Matemática Discreta: Teoría de Grafos

Grado de Ingeniería

Asignatura de Matemática Discreta

UDIMA

Contenidos

1. Nociones generales
   - Notación y definiciones básicas
   - Grafos dirigidos
   - Árboles. Árbol generador de peso mínimo (algoritmos de Kruskal y Prim)
2. Grafos planos, eulerianos y hamiltonianos
   - Grafos planos. La fórmula de Euler. El teorema de Kuratowsky
   - Grafos eulerianos (algoritmo de Fleury)
   - Grafos hamiltonianos
   - Emparejamientos en grafos
3. Coloraciones y Caminos mínimos
   - Coloraciones en grafos (algoritmo voraz)
   - Caminos de longitud mínima (algoritmo de Dijkstra)

Aplicaciones prácticas:

- Algoritmos en informática.
- Estructura de datos.
- Diseño de circuitos, redes de transporte, redes informáticas, etc.
- Encontrar una ruta que nos conduzca a los sitios más interesantes de París sin repetir calles.
- Encontrar el vuelo Madrid–Tokio más barato o el más rápido o el que tenga menos transbordos.
- Diseñar un circuito con el menor número de puntos “débiles”.
- Diseñar una red que maximice la salida de información.

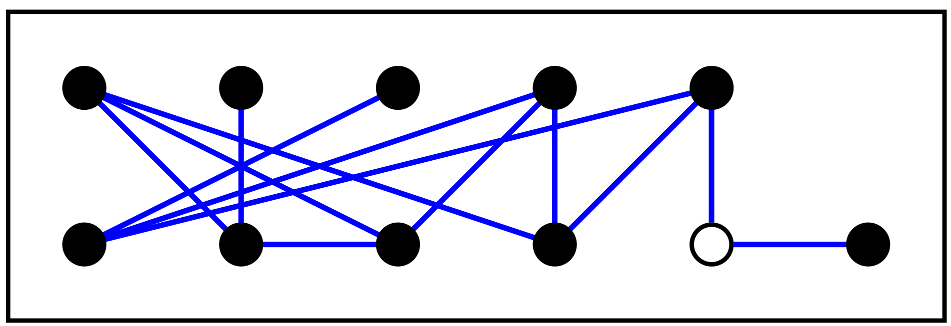
Motivación

Problema 1
El primer día de curso se encuentran en una clase 121 alumnos. Demostrar que siempre existe una persona que conoce a un número par de personas.

¿Cómo describir eficientemente el problema?

`Planteamiento:`

1. Los alumnos son puntos ●.
2. El *conocimiento* es mutuo y cero es par.
3. Si dos alumnos se conocen trazo una línea entre los correspondientes puntos:



El problema es equivalente a probar que en un grafo con $2n+1$ puntos, existe al menos un punto con un número par de *líneas* que salen de él.

Grafos no orientados: definición v1

Definición 1

Un **grafo simple** $G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V *y un conjunto de* **aristas** E, *que es un conjunto de pares de elementos distintos de* V.

Si la arista e une los vértices (también llamados nodos o puntos) $u, v \in V$, diremos que u y v son **adyacentes o vecinos** y que la arista e es **incidente** con u y v.

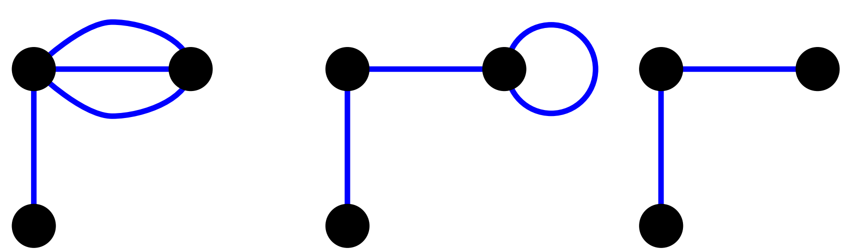
Definición 2

Un **multigrafo** $G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V, *un conjunto de* **aristas** E *en el que se permite que haya* **aristas múltiples** *(que son aquellas que conectan el mismo par de vértices).*

Definición 3

Un **lazo o bucle** *("loop") es una arista que une un vértice consigo mismo. Un* **pseudografo** $G = (V, E)$ *es un grafo en el que se permiten aristas múltiples y bucles.*

Ejemplos:



Grafos no orientados: definición v2

Definición 4
Un **pseudografo** $G = (V, E, \gamma)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V*, un conjunto de* **aristas** E*, y una función* γ *que asigna a cada arista un par no ordenado de vértices de* V *(*γ *codifica las conexiones entre los vértices).*

Si la arista e une los vértices $u, v \in V$, (es decir, si $\gamma(e) = \{u, v\}$) diremos que u y v son adyacentes o vecinos y que la arista e es incidente con u y v.
Si existen dos aristas distintas e_1, e_2 tales que $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$ diremos que el pseudografo tiene aristas múltiples.

Definición 5
Un **grafo simple** $G = (V, E, \gamma)$ *es un pseudografo en el que no se permite que haya aristas múltiples ni bucles.*
Un **multigrafo** $G = (V, E, \gamma)$ *es un pseudografo en el que se permite que haya aristas múltiples pero no bucles.*

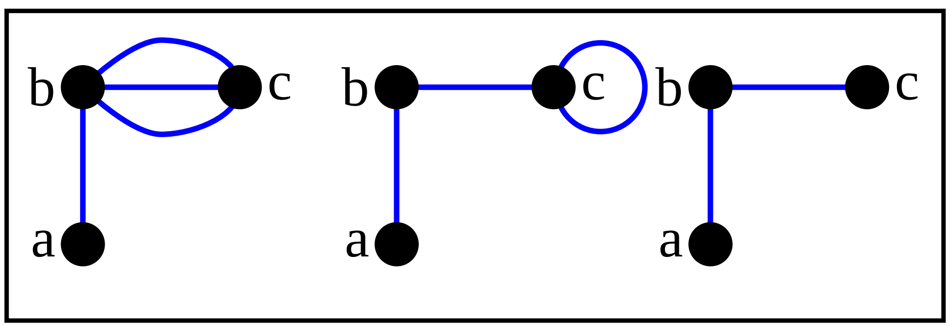
Definiciones

Definición 6
El número de aristas incidentes con un vértice v de un grafo G se denomina **grado** *o* **valencia** *de v y se denota por $d(v)$.*

Nota: Los lazos contribuyen con dos unidades al grado del vértice correspondiente.

Definición 7
Los vértices de grado 1 se denominan **terminales***. Los vértices de grado 0 se denominan* **aislados***. Un grafo sin aristas se denomina* **trivial***.*

Ejemplos:



(1)	d(a) = 1	d(b) = 4	d(c) = 3
(2)	d(a) = 1	d(b) = 2	d(c) = 3
(3)	d(a) = 1	d(b) = 2	d(c) = 1

Algunos teoremas sencillos

Teorema 8 *La suma de los grados de los vértices de un grafo $G = (V, E)$ es dos veces el número de aristas. Es decir:*

$$\sum_{i \in V} d(i) \;=\; 2|E|\,.$$

Nota: Esto es cierto para pseudografos y multigrafos.

Corolario 9 *En todo grafo G la suma de los grados de sus vértices es par.*

Teorema 10 *El número de vértices de grado impar en un grafo G es par.*

DEMOSTRACIÓN: Si V_{par} y V_{impar} son los subconjuntos de vértices con grado par e impar respectivamente, entonces el teorema anterior implica que

$$2|E| \;=\; \sum_{i \in V} d(i) \;=\; \sum_{i \in V_{\text{par}}} d(i) + \sum_{i \in V_{\text{impar}}} d(i)\,.$$

Claramente $\sum_{i \in V_{\text{par}}} d(i)$ es par, luego $\sum_{i \in V_{\text{impar}}} d(i)$ debe ser par. Por lo tanto, el número de vértices de grado impar debe ser par. $\square$

Algunos teoremas sencillos

Corolario 11 *En todo grafo G con número impar de vértices hay un número impar de vértices de grado par.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior implica que el número de vértices de grado impar siempre es par. Si el número total de vértices es también impar, entonces el número de vértices de grado par debe ser impar. $\square$

Nota: Para este tipo de grafos habrá, por tanto, al menos un vértice de grado par. Podemos aplicar precisamente esto al problema número uno que se había planteado.

