{opt}\;min} = \frac{d}{W}\,\frac{\rho S C_{D0} V_{opt}^4 + \dfrac{4W^2}{\rho S}}{V_{opt}^2 - V_w^2}$$

$$\boxed{\Delta h_{min} = \frac{d\,\rho\,C_{D0}}{W/S}\,\frac{V_{opt}^4 + \dfrac{4\,(W/S)^2}{\rho^2 C_{D0}}}{V_{opt}^2 - V_w^2}}$$

$V_w \uparrow \;\Rightarrow\; V_{opt} \uparrow \;\Rightarrow\; \Delta h \uparrow$

$\rho \uparrow \;\Rightarrow\; \Delta h \uparrow$

$W/S \uparrow \;\Rightarrow\; \Delta h \uparrow$

$$t_{TOTAL} = \frac{\Delta h}{V_{opt}\,\mathrm{sen}\,\gamma} \simeq \frac{\Delta h}{V_{opt}\,\gamma} \;; \quad t_{TOTAL} = \frac{d}{V_{opt}\cos\gamma} \simeq \frac{d}{V_{opt}}$$

$$t_{TOTAL} = \frac{d}{\sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \dfrac{4W^2K}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 10.09.04

E. Final Septiembre "Mecánica del Vuelo I"

PROBLEMA 1°

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los dos tramos siguientes (ver figura):

Tramo 1-2: Vuelo con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma = -45°$ y con velocidad aerodinámica V constante, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo V_{w1} constante y conocido.

Tramo 2-3: Vuelo con velocidad aerodinámica constante e igual a la del tramo anterior, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo $V_w = k_w h$ (donde $k_w = V_{w1} / h_2$).

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes y está extendida hasta la pérdida, $C_{L\delta e} = C_{Lq} = 0$ y $C_{L\,max}$ es una constante conocida, etc.).

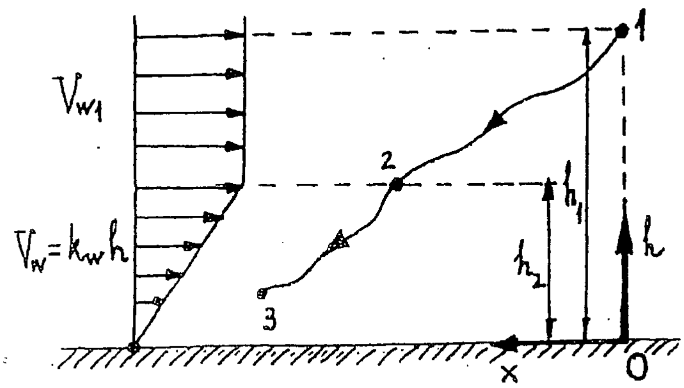
b) Son constantes conocidas ρ, g y las alturas h_1 y h_2.

c) La transición entre los dos tramos es despreciable.

Se pide:

1°) Para el tramo 1-2, determinar la velocidad aerodinámica V, el tiempo empleado $t_{1\text{-}2}$, la distancia recorrida $x_{1\text{-}2}$ y la deflexión del timón de profundidad δ_e, en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema. ¿Existen valores únicos de V, $t_{1\text{-}2}$, $x_{1\text{-}2}$ y δ_e o pueden presentarse varias soluciones?

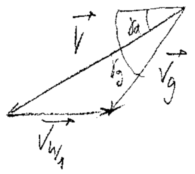
2°) Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar el ángulo de asiento de velocidad γ y la deflexión del timón de profundidad δ_e, en función del tiempo y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema.

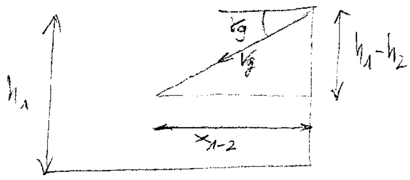


TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

9

1)





$$tg\,\gamma_g = \frac{h_1 - h_2}{x_{1-2}}$$

$$x_{1-2} = \frac{(h_1 - h_2)}{tg\,\gamma_g} \quad (I)$$

$$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_{W_1}}$$

$$V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma_d$$

$$V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma_d - V_{W1}$$

$$tg\,\gamma_g = \frac{V\operatorname{sen}\gamma_d}{V\cos\gamma_d - V_{W1}} \quad (II)$$

$$-D - W\operatorname{sen}\gamma - m\dot{V}^{\,0} = 0 \;; \quad -D + W\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \quad (III)$$

$$-L + W\cos\gamma + mV\dot{\gamma}^{\,0} = 0 \;; \quad L = W\cos\gamma_d \quad (IV)$$

$$L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho V^2 S}$$

$$D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\frac{4W^2\cos^2\gamma_d}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = W\operatorname{sen}\gamma_d \;;$$

$$\tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2W^2\cos^2\gamma_d}{\rho S V^2}K = W\operatorname{sen}\gamma_d$$

$$\tfrac{1}{2}\rho^2 V^4 S^2 C_{D0} + 2W^2K\cos^2\gamma_d = W\operatorname{sen}\gamma_d\,\rho S V^2 \;; \quad \rho^2V^4S^2C_{D0} + 4W^2K\cos^2\gamma_d = 2W\operatorname{sen}\gamma_d\,\rho S V^2$$

$$V^4 - \frac{2W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}V^2 + \frac{4W^2K\cos^2\gamma_d}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = 0$$

$$V^2 = \frac{\frac{2W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}} + \sqrt{\frac{4W^2\operatorname{sen}^2\gamma_d}{\rho^2S^2C_{D0}^2} - \frac{16W^2K\cos^2\gamma_d}{\rho^2S^2C_{D0}}}}{2} = \frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}} + \sqrt{\frac{W^2}{\rho^2S^2C_{D0}^2}\left(\operatorname{sen}^2\gamma_d - 4KC_{D0}\cos^2\gamma_d \right.}$$

$$V^2 = \frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}} + \frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\sqrt{1 - 4KC_{D0}} = \frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left[1 + \sqrt{1 - 4KC_{D0}}\right]$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1 + \sqrt{1 - 4KC_{D0}}\right)}}$$

$$(II) \rightarrow tg\,\gamma_g = \frac{\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\operatorname{sen}\gamma_d}{\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\cos\gamma_d - V_{W1}}$$

$$(I) \rightarrow \boxed{x_{1-2} = \frac{(h_1-h_2)\left[\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\cos\gamma_d - V_{W1}\right]}{\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\operatorname{sen}\gamma_d}} = (h_1-h_2)\left[\frac{1}{tg\,\gamma_d} - \frac{V_{W1}}{\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\operatorname{sen}\gamma_d}\right]$$

$\dot{h} = -V\operatorname{sen}\gamma_d$; $\frac{dh}{dt} = -V\operatorname{sen}\gamma_d$; $\int_{h_2}^{h_1} dh = \int_0^{t_{1-2}} -V\operatorname{sen}\gamma_d \, dt$; $(h_1-h_2) = -V\operatorname{sen}\gamma_d \, t_{1-2}$

$$\boxed{t_{1-2} = \frac{(h_1-h_2)}{-V\operatorname{sen}\gamma_d} = \frac{(h_1-h_2)}{-\sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}\operatorname{sen}\gamma_d}}$$

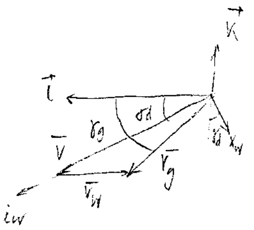
2) $-D + W\operatorname{sen}\gamma_d = \frac{-W}{g} K_W \cos\gamma_d \frac{dz}{dt}$ (I)

$-L + W\cos\gamma_d + \cancel{\frac{W}{g}V\dot{\gamma}}^{\,0} = +\frac{W}{g} K_W \operatorname{sen}\gamma_d \frac{dz}{dt}$ (II)

$\dot{x}_e = \frac{dx_e}{dt} = V\cos\gamma_d - V_W$

$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = -V\operatorname{sen}\gamma_d$

$V = \sqrt{\frac{W\operatorname{sen}\gamma_d}{\rho S C_{D0}}\left(1+\sqrt{1-4KC_{D0}}\right)}$



$\vec{V}_g = \vec{V} - \vec{V}_W$

$\vec{V}_g = (V\cos\gamma_d - V_W)\,\vec{i} - V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k}$

$\vec{i} = \cos\gamma_d\,\vec{i}_W - \operatorname{sen}\gamma_d\,\vec{k}_W$

$\frac{d\vec{V}_g}{dt} = -\frac{d\vec{V}_W}{dt} = -K_W \cdot \frac{dz}{dt}\,\vec{i}$

$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightarrow C_L = \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S V^2} - \frac{2W\operatorname{sen}\gamma_d \cdot K_W}{\rho S V^2}\frac{dz}{dt}$

$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{\,0} + \cancel{C_{Lq}\hat{q}}^{\,0}$

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$ (I) $\rightarrow \boxed{\gamma_d = \cdots}$

(II) $\rightarrow \alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\cos\gamma_d}{\rho S C_{L\alpha} V^2} - \frac{2W\operatorname{sen}\gamma_d K_W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}\frac{dz}{dt}$

$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta_e = \frac{2}{\rho V^2 S c}\left(\cancel{(I_x - I_z)pr}^{\,0} + \cancel{J_{xz}(p^2-r^2)}^{\,0} + I_y\dot{q}\right) \rightarrow \boxed{\delta_e = \cdots}$

SEPT 2004

PROBLEMA 1º

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los dos tramos siguientes (ver figura):

Tramo 1-2: Vuelo con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma = -45^{\circ}$ y con velocidad aerodinámica V constante, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo V_{w1} constante y conocido.

Tramo 2-3: Vuelo con velocidad aerodinámica constante e igual a la del tramo anterior, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo $V_w = k_w\, h$ (donde $k_w = V_{w1} / h_2$).

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes y está extendida hasta la pérdida, $C_{L\delta e} = C_{Lq} = 0$ y $C_{L\,max}$ es una constante conocida, etc.).

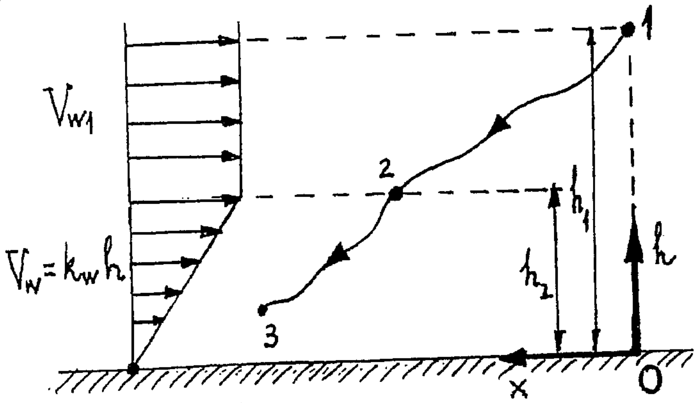
b) Son constantes conocidas ρ, g y las alturas h_1 y h_2.

c) La transición entre los dos tramos es despreciable.

Se pide:

1º) Para el tramo 1-2, determinar la velocidad aerodinámica V, el tiempo empleado $t_{1\text{-}2}$, la distancia recorrida $x_{1\text{-}2}$ y la deflexión del timón de profundidad δ_e, en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema. ¿Existen valores únicos de V, $t_{1\text{-}2}$, $x_{1\text{-}2}$ y δ_e o pueden presentarse varias soluciones?

2º) Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar el ángulo de asiento de velocidad γ y la deflexión del timón de profundidad δ_e, en función del tiempo y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los dos tramos siguientes:

- Tramo 1-2: Vuelo con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma = -45°$ y con velocidad aerodinámica V constante, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo V_{W1} constante y conocido.
- Tramo 2-3: Vuelo con velocidad aerodinámica constante e igual a la del tramo anterior, en presencia de un viento horizontal de frente de módulo $V_W = k_W h$ (donde $k_W = \frac{V_{W1}}{h_2}$).

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes y está extendida hacia la pérdida, $C_{L\delta e} = C_{Lq} = 0$ y C_{Lmax} es una constante conocida.)
b) Son constantes conocidas ρ, g y las alturas h_1 y h_2.
c) La transición entre los dos tramos es despreciable.

Se pide:

1º) Para el tramo 1-2, determinar la velocidad aerodinámica V, el tiempo empleado $t_{1\to2}$ y la distancia recorrida $x_{1\to2}$ en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema. ¿Existen valores únicos de V, $t_{1\to2}$ y $x_{1\to2}$ o pueden presentarse varias soluciones?

Para un vuelo simétrico en un plano vertical, el sistema de ecuaciones que tenemos es:

$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$
$$\dot{h} = V\sin\gamma$$
$$T\cos\varepsilon - D - mg\sin\gamma = m\dot{V}$$
$$(mg\cos\gamma + mV\dot{\gamma})\sin\mu = 0$$
$$-T\sin\varepsilon + (mg\cos\gamma + mV\dot{\gamma})\cos\mu - L = 0$$

Ahora bien, nuestro problema consiste en un planeador, por tanto $T=0$, con las alas a nivel, es decir, $\mu = 0$. Además, el enunciado nos dice que tanto V como γ son constantes. Por último, hemos de tener en cuenta que la velocidad del viento no es nula, sino que es un viento horizontal de frente, es decir, que tiene componente en x.
Bajo estas condiciones:

$\dot{x}_e + V$

$\dot{h} = V\sin\gamma$

$D = -W\sin\gamma$

$L = W\cos\gamma$

Ahora bien, antes de continuar hagamos un cambio de notación. En nuestro problema nos dicen que el ángulo de asiento es un ángulo negativo. En consecuencia, reescribiremos las ecuaciones anteriores poniéndolas en función del módulo del ángulo de asiento, pero denotando dicho módulo de la misma manera que el ángulo, γ, para no arrastrar en los siguientes cálculos las barras del módulo, | |.

Así pues, las ecuaciones que tendremos son:

$$\dot{x}_e + V_{w_1} = V\cos\gamma$$
$$\dot{h} = -V\sin\gamma \qquad \text{donde } \gamma = |-45| = 45°$$
$$D = W\sin\gamma$$
$$L = W\cos\gamma$$

Además, cabe comentar que la velocidad V es la suma de la velocidad del avión más la velocidad del viento, el cual, como viene de frente, sólo tiene componente en x, tal como hemos indicado anteriormente:

$$V = \sqrt{(V_{w_1} + \dot{x})^2 + \dot{h}^2}$$

Vayamos ya a la obtención de V en función de parámetros conocidos. Para ello utilizaremos las dos últimas expresiones, junto a las expresiones de L y D:

$$L = qSC_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$
$$D = qSC_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

y la polar parabólica de coeficientes constantes:

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2$$

Así pues, tenemos que:

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \longrightarrow C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S}$$

De manera que si tenemos en cuenta que $L = W\cos\gamma$, nos queda:

$$C_L = \frac{2}{\rho V^2 S} \cdot W\cos\gamma$$

Y la polar parabólica y la resistencia quedan:

$$C_D = C_{D0} + \frac{4k}{\rho^2 V^4 S^2} W^2\cos^2\gamma$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2k}{\rho V^2 S} W^2\cos^2\gamma$$

Si ahora igualamos esta expresión a $D = W\sin\gamma$, ya encontramos el polinomio que nos dará la expresión de V:

$$D = W\sin\gamma = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2k}{\rho V^2 S} W^2\cos^2\gamma$$

$$2W\rho V^2 S\sin\gamma = \rho^2 V^4 S^2 C_{D0} + 4kW^2\cos^2\gamma \rightarrow \rho^2 V^4 S^2 C_{D0} - 2W\rho V^2 S\sin\gamma + 4kW^2\cos^2\gamma = 0$$

$$V^2 = \frac{2W\rho S\sin\gamma \pm \sqrt{4W^2\rho^2 S^2\sin^2\gamma - 16kW^2\rho^2 S^2 C_{D0}\cos^2\gamma}}{2\rho^2 S^2 C_{D0}}$$

$$V^2 = \frac{W\sin\gamma}{\rho S C_{D0}} \pm \sqrt{\frac{W^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}^2}\left[\sin^2\gamma - 4C_{D0}k\cos^2\gamma\right]}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\cos\gamma = \sin\gamma = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V^2 = \frac{W}{\sqrt{2}\rho S C_{D0}} \pm \frac{W}{\sqrt{2}\rho S C_{D0}}\sqrt{1 - 4kC_{D0}} \rightarrow V^2 = \frac{W}{\sqrt{2}\rho S C_{D0}}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4kC_{D0}}\right]$$

De manera que:

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{W\left(1 \pm \sqrt{1 - 4kC_{D0}}\right)}{\sqrt{2}\rho S C_{D0}}}}$$

Estamos ya en condiciones de calcular el espacio y el tiempo empleado. Para ello utilizaremos las ecuaciones:

$$\dot{x} + V_{w1} = V\cos\gamma$$

$$\dot{h} = -V\sin\gamma$$

Como hemos obtenido, V es constante, de manera que:

$$\dot{x} = V\cos\gamma - V_{w1}$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma - V_{w1} \longrightarrow dx = (V\cos\gamma - V_{w1})dt$$

Integrando:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} (V\cos\gamma - V_{w1})dt = (V\cos\gamma - V_{w1})\int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$x_2 - x_1 = (V\cos\gamma - V_{w1})(t_2 - t_1)$$

$$x_2 - x_1 = \left[\sqrt{\frac{W(1 \pm \sqrt{1-4kC_{D0}})}{2^{3/4}\cdot S\rho C_{D0}}} - V_{w1}\right](t_2 - t_1)$$

donde (t_2-t_1) lo determinamos a partir del incremento de alturas:

$$\dot{h} = -V\sin\gamma$$

$$\frac{dh}{dt} = -V\sin\gamma \longrightarrow dh = -V\sin\gamma dt$$

$$\int_{h_1}^{h_2} dh = -V\sin\gamma\int_{t_1}^{t_2} dt \longrightarrow h_1 - h_2 = V\sin\gamma(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{t_2 - t_1 = \frac{h_1 - h_2}{V\sin\gamma} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{\frac{W(1 \pm \sqrt{1-4kC_{D0}})}{2^{3/4}\cdot S\rho C_{D0}}}}}$$

De manera que:

$$x_2 - x_1 = (V\cos\gamma - V_{w1})(t_2 - t_1) = (V\cos\gamma - V_{w1})\frac{h_1 - h_2}{V\sin\gamma} = (h_1 - h_2)\left[1 - \frac{V_{w1}}{V\sin\gamma}\right]$$

$$\boxed{x_2 - x_1 = (h_1 - h_2)\left[1 - \frac{V_{w1}}{\sqrt{\frac{W(1 \pm \sqrt{1-4kC_{D0}})}{2^{3/4}\, S\rho C_{D0}}}}\right]}$$

Como vemos de la expresión de V, tenemos dos valores para la velocidad, que vienen dados por el signo ±. Por ello, no tenemos un único valor de V y, en consecuencia tampoco de $x_{1\to2}$ ni $t_{1\to2}$, ya que estos dependen de V.

2°) Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar el ángulo de asiento de velocidad γ en función del tiempo y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema.

Según el enunciado, la velocidad aerodinámica es igual a la del tramo anterior, pero eso nos indica que V= constante, no nos indica que $\ddot{x}$ y $\ddot{h}$ son nulas, dado que podría haber pequeños cambios de $\dot{x}$ y $\dot{h}$ que mantuvieran igualmente la velocidad constante.