Definición 12
Un grafo es **regular** *si todos sus vértices tienen el mismo grado.*

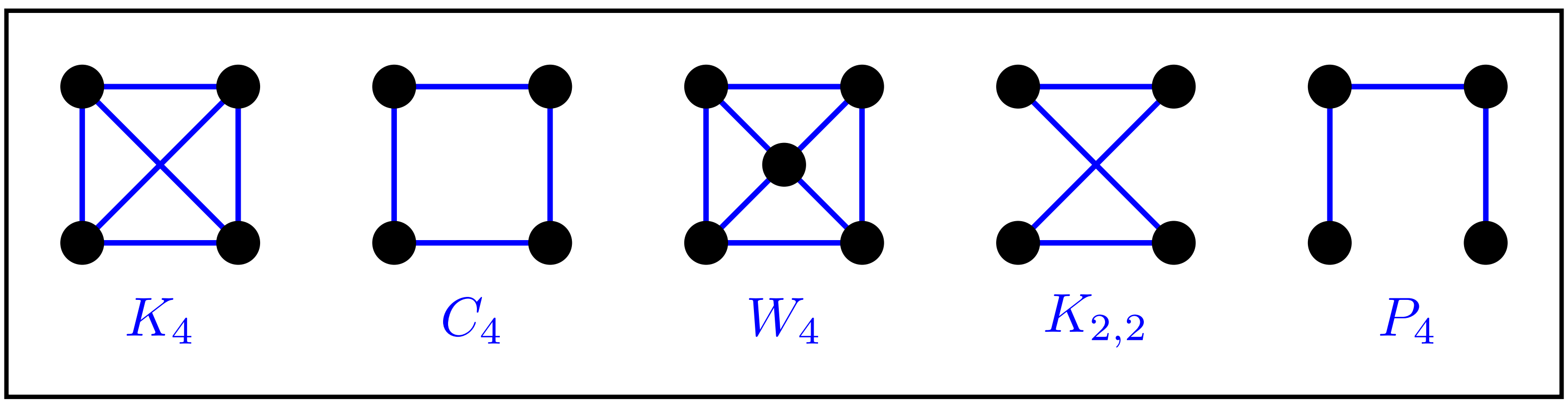
Algunos grafos sencillos

- Grafo completo de n vértices K_n.
- Camino P_n y ciclo C_n de n vértices.
- Rueda de $n+1$ vértices W_n.

Definición 13

Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** *si V se puede dividir en dos conjuntos no vacíos y disjuntos V_1 y V_2, de manera que cada arista $e \in E$ conecta un vértice de V_1 con otro de V_2 y viceversa.*

- Grafo bipartito completo de n y m vértices $K_{n,m}$ si se une cada n con cada m.

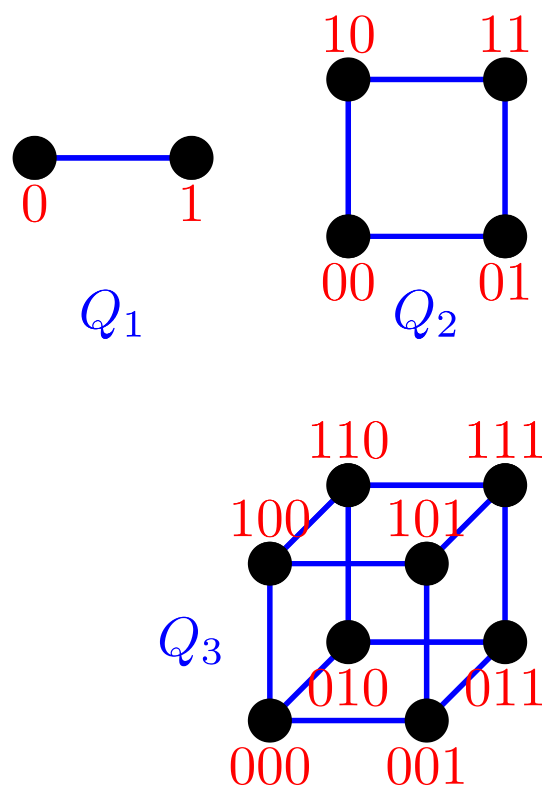


De izquierda a derecha: completo, ciclo, rueda, completo bipartito y camino.

Algunos grafos sencillos

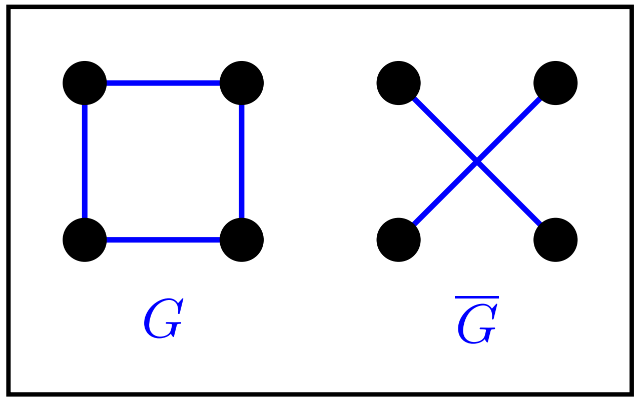
Definición 14

El grafo $\boldsymbol{Q_n}$ (o cúbico) es aquel formado por vértices que representan las cadenas de bits de longitud n. Dos vértices son adyacentes si y sólo si difieren en exactamente un bit.



Grafos complementarios

Definición 15
El **grafo complementario** $\overline{G} = (V, \overline{E})$ *de un grafo* *simple* $G = (V, E)$ *es aquel formado por el mismo conjunto de vértices y tal que dos vértices son adyacentes en* $\overline{G}$ *si y sólo si no son adyacentes en* G.



Problema 2
Demostrar que $|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2}$.

Solución: $|E| + |\overline{E}|$ son todas las aristas posibles entre cada pareja de vértices. Es decir, las tomamos de dos en dos así que $|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2}$

Problema 3

Demostrar que si un grafo simple es autocomplementario $G = \overline{G}$, entonces su número de vértices es o múltiplo de cuatro ó múltiplo de cuatro más uno.

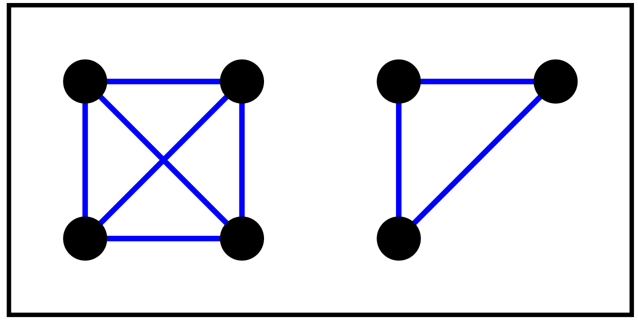
Solución: si es autocomplementario entonces $|E| = |\overline{E}|$. Así que si $|V| = n$ y tenemos en cuenta que

$$|E| + |\overline{E}| \; = \; \binom{|V|}{2},$$

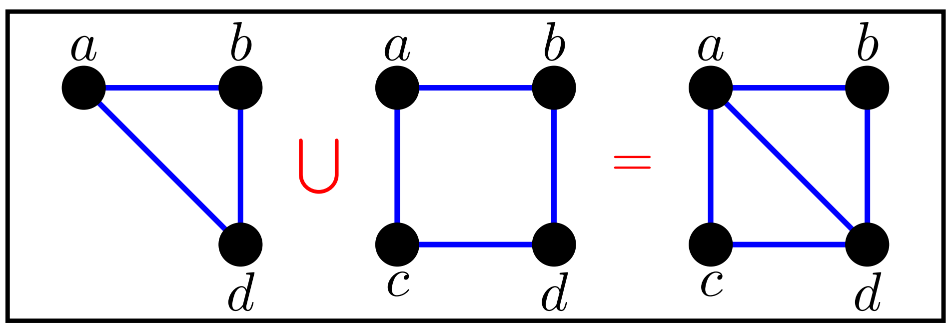
entonces
$2|E| \; = \; \frac{1}{2}n(n+1)$ y $4|E| \; = \; n(n+1)$ que es múltiplo de 4 al ser cuatro veces algo. Si n es múltiplo de 4 se cumple la igualdad, si $(n+1)$ es múltiplo de $4+1$ también.

Subgrafos

Definición 16
Un grafo $H = (W, F)$ es un **subgrafo** *de $G = (V, E)$ si $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.*



Definición 17
La **unión** *de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.*



Problema 4

Sea K_n el grafo completo de n vértices.

- *Dibujar K_1, K_2, K_3, K_4 y K_5.*
- *¿Cuál es el grado de los vértices de K_n? Solución: $n + 1$*
- *¿Cuántas aristas tiene K_n? Solución: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$*

Problema 5

Encontrar los grafos complementarios de $K_{3,3}$, C_3, C_4 y C_5.

Solución:
Dos ciclos de 3 vértices.
Un trivial de 3 vértices.
Dos grafos de una arista y dos vértices.
Él mismo (C_5).

Ejemplos

Problema 6

Demostrar que en todo grafo simple sin vértices aislados hay al menos dos vértices del mismo grado.

Solución: Por ser no trivial $d(i) \geq 1$, pues no tiene vértices aislados. Por ser grafo simple se puede conectar con todos excepto con él mismo así que $d(i) \leq |V| - 1$. El problema es equivalente a $|V| - 1$ cajas y $|V|$ bolas. El principio del palomar garantiza que al menos en una caja hay 2 bolas, luego al menos 2 vértices tienen el mismos grado.

Problema 7

Hallar el mínimo número de vértices de un grafo con 7 aristas si $d(i) \leq 3$ para todo $i \in V$.

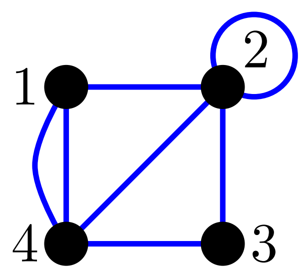
Solución: Tenemos que $|E| = 7$ y $d(i) \leq 3$ para todo vértice. Debe cumplirse que

$$\sum_i d(i) = 2|E| = 14,$$

que expandido podemos escribir a lo más como $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$

Representación numérica de un grafo

Definición 18
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos una ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ de los vértices de G. La **matriz de adyacencia** *de G asociada a dicha ordenación es la matriz $|V| \times |V|$ cuyas entradas A_{ij} cuentan el número de aristas que unen v_i con v_j.*



$$A_G = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

- A_G es simétrica.
- Si G es simple, $A_{ii} = 0$ y $A_{ij} \in \{0, 1\}$.
- Si G es un multigrafo, $A_{ii} = 0$.

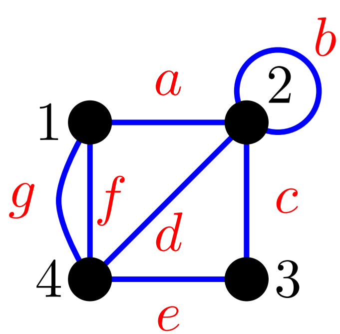
¡Cuidado!, una distinta ordenación nos da una matriz distinta.

Representación numérica de un grafo

Definición 19

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Consideremos una ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ de los vértices de G y una ordenación $e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}$ de las aristas de G. La **matriz de incidencia** *de G <u>asociada a dichas ordenaciones</u> es la matriz $|V| \times |E|$ con entradas*

$$I_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } e_j \text{ no es incidente con } v_i \\ 1 & \text{si } e_j \text{ es incidente con } v_i \end{cases}$$



$$I_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Importante: No confundir un grafo con su representación gráfica.

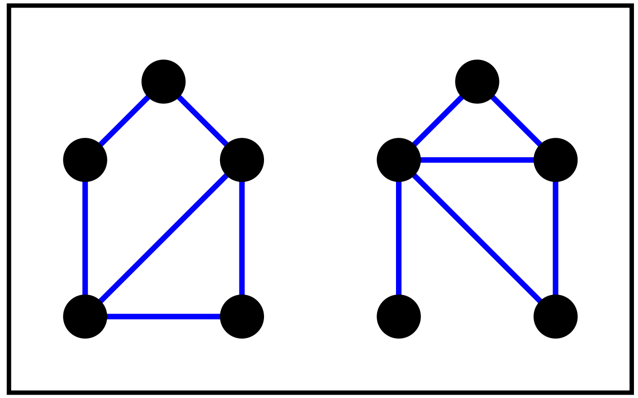
Definición 20

Dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** *si y sólo si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ con la siguiente propiedad: a y b son adyacentes en G_1 si y sólo si $f(a)$ y $f(b)$ son adyacentes en G_2. Dicha función f se denomina* **isomorfismo**.

- Una condición necesaria (pero no suficiente) para que dos grafos sean isomorfos es que $|V_1| = |V_2|$ y $|E_1| = |E_2|$.
- Existen $n!$ funciones biyectivas entre dos grafos de n vértices.
- Dos grafos son isomorfos si existen ordenaciones de sus vértices tales que sus matrices de adyacencia sean iguales.

Problema 8

Decir si son isomorfos los siguientes grafos:



Solución: No lo son, pues el segundo tiene un vértice de grado 4, cosa que el primero no tiene.

Problema 9

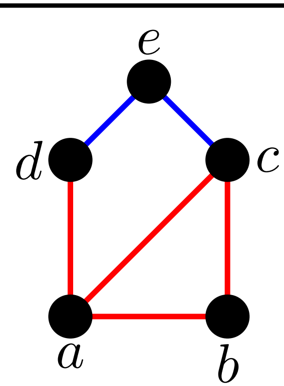
Dibujar, salvo isomorfismos, todos los grafos simples de cinco vértices y cinco aristas.

Caminos en un grafo

Definición 21
Un **camino (o cadena)** *en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia alternada de vértices y aristas de la forma $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, \{v_{\ell-1}, v_\ell\}, v_\ell$. La* **longitud** *del camino es igual al número de aristas ℓ que lo componen. Existe una dirección implícita en todo camino: v_0 es el* **vértice inicial** *y v_ℓ, el* **vértice final***.*

Notas:

- En un grafo simple, un camino se puede representar por los vértices que lo componen: $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_\ell$.
- En un camino se pueden repetir aristas/vértices.



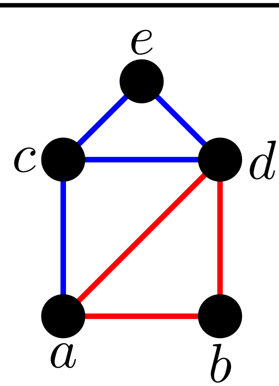
Camino $= (d, a, b, c, a, b)$

Caminos en un grafo

Definición 22
Un camino en el que todas las aristas son distintas se denomina **camino simple**. *Un* **circuito** *es un camino simple cerrado ($v_0 = v_\ell$). (se pueden repetir vértices)*

Un camino simple en el que todos los vértices $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ son distintos (excepto quizás los extremos v_0 y v_ℓ) se denomina **camino elemental**. *Un camino elemental cerrado es un* **ciclo**.

Nota: En un camino simple se pueden repetir vértices.



Circuito $= (c, d, a, b, d, e, c)$

Camino elemental $= (a, c, e, d)$

Ciclo $= (a, b, d, a)$

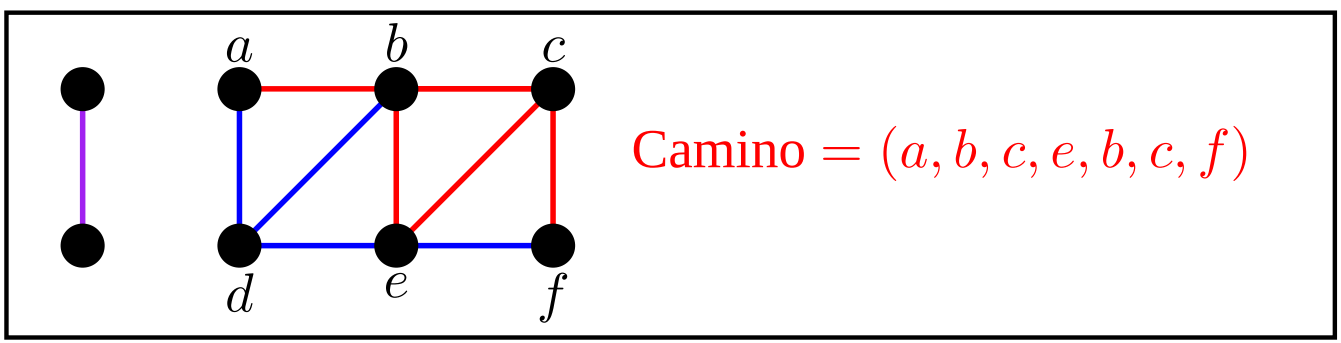
Ejemplo: $\{f, e, c, b, g, g\}$ es circuito pero no ciclo.

Definición 23

Un grafo es **conexo** *si cada par de vértices $v, w \in V$ pueden ser conectados por un camino elemental. Un grafo no conexo está formado por la unión de varios subgrafos conexos y desconectados entre sí que se denominan* **componentes conexas** *del grafo.*

Nota: Si dos vértices de un grafo se pueden conectar por un camino, entonces existe un camino elemental que los une.