Por ello, hemos de tener en cuenta este hecho en las ecuaciones planteadas, las cuales son:

$$V\cos\gamma = V_W + \dot{x}$$

$$V\sin\gamma = \dot{h} + k_W h$$

$$L\cos\gamma + D\sin\gamma - W = m\ddot{h} + mk_W\dot{h}$$

$$L\sin\gamma - D\cos\gamma = m\ddot{x}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

PROBLEMA 1. Septiembre 04

1°) $(V, t, x, \delta_e)_{1-2} = ?$

Planeador $\rightarrow T = 0$.

Vuelo en plano vertical ⊕ alas a nivel (simétrico) $\rightarrow y_e = de,\ \nu = \beta = 0 + \chi = 0$

$C_d = C_{do} + k C_L^2$

$C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha$; $C_{L\alpha}$ conocido

$\left\{ \begin{array}{l} C_0 \neq C \\ C_{L\delta} \cdot \delta = 0 \\ C_{Lq}\, \delta = 0 \end{array} \right.$

⊕ ¿Cuando puedo ... ? $C_{mo} = f(\alpha, \ldots)$ e $\neq 0$?

El sistema de ecuaciones queda:

$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V\sin\gamma \end{array} \right\}$ relaciones cinemáticas.

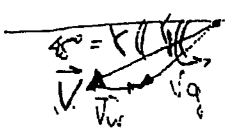
$-D - W\sin\gamma = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ ec. movimiento

$L - W\cos\gamma = \frac{W}{g} V \frac{d\gamma}{dt}$

con: $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{do} + k C_L^2)$

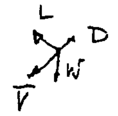
$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$; $C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha$

$\boxed{1-2}$



$\Rightarrow$

$V_w = V_{w_0}$



$\dot{x} = V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_w$

$\dot{h} = V_g \sin\gamma_g = V\sin\gamma$

$\vec{V}_g = (V\cos\gamma - V_w)\,\vec{i}_h + V\sin\gamma\,\vec{k}_h$

$$\left. \begin{array}{l} -D - W\sin\gamma = 0 \\ L - W\cos\gamma = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{D}{W} = -\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow C_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \\ \frac{L}{W} = \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow C_L = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \end{array}$$

$$C_{do} + k C_L^2 = \frac{\sqrt{2}\, W/S}{\rho V^2} = C_L \rightarrow k C_L^2 - C_L + C_{do} = 0$$

$$C_L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4kC_{do}}}{2k}$$ ⊛ ¿2 soluciones?

$$V = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\, W/S}{\rho \cdot C_L}} = \left(\frac{2\sqrt{2}\, k\, W/S}{\rho\,(1 \pm \sqrt{1 - 4kC_{do}})} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{V\frac{\sqrt{2}}{2} + V_w}{V\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{V + \sqrt{2}\,V_w}{V} = 1 + \sqrt{2}\frac{V_w}{V}$$

$$x = \left(1 + \sqrt{2}\frac{V_w}{V}\right)(h_2 - h_1)$$

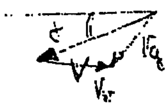
$C_{mq}=0 \Rightarrow \delta e = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha \qquad \alpha = \frac{C_L}{C_{L\alpha}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4kC_{D0}}}{2kC_{L\alpha}}$

$C_{m0}=0$

$$\delta e = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\cdot\frac{1\pm\sqrt{1-4kC_{D0}}}{2kC_{L\alpha}}$$

2) $\boxed{2-3}$

$V_W = \frac{h}{h_2}\cdot V_{W_1}$



$\dot x = V\cos\gamma - V_{W_1}\frac{h}{h_2}$
$\dot h = V\sin\gamma$ } relac. cinemáticas

$-D - W\sin\gamma = 0$
$L - W\cos\gamma = \frac{W}{g}V\frac{d\gamma}{dt} = \frac{W}{g}V\frac{d\gamma}{dh}\cdot V\sin\gamma$ } ec. mov.

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2)$
$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$; $C_L = C_{L\alpha}\alpha$

$\sin\gamma = -\frac{D}{W} = \frac{\frac12\rho V^2}{W/S}\cdot(C_{D0} + kC_L^2)$

$\ldots - W\cos\gamma = \frac{W}{g}V\frac{d\gamma}{dt}$;

$$\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{W\sin\gamma - \frac12\rho V^2 S C_{D0}}{\frac12\rho V^2 S}} - W\cos\gamma\right)^{-1}\frac{W}{g}V\,d\gamma = dt$$

$$\int_{45}^{\gamma}\frac{W}{g}V\left(\sqrt{\frac{1}{2k}\rho V^2 S\left(W\sin\gamma - \frac12\rho V^2 S C_{D0}\right)} - W\cos\gamma\right)^{-1}d\gamma = t - t_i$$

con esto $\gamma = \gamma(t)$

$\delta e = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha \rightarrow \alpha : \; C_L = f(\gamma) = C_{L\alpha}\cdot\alpha \rightarrow \alpha = \frac{C_L}{C_{L\alpha}}$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – E. Final Febrero – A+B+CD 17.02.93

PROBLEMA 1º

Un modelo de planeador, controlado remotamente a través de la deflexión de su timón de profundidad, efectúa el denominado "vuelo en ladera" (vuelo simétrico en el plano vertical con las alas a nivel, y con un viento de cara paralelo a la ladera de módulo V_W constante conocido y no pequeño frente al módulo V de la velocidad aerodinámica).

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del modelo (en particular, $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$, $C_L = C_{L_\alpha}\alpha$).

b) Se consideran despreciables las variaciones de ρ y g con la altura, y el efecto suelo.

c) El ángulo de la ladera φ es constante conocido y no necesariamente pequeño.

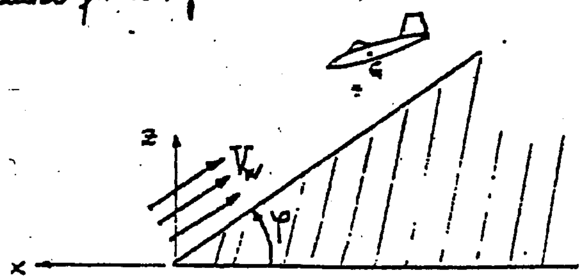
Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y cinemáticas que permitirán resolver el problema, y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2º) Determinar la deflexión del timón de profundidad δ_e necesaria para que el avión se desplace paralelo a la ladera con velocidad respecto a tierra V_g constante, así como el valor de V_g.

3º) Determinar δ_e para que el avión esté en reposo respecto a la ladera, así como la relación entre los parámetros del problema para que esto ocurra.

4º) Determinar el ángulo de ladera mínimo φ_{min} por debajo del cual es imposible quedarse quieto respecto a la ladera.

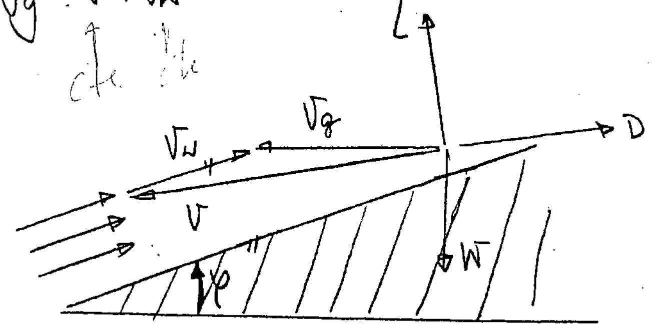


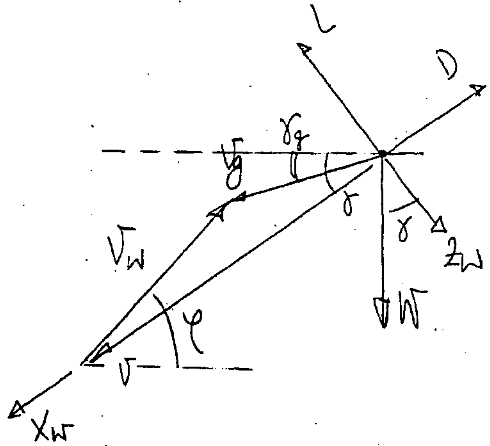
TIEMPO CONCEDIDO: $1^h\,15^m$

$\boxed{17-02-1993}$ (E. FINAL FEBRERO A+B+CD / PROBLEMA 1)

- V_W constante y conocido.
- $C_D = C_{D_0} + K C_L^2$; $C_L = C_{L\alpha}\alpha$.

1) $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$





TEOREMA DEL COSENO: $V_g^2 = V^2 + V_W^2 - 2VV_W \underbrace{\cos(\varphi-\gamma)}_{\cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma} = V^2 + V_W^2 - 2VV_W(\cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma)$

$$\begin{cases} V\cos\gamma = V_W\cos\varphi + V_g\cos\gamma_g \\ V\sin|\gamma| = V_W\sin\varphi + V_g\sin|\gamma_g| \end{cases}$$

$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$
$\vec{V_g} = V_g\cos\gamma_g\,\vec{i}_0 + V_g\sin\gamma_g\,\vec{k}_0$
$\vec{V} = V\cos\gamma\,\vec{i}_0 + V\sin\gamma\,\vec{k}_0$
$\vec{V_W} = V_W\cos\varphi\,\vec{i}_0 + V_W\sin\varphi\,\vec{k}_0$

- ECUACIONES CINEMÁTICAS
$$\frac{dx}{dt} = V_g\cos\gamma_g \qquad \frac{dh}{dt} = -V_g\sin\gamma_g$$

- ECUACIONES DINÁMICAS
$$L = W\cos\gamma \qquad D = W\sin\gamma$$

Suponemos que γ y γ_g de las ecuaciones están en módulo (aunque sabemos por el criterio de signos definido que $\gamma<0$ y $\gamma_g<0$)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\alpha$$
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

- ECUACIÓN DEL MOMENTO DE CABECEO: $\boxed{C_{m_g} = C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e = 0}$

$\hookrightarrow \delta_e = -\dfrac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \dfrac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$

Sistema de un grado de libertad, ya que cuando se conoce V, el resto de incógnitas quedan determinadas.

2) Avión paralelo a la ladera $\rightarrow \gamma_g = \varphi \rightarrow \gamma_g = \gamma = \varphi$

Por tanto: $V_g = V - V_W$.

De las ecuaciones dinámicas $\left\{ \begin{array}{l} L = W\cos\varphi = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow C_L = \dfrac{2W\cos\varphi}{\rho V^2 S} \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K \left(\dfrac{2W\cos\varphi}{\rho S V^2}\right)^2 = W\operatorname{sen}\varphi \end{array} \right.$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + K\frac{2W^2\cos^2\varphi}{\rho V^2 S} = W\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{1}{2}\rho^2 V^4 S^2 C_{D0} - W\operatorname{sen}\varphi\,\rho V^2 S + K 2W^2\cos^2\varphi = 0$$

$$V^2 = \frac{W\rho S\operatorname{sen}\varphi \pm \sqrt{W^2\operatorname{sen}^2\varphi\,\rho^2 S^2 - 4\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D0} K 2W^2\cos^2\varphi}}{2\cdot\frac{1}{2}\rho^2 S^2 C_{D0}} =$$

$$= \frac{W\rho S\operatorname{sen}\varphi \pm \rho S W\sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi - 4C_{D0}K(1-\operatorname{sen}^2\varphi)}}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = \frac{W\operatorname{sen}\varphi \pm W\sqrt{(1+4C_{D0}K)\operatorname{sen}^2\varphi - 4C_{D0}K}}{\rho S C_{D0}} =$$

$$= \frac{W\operatorname{sen}\varphi \pm W\cdot 2\sqrt{C_{D0}K}\sqrt{\left(\frac{1}{4C_{D0}K}+1\right)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{\rho S C_{D0}} = \frac{W\operatorname{sen}\varphi \pm W\frac{1}{E_m}\sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{\rho S C_{D0}}$$

$$= \frac{W\operatorname{sen}\varphi E_m \pm W\sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{E_m\rho S C_{D0}} = \frac{W\operatorname{sen}\varphi E_m \pm W\sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{\frac{\rho S}{2}\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}}$$

Donde $E_m = \dfrac{1}{2\sqrt{C_{D0}K}}$ (De Teoría), y hay dos velocidades

Sustituyendo: $C_L = C_{L\alpha}\alpha \rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\dfrac{C_{D0}}{K}}\cdot\dfrac{1}{C_{L\alpha}}\cdot\dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi E_m \pm \sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}$

Por tanto $\boxed{\delta_e = -\dfrac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \dfrac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\sqrt{\dfrac{C_{D0}}{K}}\cdot\dfrac{1}{C_{L\alpha}}\cdot\dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi E_m \pm \sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}}$

Para estas velocidades:

$$V_{g_1} = \frac{W \operatorname{sen}\varphi + W \frac{1}{E_m}\sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{\rho S C_{D_0}} - V_W$$

$$V_{g_2} = \frac{W \operatorname{sen}\varphi - W \frac{1}{E_m}\sqrt{(E_m^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi - 1}}{\rho S C_{D_0}} - V_W$$

3) Avión en reposo respecto a la ladera: $V_g = 0 \rightarrow V = V_W$

De $L = W\cos\varphi = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} \cdot \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2W\cos\varphi}{\rho S V_W^2 C_{L\alpha}}$

Por tanto: $\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}} \frac{2W\cos\varphi}{\rho S C_{L\alpha} V_W^2}}$

La relación entre parámetros se obtiene de la otra ecuación cinemática

$$\frac{1}{2}\rho V_W^2 S C_{D_0} + K \frac{2W^2\cos^2\varphi}{\rho V_W^2 S} = W \operatorname{sen}\varphi$$

4) φ_{min}? Despejamos φ de la relación de parámetros:

$$\frac{1}{2}\rho V_W^2 S C_{D_0} + K \frac{2W^2}{\rho V_W^2 S}(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) = W \operatorname{sen}\varphi$$

Si adimensionalizamos V_W; $\hat{V}_W = \frac{V_W}{\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}}$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\rho \hat{V}_W^2 \frac{\cancel{2W}}{\cancel{\rho S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D_0}}}\cancel{S} C_{D_0} + K \frac{\cancel{2}W^{\cancel{2}}}{\rho S \hat{V}_W^2 \frac{\cancel{2W}}{\cancel{\rho S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D_0}}}}(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) = \cancel{W}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\hat{V}_W^2 \cdot \sqrt{K C_{D_0}} + \sqrt{K C_{D_0}} \frac{1}{\hat{V}_W^2}(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\hat{V}_W^4 \frac{1}{2E_m} + \frac{1}{2E_m}(1 - \operatorname{sen}^2\varphi) = \operatorname{sen}\varphi\, \hat{V}_W^2 \quad ; \quad \operatorname{sen}^2\varphi + 2E_m \hat{V}_W^2 \operatorname{sen}\varphi - (1 + \hat{V}_W^4) = 0$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{-2E_m\hat{V}_W^2 \pm \sqrt{4E_m^2\hat{V}_W^4 + 4(1+\hat{V}_W^4)}}{2} = -E_m\hat{V}_W^2 \pm \sqrt{E_m^2\hat{V}_W^4 + 1 + \hat{V}_W^4}$$

Para φ_{min} nos quedamos con el signo $\oplus$.

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi = E_m\hat{V}_W^2\left(\sqrt{1+\frac{1+\hat{V}_W^4}{E_m^2\hat{V}_W^4}} - 1\right)} \longrightarrow \underline{\underline{\varphi_{min}}}$$

[illegible]SCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

[illegible] DE MECÁNICA DEL VUELO [illegible]

[illegible] Mecánica del Vuelo I [illegible]

[illegible] objeto de estudiar el vuelo de una gaviota contra un viento de cara en una ladera cercana al [illegible] se considera un modelo de planeador en vuelo simétrico en el plano vertical con las alas a [illegible] con un viento de cara paralelo a la ladera de módulo V_w constante y no pequeño frente a su [illegible] dinámica.

[illegible] que:

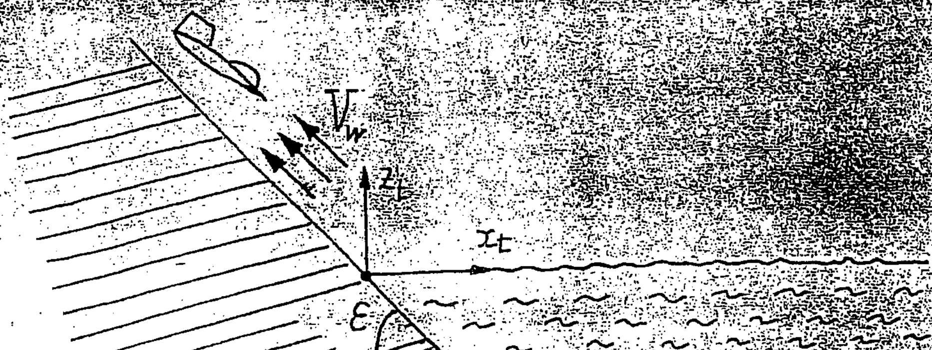
- La pendiente de la ladera, ε, es una constante conocida (no necesariamente pequeña) [illegible]
- [illegible] modelo puede controlarse remotamente a través de la [illegible] de [illegible] profundidad.
- [illegible] con las características geométricas, aerodinámicas [illegible] necesarias para la resolución del problema (por ejemplo [illegible] superficie alar S, la polar es parabólica [illegible] conocidas, el coeficiente de sustentación puede modelarse [illegible] y esta linealidad puede extenderse hasta la pérdida [illegible]
- [illegible] son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y cinemáticas (en unos ejes ligados a la ladera x_t, z_t) que permitirían resolver el problema en un caso general y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

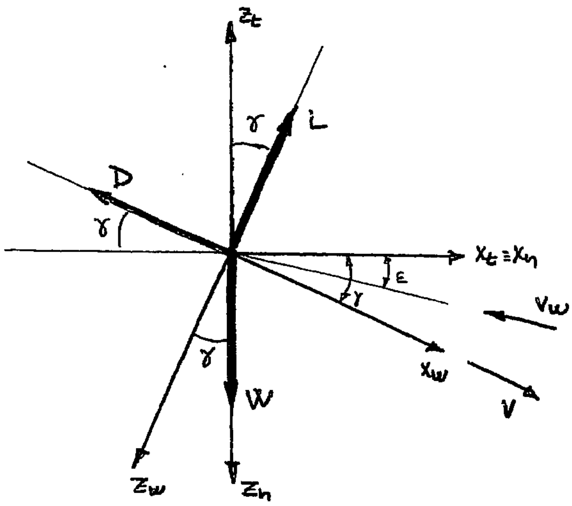
2º) Determinar la deflexión (o deflexiones) del timón de profundidad y la velocidad (o velocidades) del viento para que el planeador permanezca quieto respecto de la ladera, todo ello en función de ε y de otros datos del problema.

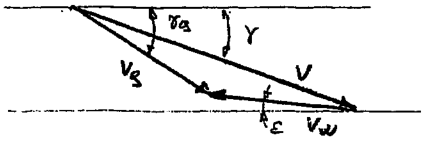
3º) Para un rango de pendientes de ladera $0 \le \varepsilon \le \pi/2$, discutir la posibilidad o imposibilidad del vuelo del apartado 2º), así como el número de soluciones posibles para cada ε. Comentar físicamente los resultados obtenidos.