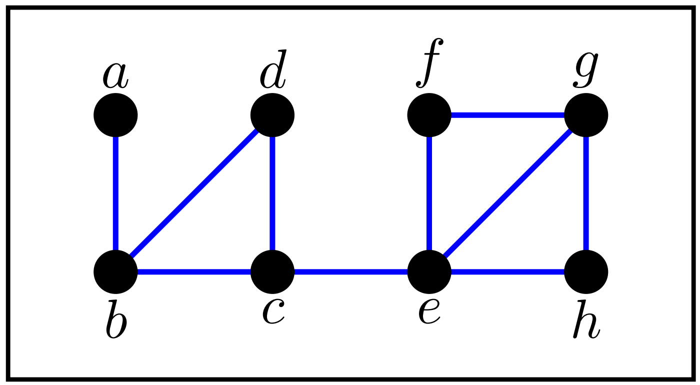
DEMOSTRACIÓN: De todos los caminos que unen dichos extremos a y b tomamos uno de menor longitud $a = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_{\ell-1} \to v_\ell = b$. Éste debe ser un camino elemental. Si no lo fuese, debería tener al menos dos vértices iguales $v_i = v_j$ con $0 \leq i < j \leq \ell$. El camino $a = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{j+1} \to \ldots v_{\ell-1} \to v_\ell = b$ también conecta a con b y tiene menor longitud que el primitivo, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, dicho camino de longitud mínima es elemental. $\square$



Definición 24

Un **punto de articulación o de corte** *de un grafo G es un vértice tal que si lo eliminamos (junto con todas las aristas que le son incidentes) obtenemos un subgrafo con más componentes conexas que G. Un* **puente** *de un grafo G es una arista tal que si la eliminamos (pero no los vértices con los que es incidente) obtenemos un grafo con más componentes conexas que G.*

Ejemplo:



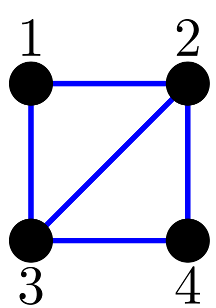
- Puntos de articulación: b, c, y e.
- Puentes: las aristas $\{a, b\}$ y $\{c, e\}$.

Número de caminos entre dos vértices

Teorema 25 *Sea un grafo G con matriz de adyacencia A con respecto al orden $\{v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}\}$. El número de caminos orientados diferentes de longitud $n \geq 1$ que empiezan en v_i y acaban en v_j está dado por la entrada (i, j) de la matriz A^n.*

Corolario 26 *Sea G un grafo simple con matriz de adyacencia A, entonces*

- $A^2_{ii} = d(i)$ *para todo* $1 \leq i \leq |V|$.
- *tr* $A^2 = 2|E|$.
- *tr* $A^3 = 6 \times$ *Número de triángulos no orientados en* G.

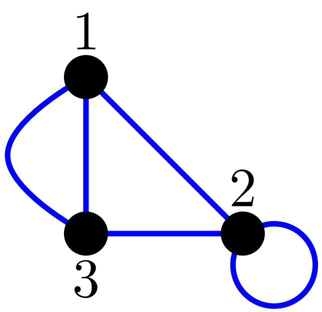


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tr} A^2 &= 2|E| = 10 \\ \operatorname{tr} A^3 &= 6|T| = 12 \end{aligned}$$

Número de caminos entre dos vértices

Nota: Si el grafo no es simple (multigrafo o pseudografo) el Corolario anterior no puede aplicarse.



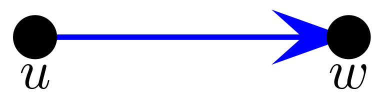
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A^2 &= 13 \neq 2|E| = \sum_{i \in V} d(i) = 10 \\ d(1) &= 3 \neq (A^2)_{11} = 5 \\ d(2) &= 4 \neq (A^2)_{22} = 3 \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 9 & 9 & 9 \\ 12 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr} A^3 = 19 \neq 6|T| = 12 \end{aligned}$$

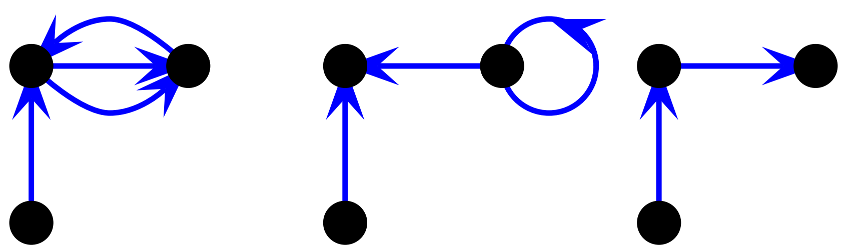
Grafos orientados o dirigidos

Definición 27
Un **grafo dirigido** $G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V *y un conjunto de* **aristas** *(o* **arcos***)* E*, que es un conjunto* <u>*ordenado*</u> *de pares de elementos distintos de* V*.*

Si $u, w \in V$, entonces una arista $e \in E$ es el par ordenado (u, w), representado por



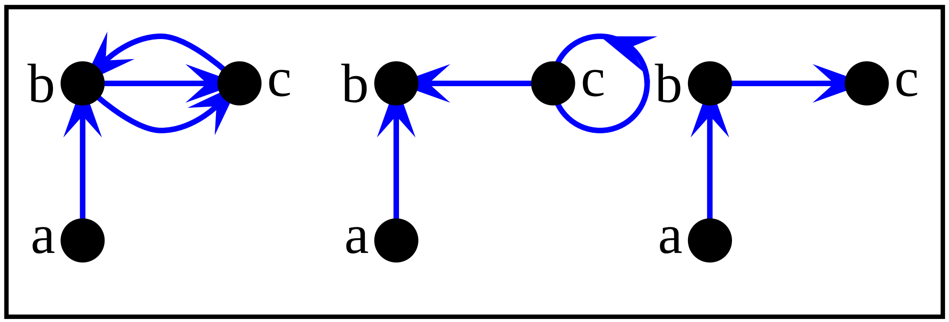
Nota: Las definiciones de multigrafo y pseudografo dirigidos son análogas, no permitiéndose la contradirección.



Grados en un grafo dirigido

En un grafo dirigido los vértices tienen dos tipos de grados:

Definición 28
El **grado (o semigrado) interno** *de un vértice v de un grafo dirigido G es el número de aristas que llegan a v. El* **grado (o semigrado) externo** *de un vértice v de un grafo dirigido G es el número de aristas que salen de v.*



(1) $d_i(a) = 0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 2, \quad d_e(b) = 2, \quad d_i(c) = 2, \quad d_e(c) = 1$

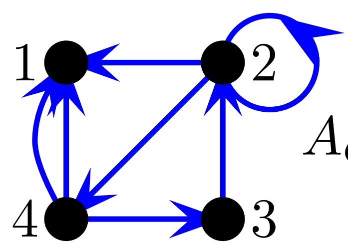
(2) $d_i(a) = 0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 2, \quad d_e(b) = 0, \quad d_i(c) = 1, \quad d_e(c) = 2$

(3) $d_i(a) = 0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 1, \quad d_e(b) = 1, \quad d_i(c) = 1, \quad d_e(c) = 0$

Proposición 29 *En un grafo dirigido $G = (V, E)$ la suma de los grados internos de los vértices es igual a la suma de los grados externos.*

Representación numérica de un grafo dirigido

Definición 30
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Consideremos una ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ de los vértices de G. La **matriz de adyacencia** *de G asociada a dicha ordenación es la matriz $|V| \times |V|$ cuyas entradas A_{ij} cuentan el número de aristas que comienzan en v_i y acaban en v_j.*



$$A_G = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{4} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \color{blue}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \color{red}{1} \\ \color{red}{2} \\ \color{red}{3} \\ \color{red}{4} \end{array} \end{array}$$

- A_G es **no** es simétrica en general.
- Si G es simple, $A_{ii} = 0$ y $A_{ij} \in \{0, 1\}$.
- Si G es un multigrafo, $A_{ii} = 0$.

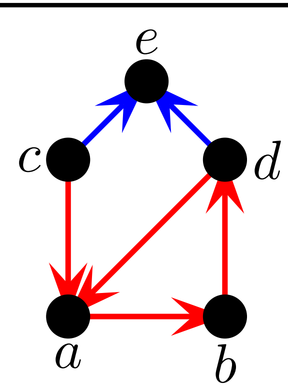
Caminos en un grafo dirigido

Definición 31

Un **camino** *en un grafo dirigido* $G = (V, E)$ *es una sucesión de aristas de la forma* $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{\ell-1}, v_\ell)$.