TIEMPO CONCEDIDO: 1h 15m

1)





$$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w} = (V\cos\gamma - V_w\cos\varepsilon)\,\vec{i_t} - (V\operatorname{sen}\gamma - V_w\operatorname{sen}\varepsilon)\,\vec{k_t} \; ; \quad \operatorname{tg}\gamma_g = -\frac{V\operatorname{sen}\gamma - V_w\operatorname{sen}\varepsilon}{V\cos\gamma - V_w\cos\varepsilon}$$

$$L\operatorname{sen}\gamma - D\cos\gamma = \frac{W}{g}\frac{d}{dt}(V\cos\gamma - V_w\cos\varepsilon)$$

$$L\cos\gamma + D\operatorname{sen}\gamma - W = \frac{W}{g}\frac{d}{dt}\left[-(V\operatorname{sen}\gamma - V_w\operatorname{sen}\varepsilon)\right]$$

En ejes $x_t - z_t$

$$\frac{dx}{dt} = V_{gx} = V\cos\gamma - V_w\cos\varepsilon$$

$$\frac{dz}{dt} = V_{gz} = -V\operatorname{sen}\gamma + V_w\operatorname{sen}\varepsilon$$

; $L = W\cos\gamma$, $D = W\operatorname{sen}\gamma$ En ejes $x_w - z_w$

Velocidad angular en ejes viento

$$p_w = \cancel{\dot{\mu}} - \dot{\chi}\,\cancel{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$q_w = \dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu \quad \Rightarrow \quad q_w = \dot{\gamma}$$

$$r_w = \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu - \dot{\gamma}\operatorname{sen}\mu$$

$$M = \frac{1}{2}\rho S V^2 c\,(C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e) = I_y\ddot{\gamma}_g$$

Incógnitas $\rightarrow$ $\alpha, \gamma, V, \delta_e$

NGL = 4 − 3 = 1

2)

$$\vec{V_g} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} V\cos\gamma = V_w \cos\varepsilon \\ V \operatorname{sen}\gamma = V_w \operatorname{sen}\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V = V_w \\ \gamma = \varepsilon \rightarrow \gamma = 0 \end{array}$$

$$L = W\cos\gamma = (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)\frac{1}{2}\rho V_w^2 S \Rightarrow \alpha = \frac{2W\cos\varepsilon}{\rho V_w^2 S C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(\frac{2W\cos\varepsilon}{\rho V_w^2 S C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right)}$$

3)

$$W\cos\gamma = \frac{1}{2}\rho V_s^2 S C_{Lmax} \Rightarrow \cos\varepsilon_s = \frac{\rho V_s^2 S C_{Lmax}}{2W}$$

$$D = W\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_{Lmax}^2) = W\operatorname{sen}\varepsilon$$

$$\operatorname{sen}\varepsilon_s = \frac{\rho V_s^2 S C_{D0}}{2W} + \frac{1}{2}\rho V_s^2 S K \frac{1}{W}\frac{W^2\cos^2\varepsilon_s}{\frac{1}{4}\rho^2 V_s^4 S^2}$$

$$\operatorname{Sen}\varepsilon_s = \frac{\rho V_s^2 S C_{D0}}{2W} + \frac{\rho V_s^2 S K C_{Lmax}^2}{2W}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_s = \frac{C_{D0}}{C_{Lmáx}} + K C_{Lmáx}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{C_{D0}}{C_L} + K C_L$$

Si $\varepsilon = 0 \Rightarrow C_L \rightarrow \infty$. Por tanto rango de pendientes para que el vuelo sea posible:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{C_{D0}}{C_{Lmax}} + K C_{Lmax}\right) \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$$

Físicamente, lo que pasa es que si $\varepsilon = 0$ no hay ninguna fuerza que compense a D, por eso matemáticamente sale $L \rightarrow \infty$, al aumentar ε, L disminuye pero hasta que no entre en el rango dado el modelo está en pérdida; por lo que tampoco es posible el vuelo.

H4: 30-06-98

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los dos tramos siguientes (ver figura):

Tramo 1-2: Vuelo con velocidad aerodinámica y ángulo de asiento de velocidad aerodinámica ($|\gamma| \ll 1$) constantes, en presencia de un viento horizontal de cola de módulo V_w constante y conocido.

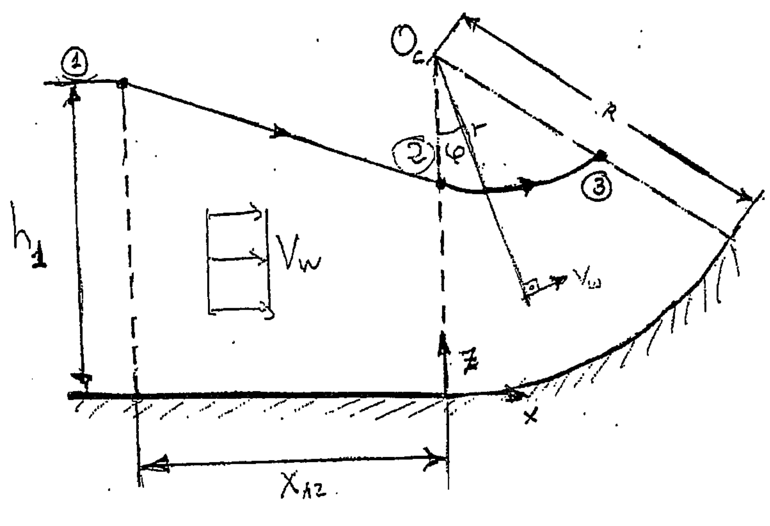
Tramo 2-3: Vuelo no estacionario en un ladera (modelizada mediante un arco de circunferencia de centro O_cy radio R) con un viento de cola de módulo igual al del tramo anterior y cuya dirección es siempre perpendicular al radio vector que une O_c con el centro de masas del planeador.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica con coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc)
- h_1, x_{12}, R ($R > h_1$). φ_3, ρ y g son constantes conocidas.
- La transición entre los dos tramos es despreciable.

Se pide:

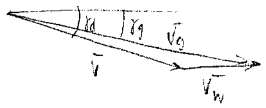
1. Para el tramo 1-2, plantear un polinomio que permita obtener, en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema, la velocidad aerodinámica V para la cual el planeador ha descendido la mínima altura al llegar al final del tramo.
2. Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar la velocidad aerodinámica V y el ángulo de asiento de velocidad γ, en función del tiempo, de la deflexión del timón de profundidad δ_e y, en caso necesario, del resto de grados de libertad matemáticos del problema.

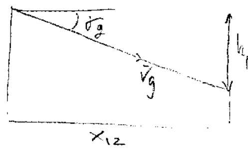


(11)

1) $-D + W\gamma_d = 0$

$-L + W = 0$





$\operatorname{tg}\gamma_g = \dfrac{h_1'}{x_{12}} = \gamma_g$

$V_g \sin\gamma_g = V \sin\gamma_d$

$V_g \cos\gamma_g = V\cos\gamma_d + V_W \longrightarrow \operatorname{tg}\gamma_g = \dfrac{V\cdot\gamma_d}{V+V_W} = \gamma_g$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \sim C_L = \dfrac{2W}{\rho S V^2}$

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = W\gamma_d\ ;\ \frac{1}{2}\rho^2 S^2 V^4 C_{D0} + 2KW^2 = W\gamma_d\,\rho S V^2\ ;$

$V^4 - \dfrac{2W\gamma_d}{\rho S C_{D0}}V^2 + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}} = 0\ ;\ V^2 = \dfrac{\dfrac{2W\gamma_d}{\rho S C_{D0}} + \sqrt{\dfrac{4W^2\gamma_d^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}^2} - \dfrac{16KW^2}{\rho S^2 C_{D0}}}}{2} = \dfrac{W\gamma_d}{\rho S C_{D0}} + \sqrt{\dfrac{W^2}{\rho^2 S^2 C_{D0}^2}\left(\gamma_d^2 - 4KC_{D0}\right)}$

$V = \sqrt{\dfrac{\gamma_d W}{\rho S C_{D0}} + \dfrac{W}{\rho S C_{D0}}\sqrt{\gamma_d^2 - 4KC_{D0}}} = \sqrt{\dfrac{W}{\rho S C_{D0}}\left(\gamma_d + \sqrt{\gamma_d^2 - 4KC_{D0}}\right)}\ ;\ \gamma_d = \dfrac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D0} + \dfrac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$

$h_1' = \dfrac{V\cdot\gamma_d}{V+V_W}\cdot x_{12} = \dfrac{x_{12}}{V+V_W}\cdot\dfrac{\rho S V^3}{2W}\left(C_{D0} + \dfrac{K4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \dfrac{x_{12}}{V+V_W}\left(\dfrac{\rho S V^3 C_{D0}}{2W} + \dfrac{2KW}{\rho S V}\right)$

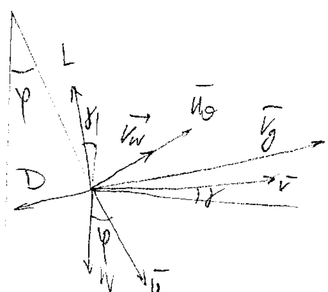
$h_1' = \dfrac{\rho S}{V+V_W}\cdot\dfrac{1}{2W}\left[C_{D0}V^3 + \dfrac{4KW^2}{V}\right]$

$\dfrac{dh_1'}{dV} = 0 = \dfrac{\left(3C_{D0}V^2 + \dfrac{-4KW^2}{V^2}\right)(V+V_W) - \left(C_{D0}V^3 + \dfrac{4KW^2}{V}\right)}{(V+V_W)^2} \Rightarrow \overset{2}{\cancel{3}}C_{D0}V^3 - \dfrac{4KW^2}{V} + 3C_{D0}V^2V_W - \dfrac{4KW^2}{V^2}V_W - \cancel{C_{D0}V^3} - \dfrac{4K}{V}$

$2C_{D0}V^3 - 3C_{D0}V_W V^2 - \dfrac{8KW^2}{V} - \dfrac{4KW^2}{V^2} = 0\ ;\ \boxed{2C_{D0}V^5 - 3C_{D0}V_W V^4 - 8KW^2V - 4KW^2 = 0}$

2) $\vec V_g = \bar V + \bar V_W$

$\bar V = \dot r \bar u_r + \dot\varphi r\, \bar u_\varphi$



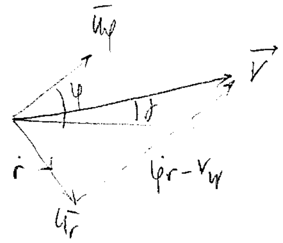
$\dfrac{W}{g}\left(\ddot r - \dot\varphi^2 r\right) = W\cos\varphi - L\cos(\varphi-\gamma) - D\sin(\varphi-\gamma)$ (1)

$\dfrac{W}{g}\left(\ddot\varphi r + r\dot\varphi\dot r\right) = -W\sin\varphi + L\sin(\varphi-\gamma) - D\cos(\varphi-\gamma)$ (2)

(3) $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L\ ;\ C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$ (5)

(4) $D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D\ ;\ C_D = C_{D0} + KC_L^2$ (6)

$\bar V_g = \bar V + \bar V_W = (\dot r \bar u_r + \dot\varphi r\, \bar u_\varphi) + V_W \bar u_\theta = \dot r \bar u_r + (\dot\varphi r - V_W)\bar u_\varphi \Rightarrow V^2 = \dot r^2 + (\dot\varphi r - V_W)^2$ (7)



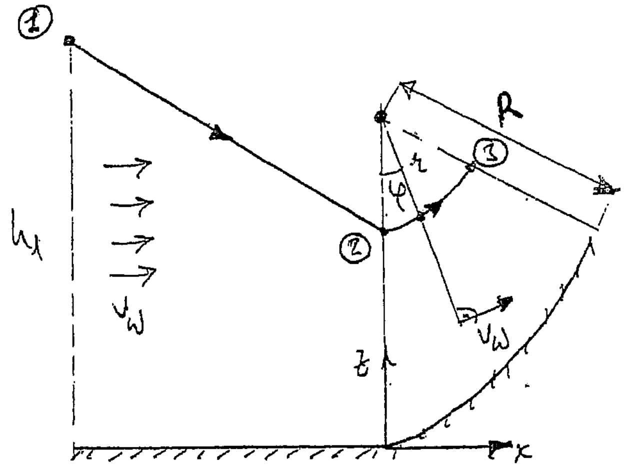
$$\tan(\varphi-\gamma) = \frac{\dot r}{\dot\varphi r - v_w} \quad (8)$$

$$M_A = I_y \cdot \dot q = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_{mA} \quad (9)$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e + C_{m\dot q}\dot q \quad (10)$$

10 ecs.
11 incógnitas $\rightarrow$ 1GDL

$\boxed{\text{H4 (30-06-98)}}$



- Tramo 1-2 : V, γ ctes
- Tramo 2-3 :

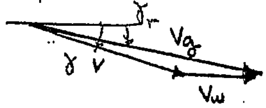
$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\delta_e}}\delta_e + C_{L_{\bar q}}\bar q$$

$\bar q$ = componente velocidad angular

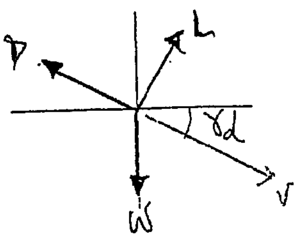
($\neq q = \frac{1}{2}\rho V^2$ = presión dinámica)

Hemos de calcular $h_1 = h_1(V)$ para luego $\partial/\partial V = 0$

$\boxed{1}$ $\gamma_d \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma_r \simeq \gamma_r = \dfrac{V\gamma_d}{V+V_W}$



$\operatorname{tg}\gamma_R \simeq \gamma_R = \dfrac{V\operatorname{sen}\gamma}{V\cos\gamma + V_W} \simeq \dfrac{V\gamma}{V+V_W}$

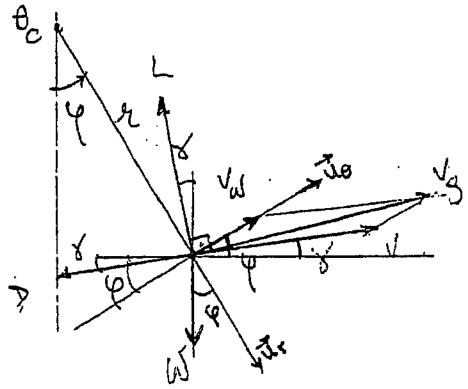


$$\begin{cases} L \simeq W \Rightarrow C_L = \dfrac{2W}{\rho V^2 S} \\ D \simeq W\gamma_d \Rightarrow \gamma_d = \dfrac{D}{W} = \dfrac{\rho V^2 S C_{D_0}}{2W} + \dfrac{2kW}{\rho V^2 S} \end{cases}$$

$$h_{12} \simeq x_{12}\gamma_r = x_{12}\frac{V}{V+V_W}\gamma_d = \frac{V}{V+V_W}\cdot\frac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D_0} + k\frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)x_{12} = \frac{\rho S x_{12}}{V+V_W}\cdot\frac{1}{2W}\left(V^3 C_{D_0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V}\right)$$

$$\frac{dh_{12}}{dV} = 0 \Rightarrow \frac{\rho S C_{D_0}}{W}V^5 + \frac{3\rho S C_{D_0} V_W}{2W}V^4 - \frac{4kW}{\rho S}V - \frac{2kWV_W}{\rho S} = 0$$

$\boxed{2}$



$\vec V_g = \vec V + \vec V_W$ (ladera = arco circunferencia, no la trayectoria !!)

Polares: $\bar V = \dot r\,\bar u_r + \dot\varphi r\,\bar u_\varphi$

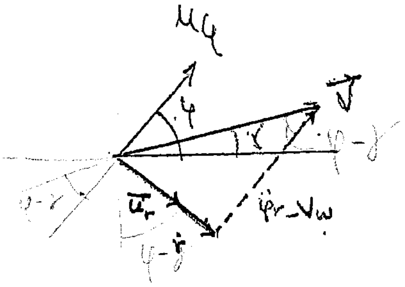
$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}(\ddot r - \dot\varphi^2 r) = W\cos\varphi - L\cos(\varphi-\gamma) - D\operatorname{sen}(\varphi-\gamma) & (1) \\ \dfrac{W}{g}(\ddot\varphi r + 2\dot\varphi\dot r) = -W\operatorname{sen}\varphi + L\operatorname{sen}(\varphi-\gamma) - D\cos(\varphi-\gamma) & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L \;;\; C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha \\ D &= \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_D \;;\; C_D = C_{D_0} + kC_L^2 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}6)$$

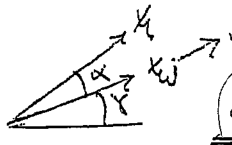
$\boxed{\bar V = \bar V_g - \bar V_W} = (\dot r\,\bar u_r + \dot\varphi r\,\bar u_\varphi) - V_W\bar u_\varphi = \dot r\,\bar u_r + (\dot\varphi r - V_W)\bar u_\varphi \Rightarrow V^2 = \dot r^2 + (\dot\varphi r - V_W)^2$ (7)

Hasta ahora tenemos ... incógnitas ... r(t), C_L, C_D, α, V

* Ligaduras Cinemáticas:



$$\operatorname{tg}(\varphi-\gamma) = \frac{\dot r}{\dot\varphi r - V_w} \qquad (8)$$



?

$$\dot\theta = \dot\gamma + \dot\alpha \qquad (11)$$

Fxzo (vuelo en plano vertical)

Nos falta 1 ec.:

Ec. de momentos: $\vec H = \bar{\bar I}\vec\omega \Rightarrow \frac{d\vec H}{dt} = \bar{\bar I}\frac{d\vec \omega}{dt} = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ & I_y & J_{yz} \\ & & I_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot p \\ \ddot\theta \\ \dot r \end{bmatrix} = I_y \ddot\theta$

$$\bar M_A + \cancel{\bar M_T}^{0} + \cancel{\bar M_{otros}}^{0} = \frac{dH}{dt} \Rightarrow I_y\ddot\theta = M_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S c C_m = q S c C_m \qquad (9)$$

→ Hemos introducido 2 incógnitas nuevas: Cm y (

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + C_{m_q}\bar q \qquad (10)$$

11 ecs

Incógnitas: $r, \varphi, L, D, \gamma, \underbrace{T, \theta, \alpha}, V, \underbrace{\bar q, C_m, \delta_e}$ → tedl

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

H6: 30-06-98

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en u plano vertical con las alas a nivel descompuesto en los dos tramos siguientes (ver figura):

Tramo 1-2: Vuelo con velocidad aerodinámica y ángulo de asiento de velocidad aerodinámica ($|\gamma| \ll 1$) constantes, en presencia de un viento horizontal de cola de módulo V_w constante y conocido.

Tramo 2-3: Vuelo no estacionario en un ladera (modelizada mediante un arco de circunferencia de centro O_cy radio R) con un viento de cola de módulo igual al del tramo anterior y cuya dirección es siempre perpendicular al radio vector que une O_c con el centro de masas del planeador.