Notas:

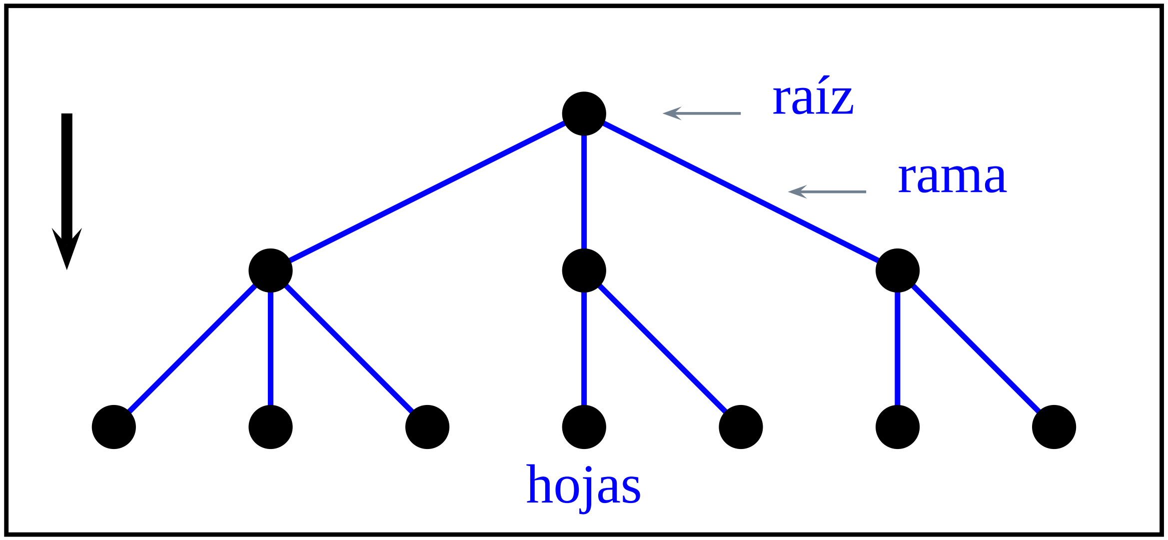
- Nótese que todas las aristas del camino tienen la misma dirección.
- Las definiciones de camino elemental, camino simple, circuito y ciclo para grafos dirigidos son análogas.



Camino $= (c, a, b, d, a, b)$

Árboles

Definición 32
Un **árbol** *es un grafo simple y conexo que no contiene ciclos. Un* **bosque** *es un grafo simple que no contiene ciclos. Cada componente conexa de un bosque es un árbol.*



Ejemplos:

- Árbol genealógico.
- Árbol de directorios de un ordenador.
- Organigrama de una empresa.

Caracterización de los árboles

Teorema 33 *(a) El grafo G es un árbol si y sólo si es conexo y al borrar cualquier arista se obtiene un grafo disconexo.*

(b) El grafo G es un árbol si y sólo si no contiene ciclos y al añadir cualquier arista se crea un ciclo.

DEMOSTRACIÓN: Parte (a): $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es conexo por definición. Supongamos que al borrar la arista $e = \{u, v\}$ el grafo que obtenemos G' sigue siendo conexo. Luego G' contiene un camino elemental P que conecta u y v. Pero si ponemos otra vez la arista $e = \{u, v\}$, ésta junto con P forman un ciclo, lo que contradice la hipótesis de que G sea un árbol.
$\Leftarrow$) Sólo nos queda demostrar que G no contiene ningún ciclo. Supongamos por el contrario que G contiene un ciclo C. Si borramos una arista de C, el grafo resultante G' sigue siendo conexo, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Proposición 34 *Sea G un grafo conexo tal que contenga un ciclo C. Entonces al borrar cualquier arista de C el grafo resultante es conexo.*

Propiedades de los árboles

Teorema 35 *Un grafo $G = (V, E)$ es un árbol si y sólo si existe un único camino elemental (no se repiten ni aristas ni vértices) entre cualquier par de vértices.*

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow$) Existe al menos un camino al ser G conexo. Si dicho camino no fuese único, entonces dos de esos caminos formarían un ciclo, lo que contradice que G sea un árbol.
$\Leftarrow$) Dados dos vértices existe un único camino elemental que los une, luego G es conexo. Además si hubiese un ciclo que los conectase, existirían dos caminos elementales entre dichos vértices, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Teorema 36 *Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos vértices de grado uno.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un vértice cualquiera y seguimos un camino elemental hasta el final, que será un vértice de grado 1. Como el grafo es finito, si ésto no ocurre, deberíamos visitar un vértice ya visitado; pero esto implicaría la existencia de un ciclo, lo que contradice que sea un árbol. Comenzamos ahora otro camino elemental a partir de este vértice de grado 1. Por el mismo argumento deberíamos acabar en otro vértice de grado 1. $\square$

Propiedades de los árboles

Definición 37
Procedimiento para hacer crecer un árbol:

1. *Comenzar con* $G = (\{r\}, \emptyset)$, *dónde* r *es el nodo raíz.*
2. *Dado* $G = (V, E)$, *añadir un nuevo vértice* u *y una nueva arista* $\{u, v\}$ *donde* $v \in V$.

Teorema 38 *Todo grafo obtenido por este procedimiento es un árbol y todo árbol se puede construir de este modo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea G_n un grafo que se pueda obtener vía dicho procedimiento con n vértices. G_1 es un árbol y supongamos que todos los grafos G_k con $k \leq n$ son árboles. Si añadimos un nuevo vértice v y una arista $\{v, u\}$, el nuevo grafo es también un árbol: es conexo (ya que G_n lo es) y no tiene ciclos (ya que G_n no los tenía y $d(v) = 1$).
Demostraremos por inducción que todo grafo de n vértices se puede construir de esta manera. G_1 es un árbol. Supongamos que todos los árboles con $n - 1$ vértices se pueden obtener por este procedimiento. Si G es un árbol con $n \geq 2$ vértices, entonces existe un vértice v de grado 1 (Teorema 36). Si lo borramos obtenemos el subgrafo G' con $n - 1$ vértices. G' es conexo (ya que G lo era y $d(v) = 1$) y no contiene ningún ciclo. Luego G' es un árbol. $\square$

Propiedades de los árboles

Teorema 39 *Todo árbol de n vértices tiene $n-1$ aristas.*

DEMOSTRACIÓN: El árbol con $n = 1$ no tiene aristas. El Teorema 38 nos garantiza que podemos construir un árbol añadiendo un vértice y una arista en cada paso. Pero así no modificamos la diferencia entre $|E|$ y $|V|$. $\square$

Teorema 40 *Si G es un grafo de n vértices, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es un árbol.*
2. *G es conexo y tiene $n-1$ aristas.*
3. *G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.*

Problema 10

Demostrar que las parafinas $C_n\ H_{2n+2}$ tienen moléculas de tipo árbol.

Solución: Los carbonos (vértices) tiene cuatro enlaces (4 aristas adyacentes) y los hidrógenos (vértices) uno (una arista adyacente). Así que tendremos $4n$ grados para los carbonos, $2n$ grados para los hidrógenos que no están en los extremos y queda 2 para esos extremos. Así que

$$\sum_i d(i) = 4n + 2n + 2.$$

Como

$$\sum_i d(i) = 2|E|,$$

podemos decir que $|E| = 3n + 1$. Por otro lado, de la fórmula química deducimos que $|V| = n + (2n + 2) = 3n + 2$ y comparando concluimos que $|E| + 1 = |V|$. Como el grafo es conexo (sólo un molécula) y el número de aristas es sólo una menos que el número de vértices podemos afirmar que es árbol.

Ejercicios

Problema 11

Dibujar todos los árboles (salvo isomorfismos) de cuatro y cinco vértices.

Problema 12

¿Cuántos árboles tiene un bosque de 62 *vértices y* 51 *aristas?*

Solución: del enunciado $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = 51$ y $V_1 + V_2 + \cdots + V_k = 62$. Como es árbol $E = V - 1$, así que
$E_1 + 1 + E_2 + 1 + \cdots + E_k + 1 = E_1 + E_2 + \cdots + E_k + k = 62.$
Comparando esta última expresión con la primera $51 + k = 62$, luego $k = 11$

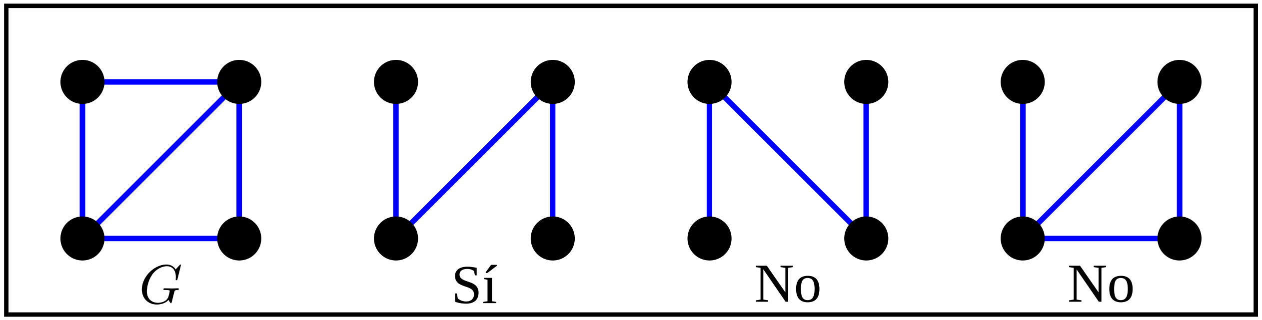
Problema 13

Demostrar que si en un árbol todos los vértices que no son hojas tienen grado tres, entonces el árbol tiene un número par de vértices.

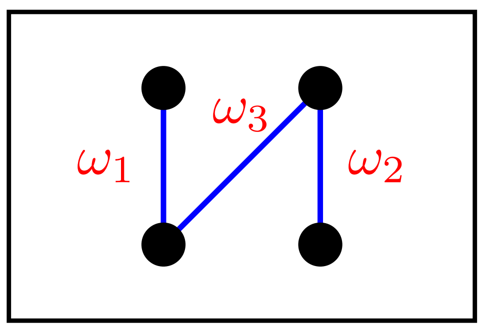
Solución: La hojas tiene grado 1 (impar) y los demás tiene grado 3 (impar). Todos los vértices tiene grado impar. Y según un teorema ya visto el número de vértices de grado impar (todos en este caso) en un grafo G es par.

Árboles generadores

Definición 41
Un **árbol generador o recubridor** *de un grafo conexo* G *es un árbol que contiene todos los vértices de* G *y es subgrafo de* G.



Definición 42
Un **grafo ponderado** $G = (V, E, \omega)$ *es un grafo en el que a cada arista* $e \in E$ *se le asocia un peso* $\omega(e) \in \mathbb{R}$.



Árboles generadores mínimos

Definición 43
Un **árbol generador mínimo** *de un grafo conexo ponderado es un árbol generador tal que la suma de los pesos de sus aristas es la más pequeña posible.*

Aplicación:
Construir una línea telefónica (o un sistema de autopistas) entre una serie de ciudades tal que el coste sea mínimo y todas estén conectadas.

Nota:
El número de árboles con n vértices crece muy rápidamente con n.

Definición 44
Un **algoritmo voraz** *es aquel que en cada paso toma la elección óptima.*

La elección óptima en cada paso intermedio no garantiza una solución óptima para todo el problema. Sin embargo, en el caso del árbol generador de peso mínimo los algoritmos (voraces) de Prim y Kruskal sí funcionan.
Nota: el árbol recubridor de peso mínimo no tiene por qué ser único.

Algoritmo de Prim, 1957

Algoritmo 45 (Algoritmo de Prim)

procedure *Prim(G: grafo ponderado conexo con n vértices)*

$T =$ *arista con peso mínimo*

for $i = 1$ **to** $n - 2$

begin

$e =$ *arista de peso mínimo incidente con un vértice de* T

y que no forme un ciclo si se le añade a T

$T = T$ *con la arista* e *añadida*

end

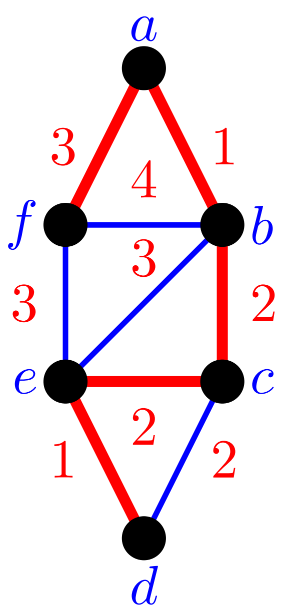
Notas:

- La arista e puede no ser única.
- El árbol generador de peso mínimo puede no ser único
- El resultado es un árbol con n vértices, luego tiene que tener $n - 1$ aristas.

Teorema 46 *Dado un grafo conexo ponderado G, el algoritmo de Prim produce un árbol generador mínimo de G.*

Nota: en este caso es necesaria la incidencia.

Algoritmo de Prim



(A) (B) (C)

(A): $\underline{\{e,d\}} \cup \underline{\{e,c\}} \cup \{c,b\} \cup \{b,a\} \cup \underline{\{a,f\}}$

(B): $\underline{\{e,d\}} \cup \underline{\{d,c\}} \cup \{c,b\} \cup \{b,a\} \cup \underline{\{a,f\}}$

(C): $\underline{\{a,b\}} \cup \underline{\{b,c\}} \cup \{c,e\} \cup \{e,d\} \cup \underline{\{e,f\}}$

$$\boxed{\sum_{e \in E(T)} \omega(e) \; = \; 9}$$

Algoritmo de Kruskal, 1957

Algoritmo 47 (Algoritmo de Kruskal)

procedure *Kruskal(G: grafo ponderado conexo con n vértices)*

$T = (\emptyset, \emptyset)$

for $i = 1$ **to** $n - 1$

begin

  $e =$ *arista de peso mínimo que no forme un ciclo si se le añade a* T

  $T = T$ *con la arista* e *añadida*

end

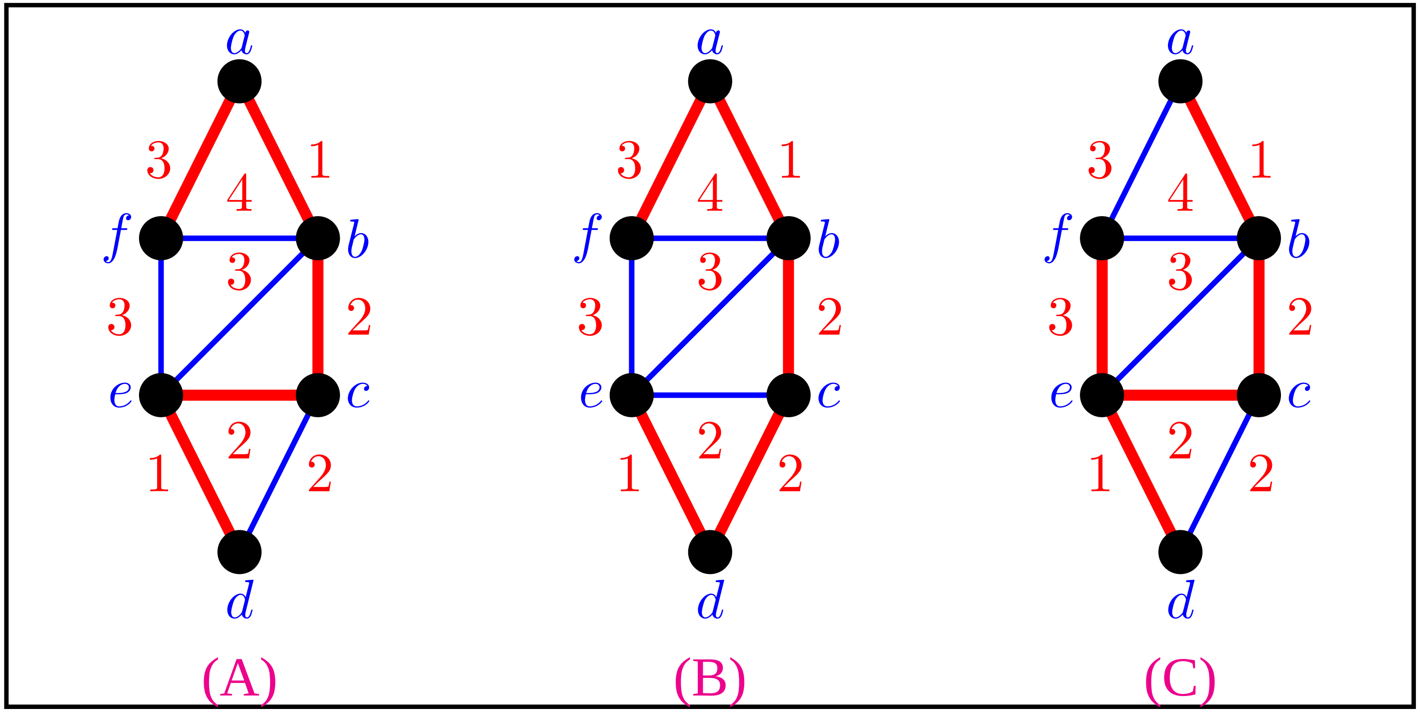
Notas:

- La arista e puede no ser única.
- La arista e puede no ser incidente con ningún vértice en T.

Teorema 48 *Dado un grafo conexo ponderado G, el algoritmo de Kruskal produce un árbol generador mínimo de G.*

Nota: en este caso la incidencia no es necesaria.