Suponiendo además que:

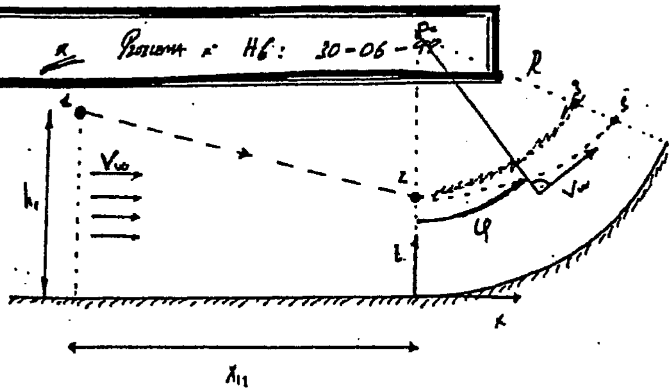
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica con coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc)
- h_1, x_{12}, R ($R > h_1$). φ_3, ρ y g son constantes conocidas.
- La transición entre los dos tramos es despreciable.

Se pide:

1. Para el tramo 1-2, plantear un polinomio que permita obtener, en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema, la velocidad aerodinámica V para la cuál el planeador ha descendido la mínima altura al llegar al final del tramo.
2. Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar la velocidad aerodinámica V y el ángulo de asiento de velocidad γ, en función del tiempo, de la deflexión del timón de profundidad δ_e y, en caso necesario, del resto de grados de libertad matemáticos del problema.

NO ME ATREVO.

Problema nº H6: 30-06-9?



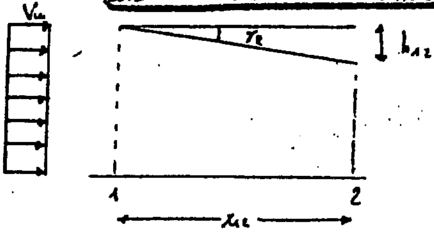
Tramo 1-2 → $V, \gamma(\text{descenso}) \equiv cte$

$V_w \equiv cte$

Tramo 2-3 → Vuelo no estacionario

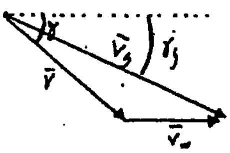
$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_e}\delta_e + \underbrace{C_{Lq}\,q}_{\text{sólo en maniobra}}$$

17 **Para el tramo 1-2, plantee un polinomio que permita obtener, en función de datos conocidos y, en caso necesario, de los grados de libertad matemáticos del problema, la velocidad aerodinámica V para la cual el planeador ha descendido la mínima altura al llegar al final del tramo.**



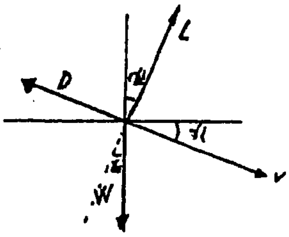
$$\boxed{tg\,\gamma_g = \frac{h_{12}}{x_{12}}}$$

$$\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w$$



Como $\gamma \ll 1 \rightarrow \gamma_g \ll 1$

$$\boxed{tg\,\gamma_g = \frac{V \sin\gamma}{V\cos\gamma + V_w} \simeq \frac{V\gamma}{V+V_w}}$$



$$-L + W\cos\gamma_d = 0 \rightarrow L = W \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$-D + W\sin\gamma_d = 0 \rightarrow \gamma_d = \frac{D}{W}$$

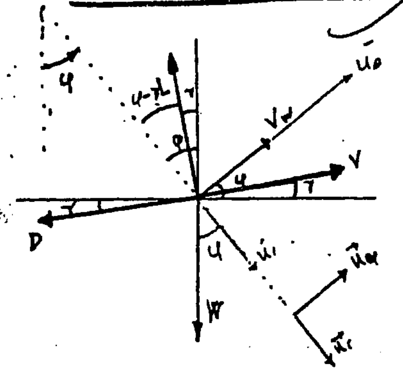
$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + k C_L^2) \Rightarrow \boxed{\gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{1}{2W}\rho S V^2 C_{D0} + \frac{2kW}{\rho S V^2}}$$

$$\boxed{h_{12} = x_{12} \cdot \frac{1}{V+V_w}\left[\frac{1}{2W}\rho S V^3 C_{D0} + \frac{2kW}{\rho S V}\right]}$$

$$\frac{dh_{12}}{dV} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\rho S C_{D0} V^5}{W} + \frac{3}{2W}\rho S C_{D0} V_w V^4 - \frac{4kW}{\rho S}V - \frac{2kWV_w}{\rho S} = 0}$$

Para ver la pinta que tiene miramos siempre los casos asintóticos (por ejemplo $V_w = 0$) y vemos que sale $V = \sqrt[4]{\quad}$. ✓ tiene sentido.

2º) Para el tramo 2-3, plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar la velocidad aerodinámica V y el ángulo de asiento de velocidad γ, en función del tiempo, de la deflexión del timón de profundidad δe y, en caso necesario, del resto de grados de libertad matemáticos del problema.



¡IMPORTANTE: En cualquier problema plantear sistema general, con φ y $\dot\varphi$ y todos los parámetros positivos aunque luego vayan al cero!

Ecs. del movimiento cdl. en polares:

$\bar u_r$: $W\cos\varphi - L\cos(\varphi-\gamma) - D\sin(\varphi-\gamma) = \frac{W}{g}(\ddot r - \dot\varphi^2 r)$ (1)

$\bar u_\varphi$: $-W\sin\varphi + L\sin(\varphi-\gamma) - D\cos(\varphi-\gamma) = \frac{W}{g}(\ddot\varphi r + 2\dot\varphi \dot r)$ (2)

C.A: $L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$ (3) $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$ (4)

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$ (5) $C_D = C_{D0} + k C_L^2$ (6)

$\bar V_g = \bar V + \bar V_w$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar V_g = \dot r \bar u_r + r\dot\varphi \bar u_\varphi \\ \bar V_w = V_w \bar u_\varphi \end{array} \right\}$ $\bar V = \dot r \bar u_r + (r\dot\varphi - V_w)\bar u_\varphi \Rightarrow \boxed{V^2 = \dot r^2 + (r\dot\varphi - V_w)^2}$ (7)

$C_{m_g} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e + C_{m\bar q}\bar q$ (8) ¡Como nos piden que aparezca "δe", no queda más cojones que tener C_{m_g}!

Sólo empleamos la ec. de momento longitudinal ya el movimiento es simétrico....

$M = I_y \dot{\bar q} = M_a + \overset{0}{M_T} + \overset{0}{M_{motor}} = q S c C_{m_g}$ (9) $\boxed{\bar q = \dot\theta = \dot\alpha + \dot\gamma}$ (10) ¡RECORDAR!

Vuelo simétrico en un plano vertical:

INCÓGNITAS: φ, r, L, D, C_L, α, C_D, V, C_{m_g}, δe, $\bar q$, γ → 12 incógnitas

N: 12-10 = 2 gdl. Se suele elegir lo que tenga más sentido físico (α (C_L) y δe por ejemplo)

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.06.09

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

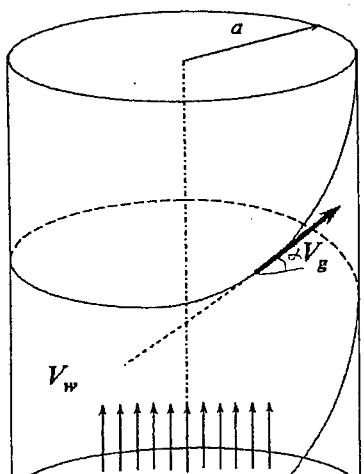
Se considera un planeador efectuando un viraje estacionario, en presencia de una corriente ascendente cuya velocidad es una constante conocida, V_w, con la velocidad aerodinámica contenida en su plano de simetría, con el módulo de la velocidad respecto de tierra, V_g, constante, y con el ángulo de asiento de la velocidad respecto de tierra asimismo constante.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W, la superficie alar S, los coeficientes constantes de la polar es parabólica, etc.).
b) Los valores absolutos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto de tierra son pequeños.
c) El radio del cilindro, a, sobre el que se describe la trayectoria es una constante conocida.
d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2º) Determinar el máximo ángulo de asiento de velocidad aerodinámica que puede alcanzarse, así como el la velocidad aerodinámica y el coeficiente de sustentación para los que éste se produce.
3º) Determinar la velocidad mínima de viento, V_{wmin}, que debe existir para que el planeador no pierda altura.



TIEMPO CONCEDIDO: 1ʰ

PROBLEMA 1:

1)

$$X_w: \ -D + W \cdot \operatorname{sen}\gamma_d = 0$$

$$Y_w: \ W \cdot \operatorname{sen}\mu \cdot \cos\gamma_d - \frac{W}{g} \cdot V \cdot \dot{\chi} \cdot \cos\mu \cdot \cos\gamma_d = 0$$

$$Z_w: \ -L + W \cdot \cos\mu \cdot \cos\gamma_d + \frac{W}{g} \cdot V \cdot \dot{\chi} \cdot \operatorname{sen}\mu \cdot \cos\gamma_d$$

$$\dot{\chi} = V \cdot \frac{\cos\gamma_d}{a}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad\qquad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + kC_L^2\right)$$

$$3 \ ecuaciones$$

$$4 \ variables \ dependientes: \gamma_d, V, \mu, C_L$$

2)

$$\gamma_d = \gamma_d(V) = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V^2} + \frac{V^2}{V_B^2}\left(1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}\right)\right) = -\gamma$$

$$V_{\gamma_{max}} = \frac{V_B}{\sqrt[4]{1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}}} \qquad\qquad \gamma_{Max} = -\frac{1}{E_m} \cdot \sqrt{1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}}$$

$$C_{L_{\gamma_{Max}}} = C_{L_{opt}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{2 \cdot V_B^4}{g^2a^4}}$$

3)

$$\dot{h} = V_w - V \cdot \sin(\gamma_d) \approx V_w - V \cdot \gamma_d = V_w - V_d$$

$$V_d = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V} + \frac{V^3}{V_B^2}\left(1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}\right)\right)$$

$$V_{V_{d_{Min}}} = \frac{V_B}{\sqrt[4]{3 \cdot \left(1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}\right)}}$$

$$V_{d_{Min}} = \frac{2V_B}{\sqrt[4]{3^3}} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{V_B^4}{g^2a^4}} = V_{w_{Min}}$$

PROBLEMA 1º (12.06.09)

1º

$$\begin{cases} (x_w) & -D + W \sin\gamma_d = 0 \\ (y_w) & W \sin\mu \cos\gamma_d - \frac{W}{g} V \dot{\chi} \cos\mu \cos\gamma_d = 0 \\ (z_w) & -L + W \cos\mu \cos\gamma_d + \frac{W}{g} V \dot{\chi} \sin\mu \cos\gamma_d = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\chi} = \frac{V \cos\gamma_d}{a} \; ; \quad L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + k C \ldots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ ecuaciones} \\ 4 \text{ VD} : \gamma_d, V, \mu, C_L \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{N = 1 \text{ gdl}} \; (V)$$

2º

$$\gamma_d = \gamma_d(V) = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V^2} + \frac{V^2}{V_B^2}\left(1 + \frac{V_B^4}{g^2a^2}\right)\right) = -$$

$$V_\gamma = \frac{V_B}{\ldots} \; ; \quad \gamma_{max} = -\frac{1}{E}\sqrt{1 + \frac{V_B^4}{g^2 a^2} \ldots}$$

$$\gamma_d = \gamma_d(V) = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V} + \frac{V^3}{V_B^2}\left(1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}\right)\right)$$

$$V_{\gamma_{max}} = \frac{V_B}{\sqrt[4]{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}}\,; \qquad \gamma_{max} = -\frac{1}{E_m}\sqrt{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}$$

$$C_{L\gamma_{max}} = C_{Lopt}\sqrt{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}$$

$$\dot{h} = V_w - V\sin\gamma_d \simeq V_w - V\gamma_d = V_w - V_d$$

$$V_d = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V} + \frac{V^3}{V_B^2}\left(1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}\right)\right)$$

$$V_{V_{d\,min}} = \frac{V_B}{3^{1/4}\sqrt[4]{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}} \rightarrow$$

(7)

$$\gamma_1 = \gamma_1(V) = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V^2} + \frac{V^2}{V_B^2}\left(1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}\right)\right)$$

$$V_{\gamma_{max}} = \frac{V_B}{\sqrt[4]{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}} \qquad \gamma_{max} = -\frac{1}{E_m}\sqrt{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}$$

$$C_{L\gamma_{max}} = C_{Lopt}\sqrt{1+\frac{g^2a^2}{V_B^4}}$$

(8)

$$\dot{h} = V_v - V\sin\gamma_a \simeq V_v - V\gamma_a = V_v - V_d$$

$$V_d = \frac{1}{2E_m}\left(\frac{V_B^2}{V} + \frac{V^3}{V_B^2}\left(1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}\right)\right)$$

$$V_{V_{d\,min}} = \frac{V_B}{3^{1/4}\sqrt[4]{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}}}$$

$$V_{d_{min}} = \frac{2V_B}{3^{3/4}E_m}\sqrt[4]{1+\frac{V_B^4}{g^2a^2}} = V_{v_{min}}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.06.09

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1º

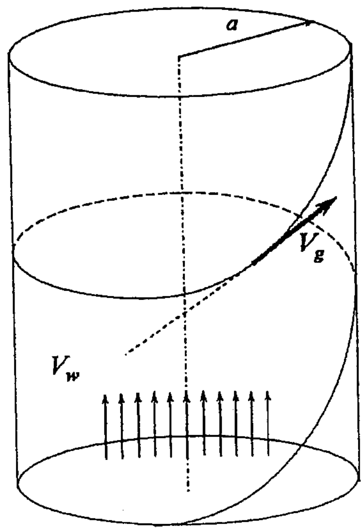
Se considera un planeador efectuando un viraje estacionario, en presencia de una corriente ascendente cuya velocidad es una constante conocida, V_w, con la velocidad aerodinámica contenida en su plano de simetría, con el módulo de la velocidad respecto de tierra, V_g, constante, y con el ángulo de asiento de la velocidad respecto de tierra asimismo constante.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W, la superficie alar S, los coeficientes constantes de la polar es parabólica, etc.).
b) Los valores absolutos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto de tierra son pequeños.
c) El radio del cilindro, a, sobre el que se describe la trayectoria es una constante conocida.
d) ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2º) Determinar el máximo ángulo de asiento de velocidad aerodinámica que puede alcanzarse, así como la velocidad aerodinámica y el coeficiente de sustentación para los que éste se produce.
3º) Determinar la velocidad mínima de viento, V_{wmin}, que debe existir para que el planeador no pierda altura.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

(1) [illegible]

$$\begin{cases} (i) \ [illegible] \sin \theta_l = 0 \\ (ii) \ W \sin \gamma_l [illegible] - \frac{W}{g} V^2 [illegible] \cos \theta_l = 0 \\ (iii) \ [illegible] W \cos \gamma_l + \frac{W}{g} V [illegible] \sin \mu \cos \theta_l = 0 \end{cases}$$

[illegible] $\boxed{n = 1gd\ell}$ (v)

(2) [illegible] $= [illegible] \left([illegible] + \frac{V^2}{V_B^2} \left(1 + \frac{V_B^4}{g^2 a^2} \right) \right) = [illegible]$

$V_{max} = [illegible]$

$$\gamma_{max} = -\frac{1}{E_m} \sqrt{1 + \frac{V_B^4}{g^2 a^2}}$$

$$C_{L_{max}} = C_{opt} \sqrt{1 + \frac{2}{9} [illegible]}$$

(3) [illegible] $= V_h - V_d$

$$V_l = \frac{1}{2E_m} \left([illegible] + [illegible] \left(1 + \frac{V_B^4}{g^2 a^2} \right) \right)$$

$V_{l_{max}} = [illegible]$

$V_{l_{min}} = [illegible] \sqrt{1 + \frac{V_B^4}{g^2 a^2}} = [illegible]$

• Para $V = 0 \Rightarrow q = 0$

$$\boxed{\theta_{eq} = \frac{W_p}{W + W_p} \cdot \frac{x}{l}}$$ (Equilibrio de ...)

• Para $V \to \infty \Rightarrow q \to \infty$

$$\boxed{\theta_{eq} = -i_w - \frac{C_{mac\,w}}{a_w} \cdot \frac{c}{l}}$$ (Equilibrio ...)

2°) Reacciones en el techo (punto A)

$$\boxed{R_x = 0}$$

$$R_z + L_w - W - W_p = 0 \Rightarrow R_z = W + W_p - L_w$$

$$\boxed{R_z = W + W_p - q S a_w (\theta_{eq} + i_w)}$$

3°) Estabilidad del sistema:

$$\frac{d\,C_{mA}}{d\theta} = a_w \cdot \bar{e} - \frac{(W + W_p)}{qS} \cdot \bar{e} = \left(a_w - \frac{W + W_p}{qS}\right)\bar{e}$$

$$\boxed{\frac{d\,C_{mA}}{d\theta} = \left(a_w - \frac{W + W_p}{qS}\right)\bar{e}}$$

$$\boxed{q_{lim} = \frac{W + W_p}{a_w S}}$$

• Influencia de la velocidad:

- $V = 0 \Rightarrow q = 0 \quad \frac{dC_{mA}}{d\theta} = -\frac{W + W_p}{qS} \cdot \bar{e} < 0$ ESTABLE
- $V \to \infty \Rightarrow q \to \infty \quad \frac{dC_{mA}}{d\theta} = a_w \cdot \bar{e} > 0$ INESTABLE

• Influencia de la posición del contrapeso, x:

NO INFLUYE EN LA ESTABILIDAD

• Influencia de la incidencia del ala, i_w:

NO INFLUYE EN LA ESTABILIDAD

C-100 (Rev. 28.10.85)

PDTE

PROBLEMA 13

Se considera un planeador cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se suponen conocidas, realizando un viraje simétrico estacionario.

Suponiendo que:

a) El valor absoluto del ángulo de asiento de velocidad es mucho menor que uno.
b) La atmósfera está en calma.
c) Las variaciones de densidad con la altura son despreciables.
~~d) La polar es parabólica de coeficientes constantes.~~

Se pide:

1°) Plantear las ecuaciones del sistema adimensionalizándolas en la forma usual. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2°) Determinar el número de vueltas máximo que el planeador puede dar en su descenso desde una altura h_1 hasta llegar al suelo, así como la velocidad, el ángulo de balance y el factor de carga para los que se satisface dicha condición. Razonar la influencia de la carga alar y de los parámetros aerodinámicos en el número de vueltas máximo obtenido.

PLANEADOR : VIRAJE SIMÉTRICO ESTACIONARIO CON R, γ, λ CTES => HÉLICE

PROBLEMA 14

Un avión describe la trayectoria acrobática esquematizada en las figuras adjuntas, que consiste en una hélice sobre un cilindro de eje horizontal y de radio R, con ángulo de paso δ y con velocidad V, siendo R, δ, V constantes conocidas del problema.

Suponiendo que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión (entre ellas: $C_D = C_{D_0} + k\,C_L^2, C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\,\alpha$, con $C_{D_0}, k, C_{L_0} C_{L_\alpha}$ constantes conocidas; peso del avión W constante).

b) El empuje del avión está siempre dirigido según el eje x_w y es independiente de la altura y la velocidad.

c) La atmósfera está en calma y sus variaciones de densidad con la altura son despreciables.

d) Los ejes x_H, y_H, z_H representados en las figuras son paralelos a los ejes tierra correspondientes.

e) El vuelo es simétrico.