Algoritmo de Kruskal



(A): $\{e,d\} \cup \{a,b\} \cup \{e,c\} \cup \{c,b\} \cup \{a,f\}$

(B): $\{e,d\} \cup \{a,b\} \cup \{c,b\} \cup \{c,d\} \cup \{a,f\}$

(C): $\{a,b\} \cup \{e,d\} \cup \{e,c\} \cup \{c,b\} \cup \{e,f\}$

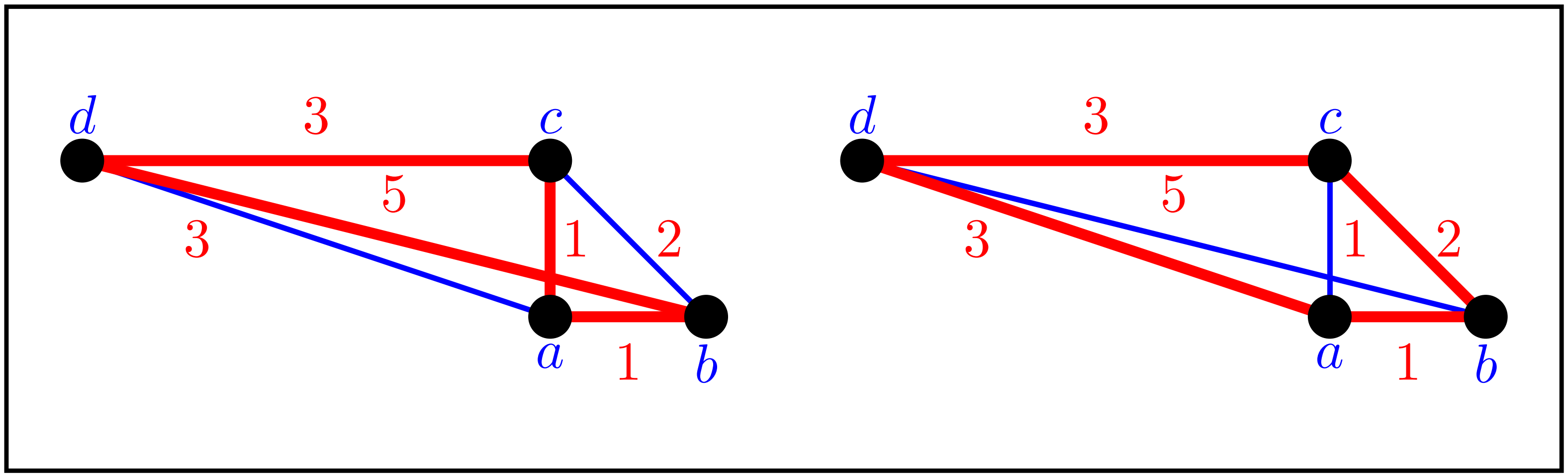
$$\boxed{\sum_{e \in E(T)} \omega(e) \;=\; 9}$$

Notas:

- Ambos algoritmos se pueden usar para obtener un árbol generador de un grafo conexo [no ponderado] $G = (V, E)$.
- Los algoritmos voraces pueden fallar en problemas parecidos.

Problema 14

Encontrar un ciclo que pase por todos los vértices de un grafo y minimice la suma de los pesos de las aristas correspondientes.

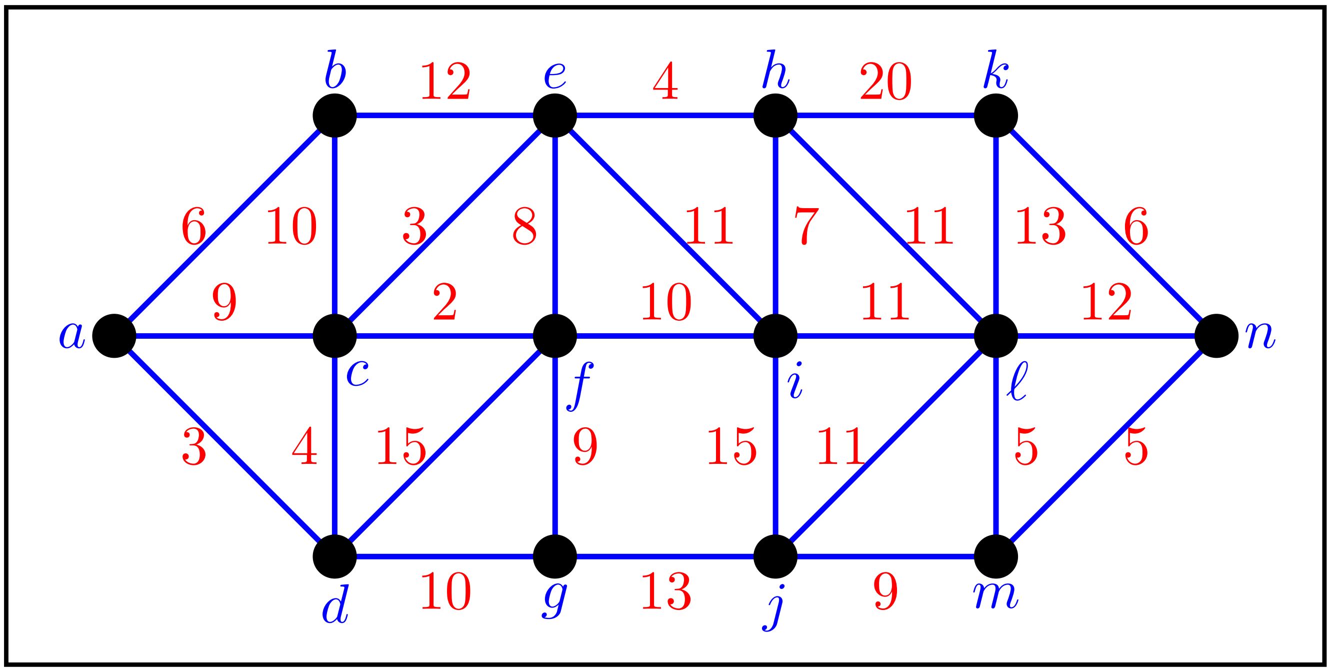


- Algoritmo voraz: $\{a, b\} \cup \{a, c\} \cup \{c, d\} \cup \{d, a\} \Rightarrow \sum_e \omega(e) = 10$.
- Ciclo mínimo: $\{a, b\} \cup \{b, c\} \cup \{c, d\} \cup \{d, a\} \Rightarrow \sum_e \omega(e) = 9$.

Ejemplo: Diseño de una red telefónica local

Problema 15

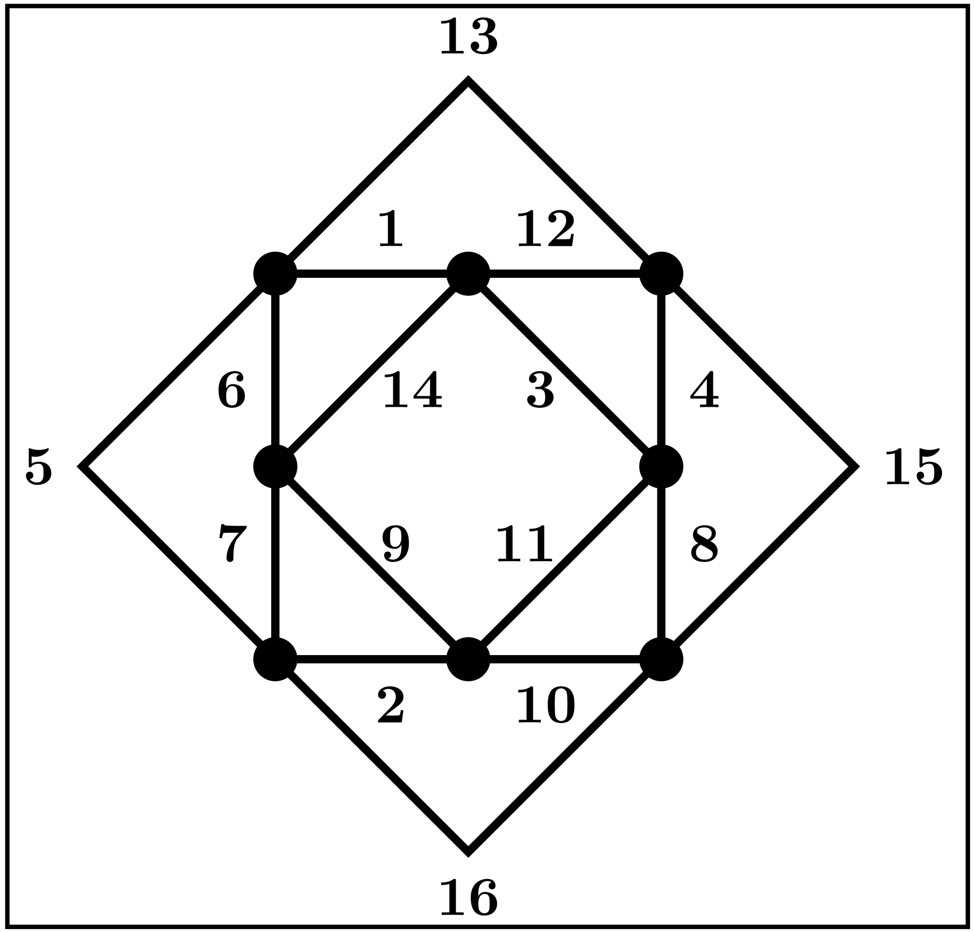
El plano muestra los puntos de conexión y las posibles líneas telefónicas en una urbanización. La zona quedará comunicada cuando dos puntos cualquiera estén conectados. En rojo está indicado el precio de cada línea en miles de euros. Calcular el diseño de la red más barata que conecte la zona.