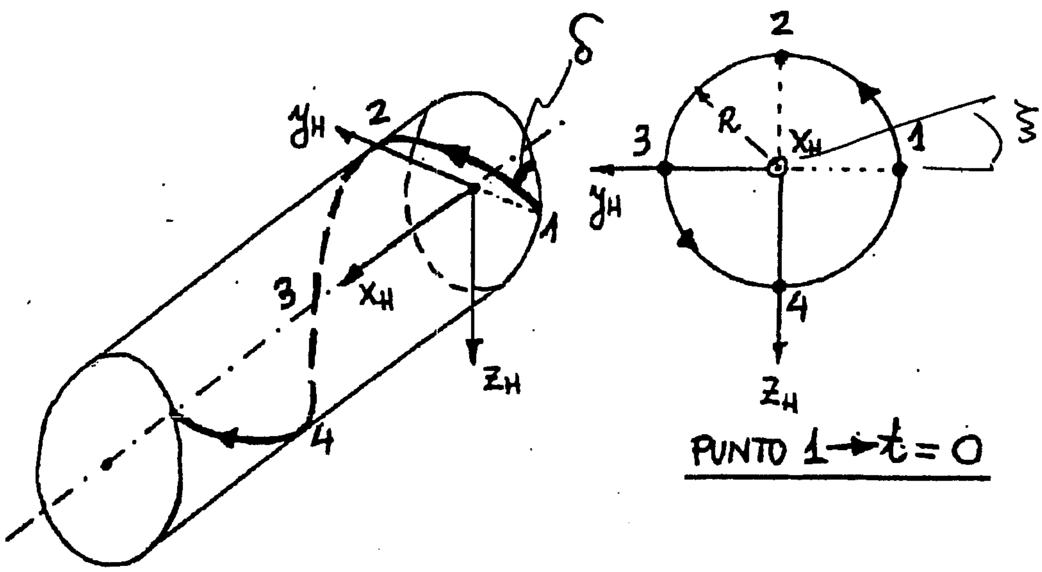
Se pide:

1°) Determinar los ángulos de asiento y guiñada de velocidad en función del tiempo, $\gamma = \gamma(t), \chi = \chi(t)$, y representarlos gráficamente.

2°) Plantear el sistema de ecuaciones cinemáticas y dinámicas del avión.

3°) Determinar el empuje del avión T, el ángulo de balance de velocidad μ y el ángulo de ataque α en función de los grados de libertad matemáticos del problema o, en su caso, del tiempo.

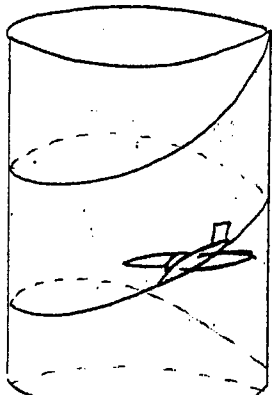
NOTA: La maniobra acrobática descrita es una idelización matemática del denominado **TONEL VOLADO**



PROBLEMA 12 (20-11-1990)   problema 13

- VIRAJE SIMÉTRICO ESTACIONARIO
- $|\gamma| \ll 1$
- ATMÓSFERA EN CALMA, $V_W = 0 \longrightarrow \vec{V}_g = \vec{V}$
- $\rho \neq \rho(h)$
- $C_D = C_{D0} + K C_L^2$, de coeficientes constantes.

1) Puesto que el viraje es simétrico y estacionario, el radio de giro y el ángulo de descenso de la trayectoria son constantes, luego la trayectoria es una hélice contenida en un cilindro circular.



La trayectoria presenta μ, γ y χ.
BALANCEO ASCENSO GUIÑADA

Vamos a plantear las ecuaciones genéricas básicas de un problema de actuaciones y luego las simplificaremos adaptándolas a nuestro problema. (En ejes viento)

- ECUACIONES DINÁMICAS

$$\left\{\begin{array}{l} T\cos\epsilon\cos\nu - D - W\operatorname{sen}\gamma - \cancel{m\dot{V}} = 0 \\ T\cos\epsilon\operatorname{sen}\nu - Q + W\operatorname{sen}\mu\cos\gamma - mV(\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu - \cancel{\dot{\gamma}}\operatorname{sen}\mu) = 0 \\ -T\operatorname{sen}\epsilon - L + W\cos\mu\cos\gamma + mV(\cancel{\dot{\gamma}}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu) = 0 \end{array}\right.$$

del libro.

$\downarrow$ $T=0$ (Planeador); $Q=0$ (simétrico); $\dot{\gamma}=\dot{V}=0$ (estacionario)

$$\left\{\begin{array}{lr} -D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 & (1) \\ W\operatorname{sen}\mu\cos\gamma = \frac{W}{g} V\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu & (2) \\ -L + W\cos\mu\cos\gamma = -\frac{W}{g} V\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu & (3) \end{array}\right.$$

$\hat{D} = -E_m \operatorname{sen}\gamma$ | $\hat{D} = -E_m\gamma$
$\operatorname{sen}\mu\cos\gamma = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\cos\gamma\cos\mu$ | $\operatorname{sen}\mu = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\cos\mu$
$n = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu + \cos\mu\cos\gamma$ | $n = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\operatorname{sen}\mu + \cos\mu$

$n\operatorname{sen}\mu = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}(1-\cos^2\mu) + \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\cos^2\mu = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}$

$n\cos\mu = \operatorname{sen}^2\mu + \cos^2\mu = 1$

$\hat{D} = -E_m\operatorname{sen}\gamma$
$\operatorname{sen}\mu\cos\gamma = \frac{V}{g}(\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu)$
$-n + \cos\mu\cos\gamma = -\frac{V}{g}\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu$

$\longrightarrow$ $\operatorname{sen}\mu\cos\gamma$ $\frac{1}{g}$ [illegible] $= \frac{V^2\cos^2\gamma}{R}$ $\frac{\cos\gamma}{n}$ $\Rightarrow n\operatorname{sen}\mu = \frac{V^2\cos^2\gamma}{}$

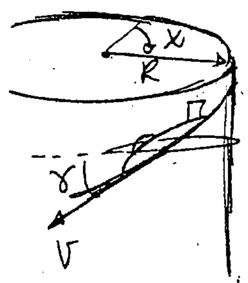
$-n + \cos\mu\cos\gamma = -\frac{\operatorname{sen}^2\mu\cos\gamma}{\cos\mu} \Rightarrow \boxed{n = \cos\gamma\left(\cos\mu + \frac{\operatorname{sen}^2\mu}{\cos\mu}\right) = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu}}$ [illegible]

De (2) $\longrightarrow$ $W\cos\gamma = \frac{W}{g} V\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu / \operatorname{sen}\mu$

Sustituyendo en (3) $-L + \frac{W}{g}\frac{V\dot{\chi}\cos\gamma\cos^2\mu}{\operatorname{sen}\mu} = -\frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu$

$$-L\operatorname{sen}\mu = -\frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\gamma\cos^2\mu - \frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}^2\mu = -\frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\gamma$$

$$\hookrightarrow \quad L\operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\gamma \longrightarrow L\operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma \quad (3^*)$$



$\dot{\chi}R = V\cos\gamma$

$W\cos\gamma = L\,\frac{\frac{W}{g}V\cdot\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu}{\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma}$

Si ahora sustituimos (3*) en (2) : $L\cos\mu = W\cos\gamma \quad (2^*)$

El sistema queda :

$$\boxed{\begin{aligned} &-W\operatorname{sen}\gamma - D = 0 \\ &L\operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma \\ &L\cos\mu = W\cos\gamma \\ &C_D = C_{D0} + KC_L^2 \end{aligned}}$$

$(D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D)$

Adimensionalizando con $V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}$ velocidad base ; $E_m = \frac{1}{2\sqrt{KC_{D0}}}$ eficiencia máxima.

$-W\operatorname{sen}\gamma - D = 0 \longrightarrow -E_m\operatorname{sen}\gamma - \underbrace{\frac{DE_m}{W}}_{\hat{D}} = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{D} = -E_m\operatorname{sen}\gamma}$

$L\operatorname{sen}\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma \longrightarrow n\operatorname{sen}\mu = \underbrace{\frac{V_B^2}{gR}}_{1/\hat{R}}\hat{V}^2\cos^2\gamma \longrightarrow \boxed{n\operatorname{sen}\mu = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}}\cos^2\gamma}$

$L\cos\mu = W\cos\gamma \longrightarrow n\cos\mu = \cos\gamma \longrightarrow \boxed{n = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu}}$

$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \xrightarrow{\text{DE TEORÍA}} \boxed{\hat{D} = \frac{DE_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right)}$

Por tanto tenemos :

$$\hat{D} = -E_m \operatorname{sen}\gamma$$
$$n \operatorname{sen}\mu = \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}} \cos^2\gamma$$
$$n = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu}$$
$$\hat{D} = \frac{D E_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\operatorname{sen}\gamma \sim \gamma \\ \cos\gamma \sim 1}]{\gamma \ll 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{D} &= -E_m \gamma \\ n \operatorname{sen}\mu &= \frac{\hat{V}^2}{\hat{R}} \\ n &= \frac{1}{\cos\mu} \\ \hat{D} &= \frac{D E_m}{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \end{aligned}}$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 6 incógnitas $n, \mu, \gamma, \hat{R}, \hat{V}, \hat{D}$

Nº GRADOS DE LIBERTAD $\equiv 2$

- ECUACIONES CINEMÁTICAS

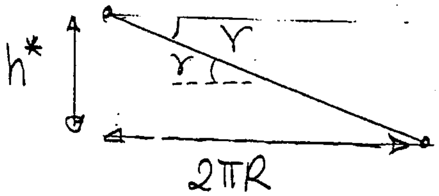
$$\dot{x} = V\cos\gamma\cos\chi$$
$$\dot{y} = V\cos\gamma\operatorname{sen}\chi$$
$$\dot{h} = V\operatorname{sen}\gamma = -\dot{z}$$

Al sistema anterior se puede añadir la ecuación :

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L_{opt}}} \quad ; \quad C_{L_{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}$$

(pero se añadiría una incógnita más) $\to \alpha$

2) Si se desarrolla la hélice de la trayectoria obtenemos una línea recta inclinada un ángulo γ. Cada vez que el planeador da una vuelta de la hélice $\chi = 2\pi$.



1 vuelta $\quad h^* = 2\pi R \operatorname{Tg}\gamma \underset{\gamma \ll 1}{\sim} 2\pi R \gamma$

Para descender una altura h_1 : tendremos que dar N vueltas $\quad h_1 = N \cdot h^* = N \cdot 2\pi R\gamma \longrightarrow N = \frac{h_1}{2\pi R\gamma}$

Para que N_{max} necesitamos $(R\gamma)_{min}$.

Tenemos que resolver el sistema que obtener R y γ e imponer $(R\cdot\gamma)_{min}$:

* $\hat{D} = -E_m\gamma \longrightarrow \underbrace{\gamma}_{<0} = -\dfrac{\hat{D}}{E_m} \longrightarrow |\gamma| = \dfrac{\hat{D}}{E_m} = \dfrac{1}{2E_m}\left(\hat{V}^2 + \dfrac{n^2}{\hat{V}^2}\right)$ (A)

* $n = \hat{V}^2 \dfrac{C_L}{C_{L_{opt}}}$ (B)

* $n = \dfrac{1}{\cos\mu} \longrightarrow \operatorname{sen}\mu = \sqrt{1-\cos^2\mu} = \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2-1}\cdot\dfrac{1}{n}$

* $n \operatorname{sen}\mu = \dfrac{\hat{V}^2}{\hat{R}} \longrightarrow \cancel{n}\cdot\dfrac{1}{\cancel{n}}\sqrt{n^2-1} = \dfrac{\hat{V}^2}{\hat{R}} \longrightarrow \hat{R} = \dfrac{\hat{V}^2}{\sqrt{n^2-1}}$ (C)

Por tanto con (A) (B) y (C)

$$|\gamma\hat{R}| = \frac{1}{2E_m}\left(\hat{V}^2 + \frac{\hat{V}^4(C_L/C_{L_{opt}})^2}{\hat{V}^2}\right)\cdot \hat{V}^2 \frac{1}{\sqrt{\hat{V}^4\left(\frac{C_L}{C_{L_{opt}}}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2E_m}\left(1+\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\right)\hat{V}^4\cdot\frac{1}{\cancel{\hat{V}^2}}\cdot\cancel{\hat{V}^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}} = \frac{1}{2E_m}\left(1+\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\right)\cdot\frac{\hat{V}^4}{\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}}$$

Para minimizar $|\gamma\hat{R}| \longrightarrow \dfrac{\partial(\gamma\hat{R})}{\partial\hat{V}} = 0$

$$\frac{\partial(\gamma\hat{R})}{\partial\hat{V}}=\frac{1}{2E_m}\left(1+\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\right)\cdot\left[\frac{4\hat{V}^3\cdot\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}-\hat{V}^4\frac{1}{2\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}}\cdot\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\cdot 4\hat{V}^3}{\left(\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}\right)^2}\right]=0$$

$$\cancel{4\hat{V}^3}\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}=\cancel{4\hat{V}^3}\cdot\hat{V}^4\cdot\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1}}$$

$$2\left(\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}-1\right)=\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}$$

$$2\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\hat{V}^4-2=\hat{V}^4\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\ ;\quad \hat{V}^4=\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_L^2}\cdot 2$$

Por tanto: $\boxed{\left.\hat{V}\right)_{(\hat{R}\gamma)_{min}}=\sqrt[4]{2\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_L^2}}=\sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{C_{L_{opt}}}{C_L}}}$

Sustituyendo en $(\hat{R}\gamma)=\frac{1}{\cancel{2}E_m}\left(1+\frac{C_L^2}{C_{L_{opt}}^2}\right)\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_L^2}}{\sqrt{2\frac{\cancel{C_{L_{opt}}^2}}{\cancel{C_L^2}}\cdot\frac{\cancel{C_L^2}}{\cancel{C_{L_{opt}}^2}}-1}}=$

$$=\frac{1}{E_m}\left(\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_L^2}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}=\boxed{\frac{1}{E_m}\left(\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_L^2}+1\right)}$$ (Mínimo si $C_L=C_{L_{MAX}}$)

Por tanto: $N_{max}=\frac{h_1}{2\pi(R\gamma)_{min}}=\frac{h_1}{2\pi(\hat{R}\gamma)_{min}}\cdot\frac{g}{V_B^2}=\frac{h_1\,g}{2\pi V_B^2\frac{1}{E_m}\left(\frac{C_{L_{opt}}^2}{C_{L_{MAX}}^2}+1\right)}$

$$N_{max} = \frac{h_1 g}{2\pi} \cdot \frac{\rho S}{2W} \sqrt{\frac{G_\infty}{K}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{K \cancel{G_\infty}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{G_{opt}^2}{G_{MAX}^2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{h_1 \rho g S}{8\pi W K} \cdot \frac{1}{\left(\frac{G_\infty}{K G_{MAX}^2} + 1\right)} = \frac{h_1 \rho g S}{8\pi W \left(\frac{G_\infty}{G_{MAX}^2} + K\right)}$$

$$\boxed{N_{max} = \frac{h_1 \rho g S}{8\pi W \left(\frac{G_\infty}{G_{MAX}^2} + K\right)}}$$

Si $\left(\frac{W}{S}\right) \uparrow \quad N_{max} \downarrow$

$G_\infty \uparrow \quad N_{max} \downarrow$

$K \uparrow \quad N_{max} \downarrow$

- $$\boxed{V)_{N_{MAX}}} = \hat{V} \cdot V_B = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{\frac{G_{opt}}{G_{MAX}}} \cdot \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{K}{G_\infty}} = \boxed{\sqrt[4]{2} \sqrt{\frac{2W}{\rho S G_{MAX}}}}$$

- $$\boxed{\gamma)_{N_{MAX}}} = \frac{1}{2E_m} \cdot \left(\hat{V}^2 + \frac{\hat{V}^4 \frac{G_{MAX}^2}{G_{opt}^2}}{\hat{V}^2}\right) = \frac{\hat{V}^2}{2E_m} \cdot \left(1 + \frac{G_{MAX}^2}{G_{opt}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2E_m} \sqrt{2} \, \frac{G_{opt}}{G_{MAX}} \left(1 + \frac{G_{MAX}^2}{G_{opt}^2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{G_{MAX}} \left(G_\infty + K G_{MAX}^2\right)}$$

- $$n)_{N_{MAX}} = \hat{V}^2 \frac{G_{LMAX}}{G_{opt}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\cancel{G_{Lopt}}}{\cancel{G_{MAX}}} \cdot \frac{\cancel{G_{MAX}}}{\cancel{G_{opt}}} = \sqrt{2} \; ; \; \boxed{n)_{N_{MAX}} = \sqrt{2}}$$

PROBLEMA 13 CLASE

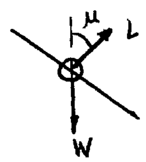
PLANEADOR $\Rightarrow$ VIRAJE SIMÉTRICO ESTACIONARIO

$$\begin{cases} |\gamma| \ll 1 \\ \text{Atmósfera en calma } V_w = 0 \\ C_D = C_{D0} + K C_L^2 \to K, C_{D0} = \text{ctes} \end{cases}$$

1 ECS. del SISTEMA y nº de gdl

$$\begin{cases} \cancel{T\cos\varepsilon\cos\nu} - mg\,\text{sen}\,\gamma - D = m\cancel{\dot{V}} \\ \cancel{T\cos\varepsilon\,\text{sen}\,\nu} + mg\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu - \cancel{Q} = mV(-\cancel{\dot{\gamma}}\,\text{sen}\,\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\cancel{\cos\mu}) \\ -\cancel{T\,\text{sen}\,\varepsilon} - L + mg\cos\gamma\cos\mu = -mV(\cancel{\dot{\gamma}\cos\mu} + \dot{\chi}\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma\cos\chi \\ \dot{y}_e = V\cos\gamma\,\text{sen}\,\chi \\ \dot{h} = V\,\text{sen}\,\gamma \approx \gamma \end{cases}$$



en ejes h.

$$\begin{cases} L\cos\mu - W = 0 \\ L\,\text{sen}\,\mu = \frac{W}{g}V\cdot\dot{\chi} \end{cases}$$

Planeador $T = 0$

Vuelo simétrico $\beta = \nu = 0 \to Q = 0$

Vuelo estacionario

$|\gamma| \ll 1$

$\hookrightarrow \dot{\gamma} \approx 0$

$$\begin{cases} D + W\gamma = 0 \quad (1) \\ \cancel{W}\,\text{sen}\,\mu = \frac{\cancel{W}}{g}\cdot V\cdot\dot{\chi}\cancel{\cos\mu} \quad (2) \\ \cancel{W}\cos\mu - L = -\frac{\cancel{W}}{g}V\,\dot{\chi}\,\text{sen}\,\mu \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\chi \\ \dot{y}_e = V\,\text{sen}\,\chi \\ \dot{h} = V\cdot\gamma \end{cases}$$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$

$C_D = C_{D0} + K C_L^2$

ADIMENSIONALIZO

$$\begin{cases} \hat{D} + E_m\gamma = 0 \\ \text{sen}\,\mu = \hat{V}\frac{V_0\dot{\chi}}{g}\cos\mu \\ \cos\mu - \underbrace{\hat{L}}_{n} = -\hat{V}\frac{V_0\dot{\chi}}{g}\,\text{sen}\,\mu \end{cases}$$

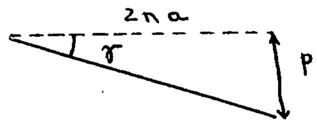
$$\begin{cases} \hat{\dot{x}}_e = \hat{V}\cos\chi \\ \hat{\dot{y}}_e = \hat{V}\,\text{sen}\,\chi \\ \hat{\dot{h}} = \hat{V}\cdot\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{D} = \frac{1}{2E_m}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \\ n = \hat{V}^2\frac{C_L}{C_{Lopt}} \end{cases}$$

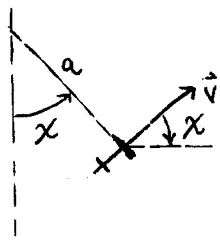
$$\begin{cases} \text{VAR. DEPEND.: } \hat{\dot{x}}_e, \hat{\dot{y}}_e, \hat{\dot{h}}, \hat{V}, \hat{D}, \chi, \mu, \gamma, n, C_L = 10 \\ \text{Ecs}: 8 \qquad N = 2 \end{cases}$$

2 VUELTAS QUE PUEDE DAR en el DESCENSO desde h_1 hasta el suelo

P = paso de la hélice $\Rightarrow$ lo que baja en una vuelta.



$\text{tg}\,\gamma \approx \gamma = \frac{P}{2\pi a}$; $P = 2\pi a\gamma \Rightarrow N = \frac{h_1}{2\pi a|\gamma|}$ necesitamos $a|\gamma|$



$V = \dot{\chi}\,a$

$\boxed{\dot{\chi} = \frac{V}{a}}$

(2) $\text{tg}\,\mu = \frac{V}{g}\dot{\chi} = \frac{V^2}{ga} \longrightarrow V^2 = g\,a\,\text{tg}\,\mu$

(1) $D = -W\gamma \Rightarrow \gamma = -D/W = -\frac{\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + KC_L^2) = -\frac{\rho S}{2W}\overbrace{g\,a\,\text{tg}\,\mu}^{V^2}(C_{D0} + KC_L^2)$

En ejes horizont. $L\,\text{sen}\,\mu = \frac{W}{g}V\cdot\dot{\chi} = \frac{W}{g}\frac{V^2}{a}$; $a = \frac{W}{g}\frac{\cancel{V^2}}{\frac{1}{2}\rho\cancel{V^2}S C_L\,\text{sen}\,\mu}$

Ya tenemos a y $|\gamma| \longrightarrow a\cdot|\gamma| = \frac{\cancel{\rho S}}{\cancel{2W}}\cancel{g}\,\overbrace{a}^{\cdots}\cancel{\text{tg}\,\mu}\frac{C_D}{\cos\mu}\cdot\frac{\cancel{2W}}{\cancel{\rho g S}}\cdot\frac{1}{C_L\cancel{\text{sen}\,\mu}} = \frac{C_D}{C_L\cos\mu}\cdot\frac{2W}{\rho g S}\cdot\frac{1}{C_L\,\text{sen}\,\mu}$

$$\boxed{a\cdot|\gamma| = \frac{4W}{\rho g S}\frac{1}{\text{sen}\,2\mu}\left[\frac{C_{D0}}{C_L^2} + K\right]}$$

$N_{máx} \equiv a|\gamma|$ mínimo

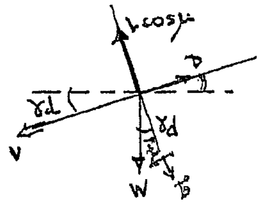
$\downarrow$

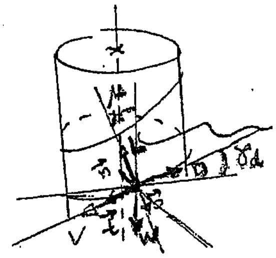
$$\begin{cases} (\text{sen}\,2\mu)_{máx} = 1 \Rightarrow \mu = \pi/4 \\ C_{L\,máx} \end{cases}$$

$$\boxed{N_{máx} = \frac{h_1}{\frac{8\pi W}{\rho g S}\left(\frac{C_{D0}}{C_{Lmáx}^2} + K\right)}}$$

$$\begin{cases} n = \frac{1}{\cos\mu} = \frac{1}{\cos\pi/4} = \sqrt{2} \\ V^2 = \frac{4W}{\rho S C_{Lmáx}\sqrt{2}} \end{cases}$$

PROBLEMA 13





- Relaciones dinámicas

1).

$$\vec{t}: \quad -D + W \operatorname{sen} \gamma_d = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n}: \quad L \operatorname{sen}\mu - \frac{W}{g}\frac{V^2}{\rho} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{b}: \quad L \cos\mu - W \cos\gamma_d = 0 \quad (3)$$

$\xrightarrow{\text{adimensionalizar}}$

$$n \operatorname{sen}\mu = \frac{V_B^2}{gR}\hat{V}^2 \cos^2\gamma_d$$

$$n \cos\mu = \cos\gamma_d$$

$$\hat{D} = \frac{DE_m}{W} = E_m \operatorname{sen}\gamma_d$$

$$\boxed{\rho = \frac{R}{\cos^2\gamma_d}} \quad V = V_B \cdot \hat{V} \longrightarrow \text{Como } \gamma_d \ll 1 \Rightarrow \rho \cong R$$

- De las características aerodinámicas del avión:

$$\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \quad (4)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}} \quad (5) ; \quad C_L = C_L(\alpha) \quad (6)$$

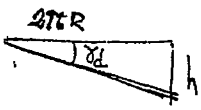
- V_B es dato (ya que las variaciones de ρ son despreciables)

- n° ecs : 6
- incógnitas : $n, \mu, R, \hat{V}, \gamma_d, \hat{D}, C_L, \alpha$ — 8

$\longrightarrow \boxed{N = 2 \text{ GDL}} \longrightarrow (C_L, \mu)$ ($\alpha \updownarrow C_L$)

2)

- altura por vuelta:



$$h = 2\pi R \cdot \operatorname{tg}\gamma_d \underset{\{\gamma_d \ll 1\}}{\simeq} 2\pi R\gamma_d \longrightarrow N \cdot 2\pi R \cdot \gamma_d = h_1 \longrightarrow \boxed{N = \frac{h_1}{2\pi R \gamma_d}}$$

- $$R \underset{(2)}{=} \frac{V^2}{g}\cdot\frac{W}{L}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\mu} = \frac{2W}{\rho S g C_L \cdot \operatorname{sen}\mu} = R(\mu, C_L)$$

- $$\operatorname{sen}\gamma_d \simeq \gamma_d = \frac{D}{W} \xrightarrow[\gamma_d = -\gamma]{} \gamma = -\frac{D}{W} = \frac{-\rho S V^2}{2W}(C_{D0} + kC_L^2)$$

- $$L\cos\mu = \underbrace{\cos\gamma_d}_{\simeq 1}\cdot W \longrightarrow V^2 = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{1}{C_L \cos\mu}$$

$$\longrightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{C_L \cos\mu}\left(C_{D0} + kC_L^2\right) \neq \gamma(\mu, C_L)}$$

Buscamos ahora minimizar el producto R·senγ para alcanzar N_{max}:

- $$|R\gamma| = \frac{4W}{\rho g S} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 2\mu}\left(\frac{C_{D0}}{C_L^2} + k\right) \longrightarrow |R\cdot\gamma|_{min} \left[\begin{array}{l} \mu = \frac{\pi}{4} \\ C_L = C_{L_{max}} \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{N_{max} = \frac{\rho g S h_0}{8\pi W\left(\frac{C_{D0}}{C_{L_{max}}^2} + k\right)}}$$

- Para las cond. de N_{max}:

$$\left[\begin{array}{l} V_{N_{max}}^2 = \dfrac{2\sqrt{2}\,W}{\rho S C_{L_{max}}} \\ (\gamma_d)_{N_{max}} = \dfrac{\sqrt{2}}{C_{L_{max}}}\left(C_{D0} + k C_{L_{max}}^2\right) \\ n_{N_{max}} = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \frac{W}{S} \downarrow \\ C_{D0} \downarrow \\ k \downarrow \\ \text{(alargamiento grande)} \end{array}\right| \Rightarrow N_{max} \uparrow}$$

Viraje estacionario planeador

PROBLEMA 6

La figura representa un planeador, con polar parabólica y cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se consideran conocidas, unido al suelo por su centro de gravedad mediante el cable AB, de longitud r, sin peso y de resistencia aerodinámica despreciable. El centro de gravedad del planeador describe una trayectoria situada en un plano vertical con un viento de cara uniforme de velocidad V_w.

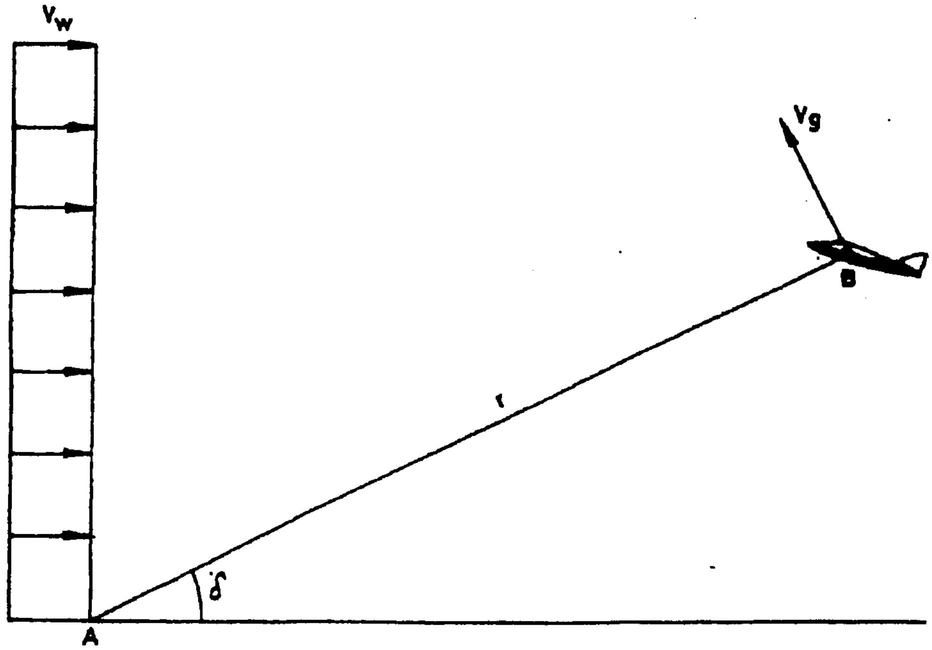
Suponiendo que el movimiento tiene lugar a C_L constante y conocido, se pide:

1°)Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del avión en el sistema de ejes intrínsecos y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2°)Determinar el ángulo polar, δ, de equilibrio.

3°)Determinar el valor de C_L que maximiza el ángulo δ de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} \rightarrow 0$$



PROB 1.

C-101

PROBLEMA 5

Se considera un avión de peso W y de superficie alar S, conocidos, provisto de motores con empuje orientable que está realizando una subida simétrica rectilínea estacionaria.

Suponiendo que todos los ángulos que intervienen en el problema no son pequeños, se pide:

1°) Plantear las ecuaciones del sistema y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2°) Determinar el ángulo de asiento de velocidad, γ, en función de E, T/W y ε (ángulo de ataque del empuje).

3°) Determinar el ángulo de ataque del empuje que maximiza el ángulo de asiento de velocidad. Interpretar geométricamente la solución obtenida.

PROBLEMA 6 CLASE

PLANEADOR

POLAR PARABÓLICA $\longrightarrow C_D = C_{D_0} + K C_L^2$

CARACT. AERODINAM, GEOMÉTRICAS, MÁSICAS ≡ CONOCIDAS

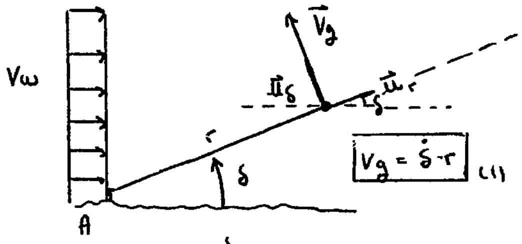
CABLE AB $\longrightarrow$ lo une al suelo $\begin{cases} \text{longitud } r \\ \text{sin peso} \\ \text{resist. aerodinámica despreciable} \end{cases}$

PLANO VERTICAL

VIENTO UNIFORME V_w

MOVIM. a C_L = cte

1 ECS. del MOVIM. en EJES INTRÍNSECO + Nº de gdl



$$\boxed{V_g = \dot{\delta}\cdot r} \quad (1)$$

C_L = cte $\Rightarrow \alpha$ = cte ≡ CONOCIDO

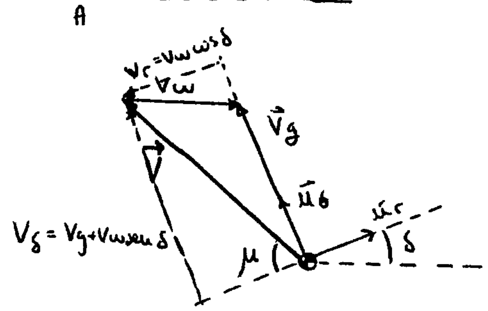
$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w \begin{cases} \vec{V}_g = V_g \cdot \vec{u}_\delta \\ \vec{V}_w = V_w \cdot \cos\delta\, \vec{u}_r + V_w(-\operatorname{sen}\delta)\cdot \vec{u}_\delta \end{cases}$$

Así $\vec{V} = (V_g + V_w \operatorname{sen}\delta)\,\vec{u}_\delta - V_w\cos\delta\, \vec{u}_r$

$\hookrightarrow \vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_g^2 + V_w^2 \operatorname{sen}^2\delta + 2V_g V_w \operatorname{sen}\delta + V_w^2\cos^2\delta}$$

$$\boxed{V^2 = V_g^2 + V_w^2 + 2V_g V_w \operatorname{sen}\delta} \quad (2)$$

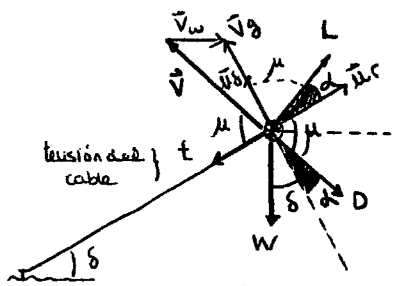


$$\vec{V} = -V\cos\mu\,\vec{u}_r + V\operatorname{sen}\mu\,\vec{u}_\delta$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\mu = \frac{V_\delta}{V_r} = \frac{V_g + V_w\operatorname{sen}\delta}{-V_w\cos\delta} = -\frac{V_g}{V_w\cos\delta} - \operatorname{tg}\delta} \quad (3)$$

Ya tenemos de $\begin{cases} (1) \rightarrow V_g = V_g(\delta, r) \\ (2) \rightarrow V = V(V_g, V_w, \delta) \\ (3) \rightarrow \mu = \mu(V_g, V_w, \delta) \end{cases}$

EQUILIBRIO de FUERZAS



$$\alpha + \mu = 90°$$

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}_g}, \quad m = \frac{W}{g}$$

① $\begin{cases} \vec{V}_g = \cancel{\dot{r}}^{=0}\,\vec{u}_r + \dot{\delta}r\,\vec{u}_\delta = \dot{\delta}r \\ \vec{a}_g = (\cancel{\ddot{r}}^{=0} - \dot{\delta}^2 r)\,\vec{u}_r + (\ddot{\delta}r + \cancel{2\dot{\delta}\dot{r}})\,\vec{u}_\delta \\ \quad \hookrightarrow \vec{a}_g = -\dot{\delta}^2 r\,\vec{u}_r + \ddot{\delta}r\,\vec{u}_\delta \end{cases}$

② $\begin{cases} L \longrightarrow L\cos\alpha\,\vec{u}_r + L\operatorname{sen}\alpha\,\vec{u}_\delta = L\operatorname{sen}\mu\,\vec{u}_r + L\cos\mu\,\vec{u}_\delta \\ D \longrightarrow D\cos\mu\,\vec{u}_r - D\operatorname{sen}\mu\,\vec{u}_\delta \\ W \longrightarrow -W\operatorname{sen}\delta\,\vec{u}_r - W\cos\delta\,\vec{u}_\delta \\ t \longrightarrow -t\,\vec{u}_r \end{cases}$

Así EC. DINÁMICAS:

$$\begin{cases} \vec{u}_r: \ L\operatorname{sen}\mu + D\cos\mu - W\operatorname{sen}\delta - t = \dfrac{W}{g}\cdot(-\dot{\delta}^2 r) \quad (1) \\ \vec{u}_\delta: \ L\cos\mu - D\operatorname{sen}\mu - W\cos\delta = \dfrac{W}{g}\cdot(\ddot{\delta}r) \quad (2) \\ L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L = L(\underbrace{h}_{r\cdot\operatorname{sen}\delta}, V, \underbrace{C_L}_{\text{dato}}) \quad (3) \\ D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_D = D(\delta, V, C_D) \quad (4) \\ C_D = C_{D_0} + K C_L^2 \quad (5) \\ V^2 = V_w^2 + V_g^2 + 2V_w V_g \operatorname{sen}\delta \quad (6) \\ \operatorname{tg}\mu = -V_g/V_w\cos\delta - \operatorname{tg}\delta \quad (7) \end{cases}$$

dato

$V_g = \dot{\delta}r$ (8)

Incógnitas: $\mu, \delta, t, D, L, V, C_D, V_g$ ≡ 8 incógnitas

$N_{GDL} \equiv 8 - 8$ ecs $= 0$ Problema matemáticamente cerrado.

2 DETERMINAR ÁNGULO POLAR de EQUIL. δ

En el equilibrio $\Sigma \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a}_g = 0 \begin{cases} \dot{\delta} = 0 \\ \ddot{\delta} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\delta = cte}$, $\boxed{V_g = \dot{\delta} r = 0} \longrightarrow tg\,\mu = -\frac{\cancel{V_g}^{\,0}}{V_w \cos\delta} - tg\,\delta$

$\longrightarrow \vec{V} = -\vec{V}_w$

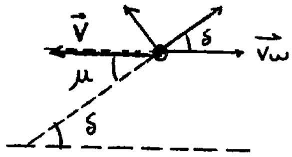
$tg\,\mu = -tg\,\delta$

$\boxed{\mu = \delta}$

$\Sigma \vec{F} = 0$

$$\begin{cases} L \,\text{sen}\,\mu + D\cos\mu - t - W \,\text{sen}\,\delta = 0 \\ L\cos\mu - D\,\text{sen}\,\mu - W\cos\delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\,\text{sen}\,\delta + D\cos\delta - t - W\,\text{sen}\,\delta = 0 \quad (1) \\ L\cos\delta - D\,\text{sen}\,\delta - W\cos\delta = 0 \quad (2) \end{cases}$$



(2) $(L - W)\cos\delta - D\,\text{sen}\,\delta = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\delta_{EQ} = \frac{L - W}{D}}$

Donde $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S \cdot V_w^2}\cdot C_L$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S \cdot V_w^2}\cdot[C_{D_0} + KC_L^2]$

$$\boxed{tg\,\delta_{EQ} = \frac{C_L - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V_w^2}}{C_{D_0} + KC_L^2}}$$

3 VALOR de C_L que MAXIMIZA δ de equilibrio obtenido antes. LÍMITE CUANDO $W/\frac{1}{2}\rho V_w^2 S \to 0$

$\delta_{EQ} = \text{arctg}\left[\qquad\right] = \text{arctg}\,K_0$

$$\frac{\partial \delta_{EQ}}{\partial C_L} = \frac{1}{1 + K_0}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial C_L}(K_0)}_{=0} = 0 \longrightarrow \frac{\partial K_0}{\partial C_L} = 0 = \frac{1\cdot(C_{D_0} + KC_L^2) - (C_L - \square)\cdot 2KC_L}{\boxed{\sim\sim}} = 0$$

$$C_{D_0} + KC_L^2 - 2KC_L^2 + 2KC_L\square = 0$$

$$-KC_L^2 + 2K\underbrace{\frac{W}{\frac{1}{2}\rho S V_w^2}} + C_{D_0} = 0$$

$$C_L = \frac{-2K\square \pm\sqrt{4K^2\square + 4KC_{D_0}}}{-2K} =$$

$$\boxed{C_{L_{opt}} = \square \pm \sqrt{\square + \frac{C_{D_0}}{K}} \qquad \text{donde } \square = \frac{2W}{\rho S V_w^2}}$$

Si $\square \to 0$ $\qquad \boxed{C_{L_{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}}$

C-112

PROBLEMA 6 •

La figura representa un planeador, con polar parabólica y cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se consideran conocidas, unido al suelo por su centro de gravedad mediante el cable AB, de longitud r, sin peso y de resistencia aerodinámica despreciable. El centro de gravedad del planeador describe una trayectoria situada en un plano vertical con un viento de cara uniforme de velocidad V_w.

Suponiendo que el movimiento tiene lugar a C_L constante y conocido, se pide:

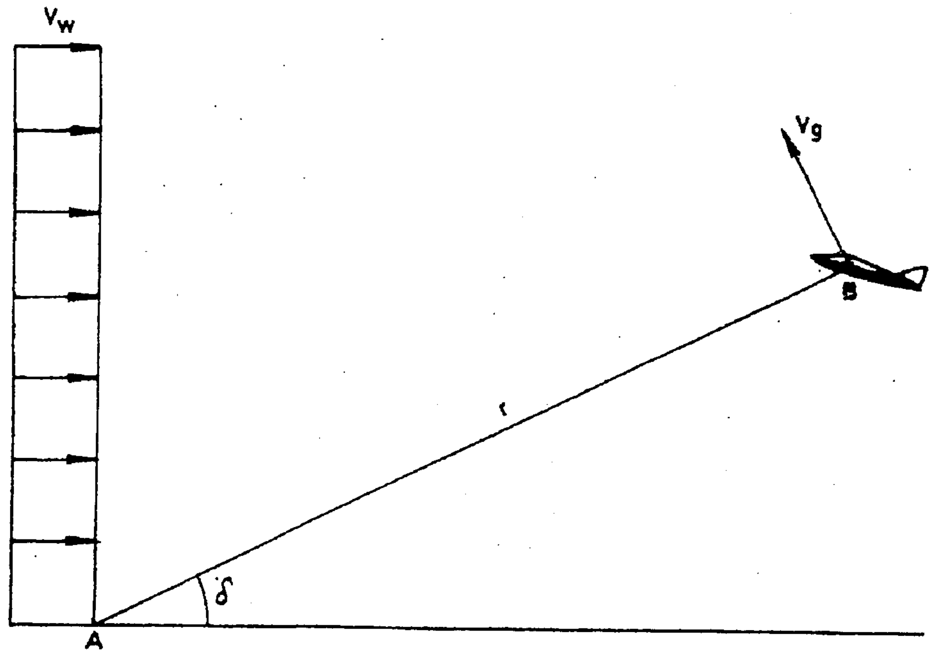
C_D conocido

1°)Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del avión en el sistema de ejes intrínsecos y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2°)Determinar el ángulo polar, δ, de equilibrio.

3°)Determinar el valor de C_L que maximiza el ángulo δ de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} \to 0$$



PROBLEMA 6 (30.10.90)

PROBLEMA 6
CUADERNILLO CURSO 2005/06

La figura representa un planeador, con polar parabólica y cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se consideran conocidas, unido al suelo por su centro de gravedad mediante el cable AB, de longitud r, sin peso y de resistencia aerodinámica despreciable. El centro de gravedad del planeador describe una trayectoria situada en un plano vertical con un viento de cara uniforme de velocidad V_w.

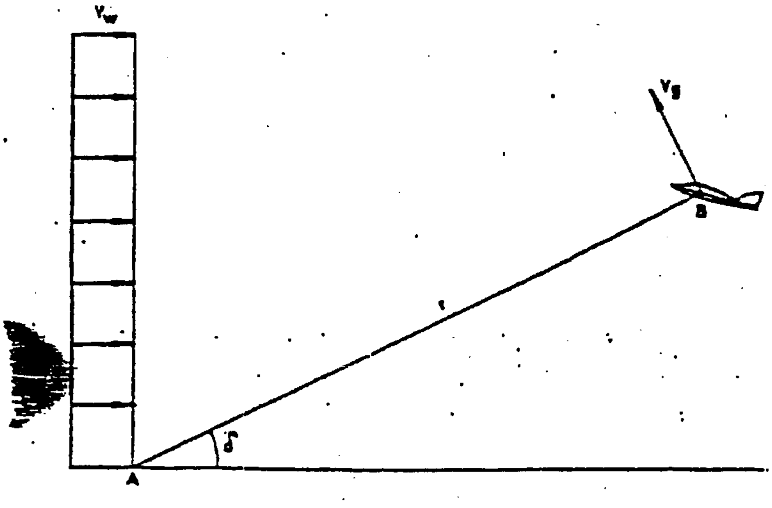
Suponiendo que el movimiento tiene lugar a C_L constante y conocido, se pide:

1) Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del avión en el sistema de ejes intrínsecos y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

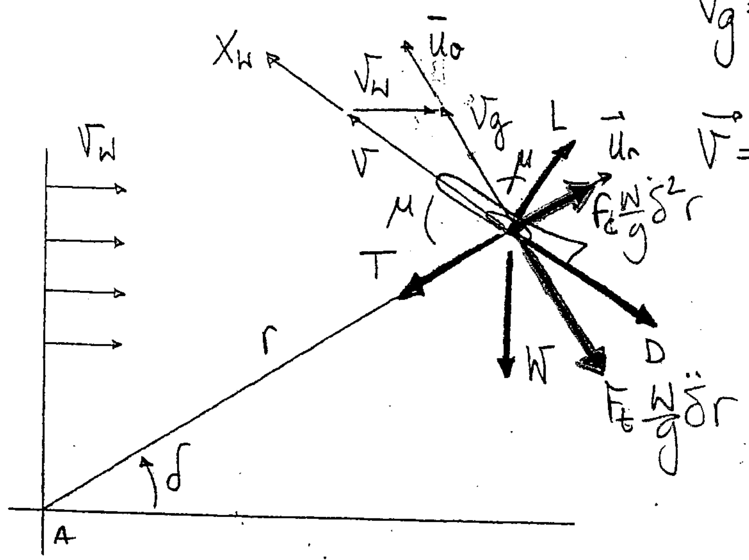
2) Determinar el ángulo polar, δ, de equilibrio.

3) Determinar el valor de C_L que maximiza el ángulo δ de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} \to 0 .$$



PROBLEMA 6 (30-10-90)



$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_W$

↳ velocidad aerodinámica

$\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_W$

$(V_g = \dot{\delta} r)$

$$\vec{L} = L\cos\mu\,\bar{u}_\theta + L\operatorname{sen}\mu\,\bar{u}_r \quad ; \quad L = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

$$\vec{F}_c = \frac{W}{g}\frac{V_g^2}{R}\vec{u}_r = \frac{W}{g}\frac{(\dot{\delta} r)^2}{r}\vec{u}_r = \frac{W}{g}\dot{\delta}^2 r\,\vec{u}_r$$

$$\vec{F}_t = \frac{W}{g}\dot{V}_g(-\bar{u}_\theta) = \frac{W}{g}\ddot{\delta} r(-\bar{u}_\theta)$$

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r$$

$$\vec{D} = D\cos\mu\,\bar{u}_r - D\operatorname{sen}\mu\,\vec{u}_\theta \quad ; \quad D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

$$\vec{W} = -W\operatorname{sen}\delta\,\bar{u}_r - W\cos\delta\,\bar{u}_\theta$$

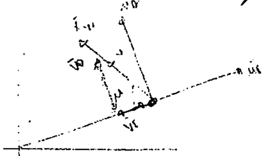
aceleración

$$\vec{u}_r)\quad L\operatorname{sen}\mu + \frac{W}{g}\dot{\delta}^2 r - T + D\cos\mu - W\operatorname{sen}\delta = 0 \qquad (1)$$

μ, δ, T

$$\bar{u}_\theta)\quad L\cos\mu - \frac{W}{g}\ddot{\delta} r - D\operatorname{sen}\mu - W\cos\delta = 0 \qquad (2)$$

Necesitamos conocer μ:



$\bar{V} = V_\theta \bar{u}_\theta + V_r \bar{u}_r$

$$\operatorname{Tg}\mu = \frac{V_\theta}{\underset{<0}{V_r}} = \frac{V_g + V_W\operatorname{sen}\delta}{V_W\cos\delta} = \frac{V_g}{V_W\cos\delta} + \operatorname{Tg}\delta$$

$$\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_W = V_g\,\bar{u}_\theta - V_W(\cos\delta\,\bar{u}_r - \operatorname{sen}\delta\,\bar{u}_\theta) = \underbrace{-V_W\cos\delta}_{V_r}\bar{u}_r + \underbrace{(V_g + V_W\operatorname{sen}\delta)}_{V_\theta}\bar{u}_\theta$$

Variables dependientes: T, δ (puesto que V_y h son funciones de δ y r)
Ecuaciones : 2

$NGL =$ Variables dependientes $-$ Ecuaciones $= 0 \rightarrow NGL = 0$

2) Equilibrio : $\dot{\delta} = \ddot{\delta} = 0 \longrightarrow V_g = 0$

Por tanto : $Tg\,\mu = \cancel{\frac{V_g}{V_w \cos\delta}} + Tg\,\delta \longrightarrow \mu = \delta$

Sustituyendo en (1) : $L\,\text{sen}\,\delta - T + D\cos\delta - W\,\text{sen}\,\delta = 0 \longrightarrow T$
(2) : $L\cos\delta - D\,\text{sen}\,\delta - W\cos\delta = 0 \longrightarrow \delta$

$\frac{(2)}{\cos\delta}$: $L - W - D\,Tg\,\delta = 0 \longrightarrow Tg\,\delta = \frac{L-W}{D} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L - W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D} = \frac{C_L - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}}{C_D}$

$$\boxed{Tg\,\delta = \frac{C_L - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}}{C_D}}$$

donde $|V| = |V_w|$
$C_D = C_{D0} + K C_L^2$

3) Maximizar δ es lo mismo que maximizar $Tg\,\delta$

$$\frac{\partial(Tg\,\delta)}{\partial(C_L)} = 0 \longrightarrow \frac{1\cdot(C_{D0} + KC_L^2) - \left(C_L - \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\right)(2KC_L)}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

$C_{D0} + KC_L^2 - 2KC_L^2 + 2KC_L \frac{2W}{\rho V^2 S} = 0$ Llamando : $A = \frac{2W}{\rho V^2 S}$

$KC_L^2 - 2KAC_L - C_{D0} = 0$

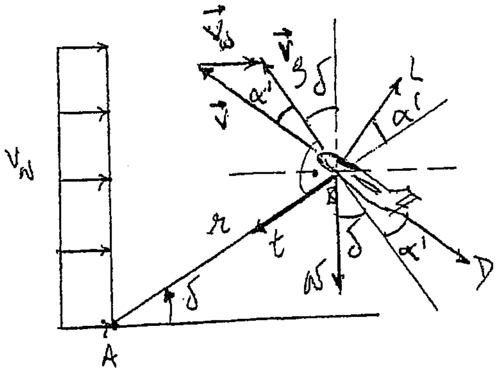
Nos quedamos con $+$ puesto que $C_L > 0$

$$C_L = \frac{2KA \pm \sqrt{4K^2A^2 + 4KC_{D0}}}{2K} = A \pm \sqrt{A^2 + \frac{C_{D0}}{K}} \longrightarrow \boxed{C_L\Big)_{A\to 0} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}}$$

Si $\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} = A \rightarrow 0$

$\boxed{\text{PROBLEMA 6:}}$

Movimiento a C_L = cte



$\boxed{1}$ Ecs y sdl

$\vec V_g = \vec V + \vec V_w$

Ejes intrínsecos ⇒ polares ; $\vec V_g = \dot\delta r \vec u_\delta$ (1)

$V^2 = V_w^2 + V_g^2 - 2V_wV_g\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = V_w^2+V_g^2+2V_wV_g\sin\delta$ (2)

$V_w^2 = V^2+V_g^2-2VV_g\cos\alpha' \Rightarrow \cos\alpha' = \dfrac{V^2+V_g^2-V_w^2}{2VV_g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha' = \frac{\cancel{V_w^2}+V_g^2+2V_wV_g\sin\delta+V_g^2-\cancel{V_w^2}}{2VV_g} = \frac{V_g}{V}+\frac{V_w}{V}\sin\delta \quad (3)$$

$\boxed{\text{NOTA: AC. EN POLARES} \quad \vec a_c = (\ddot\theta r + 2\dot\theta\dot r)\vec u_\theta + (\ddot r - \dot\theta^2 r)\vec u_r}$

$$\begin{cases} \vec u_\theta) & m\ddot\delta r = L\sin\alpha' - D\cos\alpha' - W\cos\delta \quad (4) \\ \vec u_r) & -m\dot\delta^2 r = L\cos\alpha' + D\sin\alpha' - W\sin\delta - t \quad (5) \end{cases}$$

$L = \frac12\rho V^2 S C_L$; $C_L = C_L(\alpha)$ → V = VELOC AERODINÁMICA !!

$D = \frac12\rho V^2 S C_D$; $C_D = C_{D0}+kC_L^2$ — 5 ecs

C_L = cte

10 ecs

Incógnitas: $\delta, L, \alpha', D, t, V, C_L, \alpha, C_D, V_g$ ⇒ 0 sdl

$\boxed{2}$ δ_{eq} ⇒ SITUACIÓN ESTÁTICA.

$\delta_{eq} \Rightarrow \delta = cte \Rightarrow \ddot\delta = \dot\delta = 0$

$\dot\delta = 0 \Rightarrow \vec V_g = \vec 0 \Rightarrow \underset{(\vec V = -\vec V_w)}{V = V_w} \xRightarrow{(3)} \begin{matrix}\cos\alpha' = \sin\delta_{eq} \\ \sin\alpha' = \cos\delta_{eq}\end{matrix}$

$$\begin{cases} (4)^* \; 0 = L\cos\delta_{eq} - D\sin\delta_{eq} - W\cos\delta_{eq} \Rightarrow \cot\delta_{eq} = \dfrac{D}{L-W} = \dfrac{\frac12\rho V^2 S(C_{D0}+kC_L^2)}{\frac12\rho V^2 S C_L - W} \Rightarrow \\ (5)^* \; 0 = \text{—} \end{cases}$$

$V = V_w \; (V_g = 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\delta_{eq} = \frac{C_L - \dfrac{2W}{\rho V_w^2 S}}{C_{D0}+kC_L^2}}$$

$\boxed{3}$ $C_L / \delta_{eq\,max}$; Particularizar si $\frac{2W}{\rho V_w^2 S} \Rightarrow 0$.

$$\frac{d(\operatorname{tg}\delta)}{dC_L} = \underbrace{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\delta}}_{\neq 0} \cdot \frac{d\delta}{dC_L} = 0 \Rightarrow \text{Maximizar } \delta_{eq} = \text{Maximizar } \operatorname{tg}\delta_{eq}$$

$$\frac{d(\operatorname{tg}\delta_{eq})}{dC_L} = \frac{(C_{D0}+kC_L^2)-\left(C_L-\frac{2W}{\rho V_w^2 S}\right)2kC_L}{(C_{D0}+kC_L^2)^2} = 0 \Rightarrow kC_L^2 - \frac{4W}{\rho V_w^2 S}kC_L - C_{D0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_L = \frac{\frac{4W}{\rho V_w^2 S}k \pm \sqrt{\left(\frac{4Wk}{\rho V_w^2 S}\right)^2 + 4C_{D0}}}{2}$$; solución (+) xq tiene más sentido.

$$\boxed{C_L = \frac{2W}{\rho V_w^2 S}k + \sqrt{C_{D0} + \left(\frac{2W}{\rho V_w^2 S}\right)^2 k^2}}$$

$$\frac{2W}{\rho V_w^2 S} \to 0 \Rightarrow C_{L\,\delta_{eq\,max}} = \sqrt{C_{D0}}$$

$$\delta_{eq\,max} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{C_{D0}}(1+k)}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 14.09.07
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 1°

Se considera un planeador en vuelo simétrico, rectilíneo, casi-estacionario, en un plano vertical, con las alas a nivel y con $\gamma_d << 1$. Para este planeador las distancias existentes entre el centro aerodinámico del conjunto ala-fuselaje y el centro aerodinámico de la cola horizontal, l, y entre el centro aerodinámico del conjunto ala-fuselaje y el centro de masas, x_{cg}, son constantes conocidas.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (en concreto, W, S, S_t, c, $C_{m\,acwb}$, $\eta_t = 1$, etc.).
b) La polar del conjunto ala-fuselaje y la polar de la cola horizontal pueden expresarse, respectivamente, mediante $C_{Dwb} = C_{D0\,wb} + k_{wb}\, C_{Lwb}^2$, $C_{Dt} = C_{D0\,t} + k_t\, C_{Lt}^2$ (donde $C_{D0\,wb}$, k_{wb}, $C_{D0\,t}$ y k_t son constantes conocidas).
c) A la resistencia global del avión no contribuye la sustentación de la cola, pero sí su resistencia.
d) La distancia existente entre el centro de masas y el centro aerodinámico de la cola es función de la posición del centro de masas.
e) Para el margen de altitudes considerado, la densidad atmosférica ρ es una constante conocida.

Se pide:

1°) Determinar la polar del avión completo $C_D = C_D(C_L)$ en las condiciones de vuelo mencionadas.

2°) Suponiendo además que el ala sea plana y sus perfiles simétricos, determinar el coeficiente de sustentación que maximiza el tiempo que es capaz el planeador de estar en el aire cuando se suelta desde una altura dada h_0, $(C_L)_{t_{max}}$, así como este tiempo máximo, t_{max}.

3°) Determinar la posición del centro de masas, x_{cg}, que maximiza el tiempo máximo calculado en el apartado anterior.

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h 15^m$

(15)

1) $-D - W\gamma = 0$; $-D + W\gamma_d = 0$ (I)

$-L + W = 0$; $-L + W = 0$ (II)

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt}\cdot\cancel{\eta_t}^{\,1}\cdot\frac{S_t}{S}$$

$$M_A = L_{wb}\cdot x_{cg} + M_{acwb} - L_t\cdot(l - x_{cg}) = 0$$

$$C_{MA} = C_{Lwb}\cdot\hat{x}_{cg} + C_{macwb} - C_{Lt}\cancel{\eta_t}\,\underbrace{\hat{V}_t}_{\frac{S_t\cdot(l-x_{cg})}{S\cdot c}} = 0 = C_{Lwb}\hat{x}_{cg} + C_{macwb} - C_{Lt}\cdot\frac{S_t}{S}\cdot(\hat{l}-\hat{x}_{cg}) = 0$$

$$C_{Lt} = \frac{S}{S_t}\cdot\frac{1}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}}\left[C_{Lwb}\hat{x}_{cg} + C_{macwb}\right] \underset{C_{Lwb}=C_{Lwb}(C_L)}{=} \frac{S}{S_t}\cdot\frac{1}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}}\left[C_L\hat{x}_{cg}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right) + C_{macwb}\cancel{\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)}\right]$$

$$C_L = C_{Lwb} + \frac{C_{Lwb}\hat{x}_{cg}}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}} + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}} = \frac{C_{Lwb}\hat{l}}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}} + \frac{C_{macwb}}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}} \rightsquigarrow C_{Lwb} = \frac{C_L(\hat{l}-\hat{x}_{cg})}{\hat{l}} - \frac{C_{macwb}}{\hat{l}}$$

$$C_{Lwb} = C_L\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right) - \frac{C_{macwb}}{\hat{l}}$$

$$C_D = C_{Dwb} + C_{Dt}\frac{S_t}{S}$$

$$C_{Dwb} = C_{D0wb} + K_{wb}\cdot\left[C_L\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right) - \frac{C_{macwb}}{\hat{l}}\right]^2$$

$$C_{Dt} = C_{D0t} + K_t\cdot\left\{\frac{S}{S_t}\cdot\frac{1}{\hat{l}-\hat{x}_{cg}}\left[C_L\hat{x}_{cg}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right) + C_{macwb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)\right]\right\}^2$$

$$C_D = A + BC_L + CC_L^2$$

$$A = C_{D0wb} + K_{wb}\frac{C_{macwb}^2}{\hat{l}^2} + C_{D0t}\cdot\frac{S_t}{S} + K_t\frac{S}{S_t}\cdot\frac{C_{macwb}^2}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\cdot\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2$$

$$B = -2K_{wb}\frac{C_{macwb}}{\hat{l}}\cdot\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)\cancel{C_L} + 2K_t\cancel{\frac{S}{S_t}}\cdot\cancel{\frac{S_t}{S}}\cdot\frac{C_{macwb}}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2\hat{x}_{cg}\cdot\frac{S}{S_t}$$

$$C = K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 + K_t\cdot\frac{S}{S_t}\cdot\frac{\hat{x}_{cg}^2}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\cdot\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 = K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 + K_t\frac{S}{S_t}\cdot\frac{\hat{x}_{cg}^2}{\hat{l}^2}$$

2) $C_{macwb} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A = C_{D0wb} + C_{D0t}\cdot\frac{S_t}{S} \\ B = 0 \\ C = K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 + K_t\cdot\frac{S}{S_t}\frac{\hat{x}_{cg}^2}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\cdot\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 = K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{l}}\right)^2 + K_t\frac{S}{S_t}\cdot\frac{\hat{x}_{cg}^2}{\hat{l}^2}\end{cases}$$

8º Diferencia de facturación de la energía si se corrigiese el factor de potencia.

Facturación con los datos de partida del enunciado:

penalización → Tarifa 3 periodos → Cantidad de potencia

MES	Er.TER	Ea.TPE	Pcon.TPA	Er.TER + Ea.TPE+ Pcon.TPA	TOTAL (con 18% IVA) €
Enero	10556,8491	19253,1731	706,306	30516,3282	36009,2673
Febrero	9949,79328	16396,2506	706,306	27052,3499	31921,7729
Marzo	6248,64173	14801,9767	706,306	21756,9244	25673,1708
Abril	6047,07264	13429,305	706,306	20182,6836	23815,5667
Mayo	6337,27494	12876,1253	706,306	19919,7062	23505,2533
Junio	5996,5272	13801,9275	706,306	20504,7607	24195,6176
Julio	3621,29997	9938,6868	706,306	14266,2928	16834,2255
Agosto	4073,96246	11926,4242	706,306	16706,6926	19713,8973
Septiembre	4567,46976	12999,4272	706,306	18273,203	21562,3795
Octubre	2768,70573	13717,3183	706,306	17192,3301	20286,9495
Noviembre	10035,5673	17761,824	706,306	28503,6973	33634,3628
Diciembre	6152,09483	16510,7228	706,306	23369,1236	27575,5658

TOTAL = 304728,029 €

$$(\mathrm{I}) \rightsquigarrow \gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{A}{C_L} + C\, C_L$$

$$t_{MAX} \Rightarrow \gamma_{d\,min}$$

$$\frac{d\gamma_d}{dC_L} = -\frac{A}{C_L^2} + C = 0 \Rightarrow C\,C_L^2 = A \rightsquigarrow C_{L_{tMAX}} = \sqrt{\frac{A}{C}}$$

$$\boxed{C_{L_{tMAX}} = \sqrt{\frac{C_{D_{0wb}} + C_{D_{0t}} \frac{S_t}{S}}{K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{\ell}}\right)^2 + K_t \frac{S_t}{S} \cdot \frac{\hat{x}_{cg}^2}{\hat{\ell}^2}}}}$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin\gamma = -V \sin\gamma_d = -V\gamma_d$$

$$\int_0^{h_0} dh = \int_0^{t} -V\cdot\gamma_d \Rightarrow t = \frac{h_0}{V\gamma_d} \rightsquigarrow \boxed{t_{MAX} = \frac{h_0}{V\cdot\frac{C_D}{C_{L_{tMAX}}}} = \frac{h_0}{V\cdot\frac{A + C\,C_{L_{tMAX}}^2}{\sqrt{\frac{A}{C}}}} = \frac{h_0}{V}\left[\frac{1}{\frac{A}{C_{L_{tMAX}}} + C\,C_{L_{tMAX}}}\right]}$$

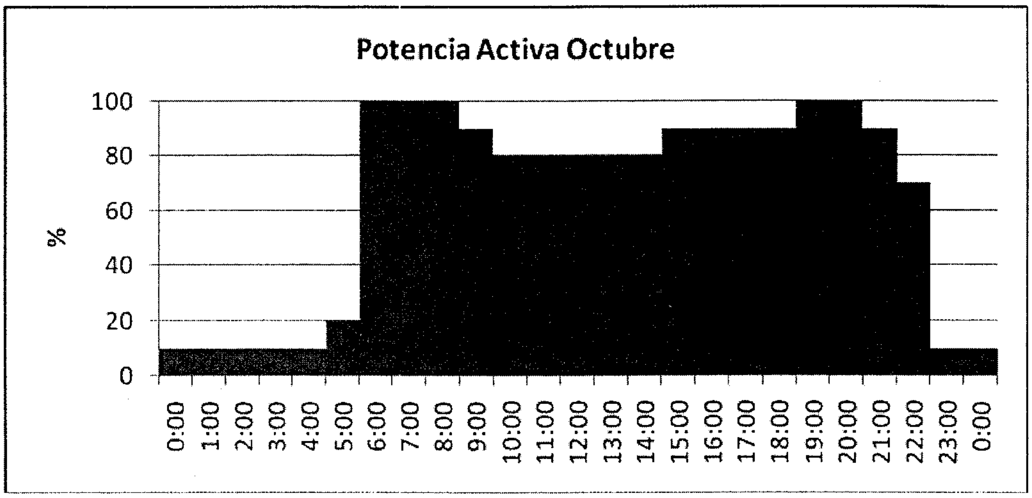
$$3)\quad t_{MAX}\Big|_{MAX} \Rightarrow \hat{x}_{cg\,MIN} \Rightarrow \frac{dt_{MAX}}{d\hat{x}_{cg}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\hat{x}_{cg}}\left[\frac{h_0}{2V} \cdot \frac{1}{f(\hat{x}_{cg})}\right]$$

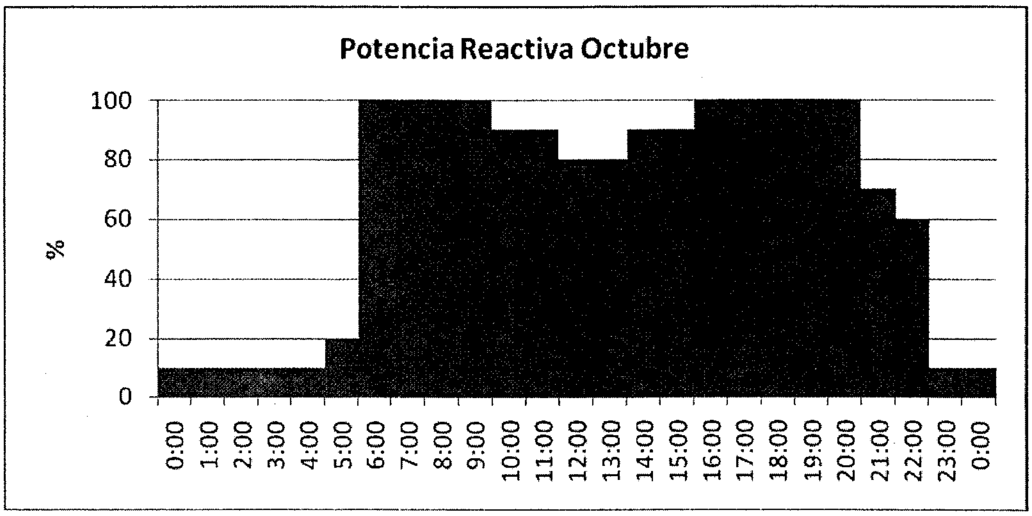
$$\frac{d}{d\hat{x}_{cg}}\left[\left(C_{D_{0wb}} + C_{D_{0t}}\cdot\frac{S_t}{S}\right)\left(K_{wb}\left(1-\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{\ell}}\right)^2 + K_t \frac{S_t}{S}\frac{\hat{x}_{cg}^2}{\hat{\ell}^2}\right)\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\left(C_{D_{0wb}} + C_{D_{0t}}\frac{S_t}{S}\right)\cdot\left(-2\frac{K_{wb}}{\hat{\ell}} + 2K_{wb}^2\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{\ell}^2} + 2K_t\frac{S_t}{S}\frac{\hat{x}_{cg}}{\hat{\ell}}\right.\right.$$

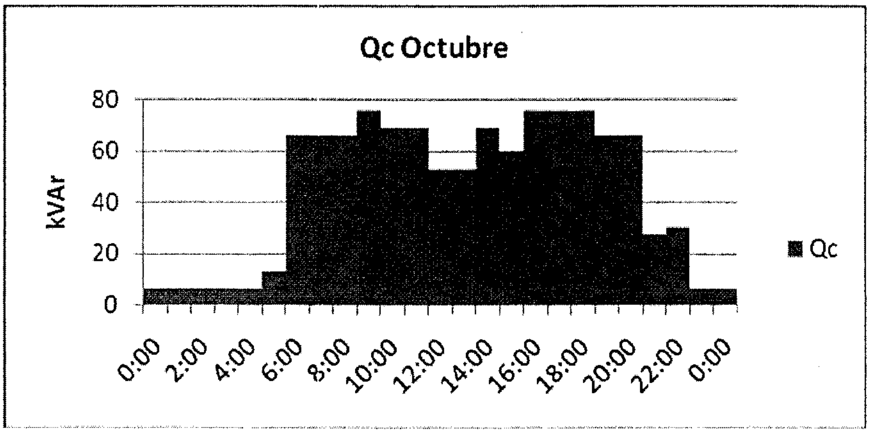
$$-\cancel{2}\frac{K_{wb}}{\cancel{\hat{\ell}}} + \hat{x}_{cg}\left[\cancel{2}K_{wb}^2\frac{1}{\hat{\ell}^{\cancel{2}}} + \cancel{2}K_t\cdot\frac{S_t}{S}\cdot\frac{1}{\hat{\ell}^{\cancel{2}}}\right] = 0 \rightsquigarrow \boxed{\hat{x}_{cg} = \frac{K_{wb}\cdot\hat{\ell}}{K_{wb}^2 + K_t\frac{S_t}{S}}}$$

Octubre

Pmed (kW)	146,77		
Pmax (kW)	220	Qmax kVAr	160
FU (%)	66,713636	Qcmax kVAr	75,652353
FD (%)	38,623684	Qcmin kVAr	6,6280392







(15) $\boxed{\text{NO!!!}}$

1) $C_D = C_{Dwb} + C_{Dt} = C_{D0wb} + k_{wb} C_{Lwb}^2 + C_{D0t} + k_t C_{Lt}^2$

0 (C_{Lt} no contribuye a C_L)

$$C_L = C_{Lwb} + \cancel{C_{Lt}\cdot \eta_t \frac{S_t}{S}}\cos\varepsilon - C_{Dt}\,\cancel{\eta_t}^{\,1}\cdot\frac{S_t}{S}\cdot\cancel{\sin}\,\varepsilon$$

0 (C_{Lt} no contribuye a C_L)

$$C_L = C_{Lwb} - \left(C_{D0t} + \cancel{k_t C_{Lt}^2}\right)\frac{S_t}{S}\varepsilon$$

$$C_L = C_{Lwb} - C_{D0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon \rightarrow C_{Lwb} = C_L + C_{D0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon$$

0 (perfil simétrico)

$$M_A = L_{wb}\,x_{cg} + M_{acwb} - L_t\,(l - x_g) + \cancel{M_{act}} = 0$$

$$C_{MA} = C_{Lwb}\,\hat{x}_{cg} + C_{macwb} - C_{Lt}\,\underbrace{\hat{V}_t}_{\frac{S_t(l-x_g)}{S\cdot c}}\,\cancel{\eta_t}^{\,1} = C_{Lwb}\,\hat{x}_{cg} + C_{macwb} - C_{Lt}\cdot\frac{S_t}{S}(\hat{l} - \hat{x}_g) = 0$$

$$C_{Lt} = \frac{C_{Lwb}\,\hat{x}_{cg} + C_{macwb}}{\frac{S_t}{S}\cdot(\hat{l} - \hat{x}_g)} = \frac{S}{S_t(\hat{l} - \hat{x}_g)}\left[\left(C_L + C_{D0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\right)\hat{x}_{cg} + C_{macwb}\right]$$

$$\boxed{C_D = C_{D0wb} + k_{wb}\left[C_L + C_{D0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\right]^2 + C_{D0t} + k_t\cdot\left\{\frac{S}{S_t(\hat{l} - \hat{x}_g)}\cdot\left[\left(C_L + C_{D0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\right)\hat{x}_{cg} + C_{macwb}\right]\right\}^2}$$

2) $-D - W\sin\gamma = 0$; $-D + W\cancel{\sin}\gamma_d = 0$; $D = W\cdot\gamma_d \rightarrow \gamma_d = \frac{D}{W} = \frac{\cancel{\rho S} V^2 C_D}{\cancel{2W}}$, $V^2 \rightarrow \frac{2W}{\rho S C_L}$

$-L + W\cos\gamma = 0$; $L = W\cancel{\cos\gamma_d}^{\,1}$; $L = W \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$; $V^2 = \frac{2W}{\rho S C_L}$

$\frac{dh}{dt} = V\sin\gamma$; $\frac{dh}{dt} = -V\cancel{\sin}\gamma_d = -V\gamma_d \rightarrow \frac{dh}{dt} = -V\gamma_d$

$\underline{C_D = A + C C_L + B C_L^2}$

$$\int_{h_0}^{0} dh = \int_0^t -V\cdot\gamma_d\,dt\ ;\ 0 - h_0 = -V\cdot\gamma_d\,t\ ;\ h_0 = V\gamma_d\cdot t \rightarrow t = \frac{h_0}{V\cdot\gamma_d}$$

$$t = \frac{h_0}{\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}\cdot\gamma_d} = \frac{h_0}{\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}\cdot\frac{C_D(C_L)}{C_L}}\ ;\ \begin{cases}\frac{C_D(C_L)}{C_L} = \frac{A}{C_L} + BC_L + C\\[4pt] \frac{dC_D(C_L)}{dC_L} = \frac{-A}{C_L^2} + B\end{cases}$$

$$\frac{dt}{dC_L} = \frac{-h_0\cdot\left[\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^{1/2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot C_L^{-3/2}\cdot\frac{C_D(C_L)}{C_L} + \left(\frac{2W}{\rho S}\right)^{1/2}\cdot C_L^{-1/2}\cdot\left(-\frac{A}{C_L^2} + B\right)\right]}{\frac{2W}{\rho S C_L}\cdot\frac{C_D^2(C_L)}{C_L^2}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^{1/2}}\cdot \cancelto{\xi^{-1}}{\xi^{-3/2}}\cdot\left[\frac{A}{\xi}+B\xi+C\right] = \cancel{\left(\frac{2W}{\rho S}\right)^{1/2}}\cdot \cancel{\xi^{-1/2}}\cdot\left[\frac{-A}{\xi^2}+B\right] ;$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{A}{\xi^2}+B+\frac{C}{\xi}\right] = \frac{-A}{\xi^2}+B \; ; \quad \frac{A}{\xi^2}+B+\frac{C}{\xi} = \frac{-2A}{\xi^2}+2B \; ;$$

$$\frac{3A}{\xi^2}+\frac{C}{\xi}-B=0 \; ; \; -B\xi^2+C\xi+3A=0 \; ; \; B\xi^2-C\xi-3A=0$$

$$\xi^2-\frac{C}{B}\xi-3\frac{A}{B}=0 \rightsquigarrow \boxed{\xi_{t_{MAX}} = \frac{\frac{C}{B}+\sqrt{\frac{C^2}{B^2}+12\frac{A}{B}}}{2}}$$

$$\boxed{t_{MAX} = \frac{h_0}{\sqrt{\frac{2W}{\rho S \xi_{t_{MAX}}}}\cdot\left(\frac{A}{\xi_{t_{MAX}}}+B\xi_{t_{MAX}}+C\right)}}$$

$$A = C_{D0wb} + K_{wb}\left(C_{L0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\right)^2 + C_{D0t} + \left(\frac{S}{S_t}\right)^2\frac{K_t}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\left[\left(C_{L0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\hat{x}_{cg}\right)^2 + 2C_{L0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\hat{x}_{cg}C_{macwb} + C_{macwb}^2\right]$$

$$B = K_{wb} + \left(\frac{S}{S_t}\right)^2\cdot\frac{K_t}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\hat{x}_{cg}^2$$

$$C = 2K_{wb}C_{L0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon + \left(\frac{S}{S_t}\right)^2\cdot\frac{K_t}{(\hat{l}-\hat{x}_{cg})^2}\left[2C_{L0t}\frac{S_t}{S}\varepsilon\hat{x}_{cg} + 2C_{macwb}\hat{x}_{cg}\right]$$

3) $\dfrac{dt_{MAX}}{d\hat{x}_{cg}} = 0$

$$\left.\begin{aligned} A &= D+E\hat{x}_{cg}+F\hat{x}_{cg}^2 \\ B &= G+H\hat{x}_{cg}^2 \\ C &= I+J\hat{x}_{cg}\end{aligned}\right| \longrightarrow \xi_{t_{MAX}} = \frac{I+J\hat{x}_{cg}}{2(G+H\hat{x}_{cg}^2)} + \sqrt{\frac{(I+J\hat{x}_{cg})^2}{4(G+H\hat{x}_{cg}^2)^2}+3\cdot\frac{(D+E\hat{x}_{cg}+F\hat{x}_{cg}^2)}{(G+H\hat{x}_{cg}^2)}}$$