Más ejemplos

Problema 16

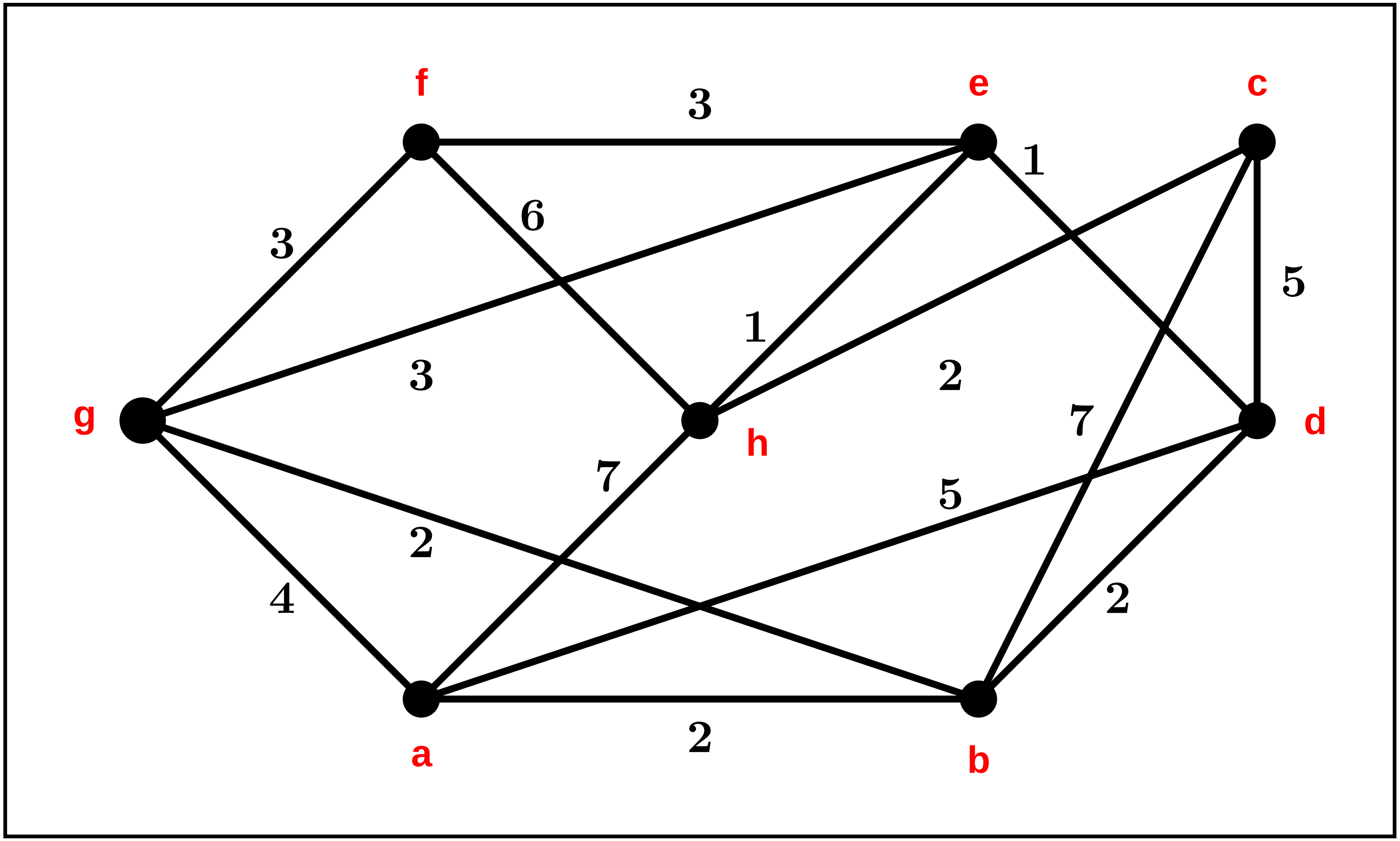
Calcular mediante el algoritmo de Kruskal un árbol generador mínimo del grafo:



Más ejemplos

Problema 17

Estudiar si el siguiente grafo admite un árbol generador de peso menor o igual que 12*:*

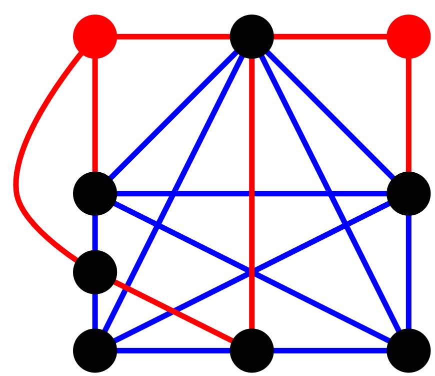


Definición 49
Un grafo es **planar** *si puede ser dibujado en el plano sin que sus aristas se crucen. Una representación de un grafo planar en la que las aristas no se crucen se denomina* **grafo plano***.*

Ejemplo: K_4 es planar; pero K_5 y $K_{3,3}$ no lo son.

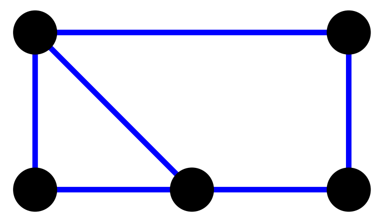
Teorema 50 (Kuratowsky, 1930) *Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo a ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$.*

Definición 51
Insertar un nuevo vértice en una arista de un grafo se denomina **subdividir** *dicha arista. La subdivisión de una o más aristas de un grafo G da lugar a una* **subdivisión** *de G.*



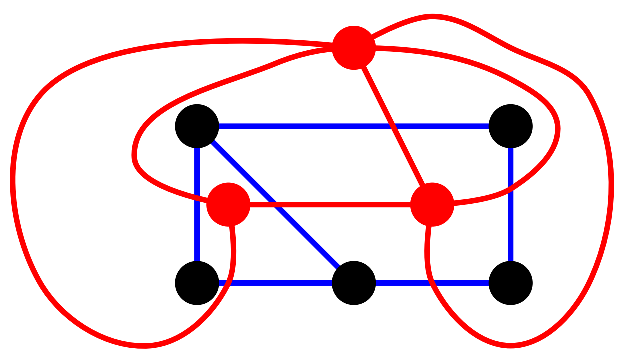
Grafos planares y grafos duales

Teorema 52 (Fórmula de Euler, 1752) *Un grafo $G = (V, E)$ plano y conexo divide al plano en R regiones de manera que* $|V| - |E| + R \; = \; 2\,.$



$$R = 2 + |E| - |V| = 2 + 6 - 5 = 3$$

Definición 53
Dado un grafo $G = (V, E)$ plano, podemos construir su **grafo dual** $G^\star = (V^\star, E^\star)$ *de la siguiente manera: introducimos un vértice del grafo dual $r \in V^\star$ por cada región r en la que G divide al plano. Los vértices $r_1, r_2 \in V^\star$ tienen tantas aristas incidentes $e \in E^\star$ como aristas comparten las regiones r_1, r_2 definidas por el grafo G.*



$$\begin{aligned} |E^\star| &= |E| \\ |V^\star| &= R \\ R^\star &= |V| \end{aligned}$$

Grafos duales

Definición 54
El **grado de una región** r *de un grafo plano se define como el grado del vértice correspondiente* $r \in V^\star$ *en el grafo dual.*

Teorema 55 *En un grafo plano y conexo se cumple que*

$$2|E| = \text{Suma de los grados de las regiones}\,.$$

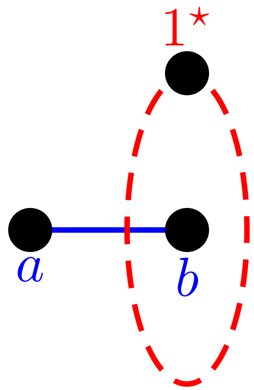
DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $2|E| = \sum_{i \in V} d(i)$. Aplicamos esta fórmula al grafo dual $G^\star = (V^\star, E^\star)$

$$2|E^\star| = \sum_{i \in V^\star} d(i) = \sum_{r \in R} d(r)$$

Como $|E| = |E^\star|$ el teorema está demostrado. $\square$

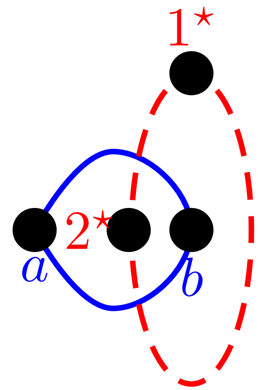
Teorema 56 (Teorema de los cuatro colores, v2) *Todo mapa (en una esfera) puede ser coloreado con a lo sumo cuatro colores.*

Algunos ejemplos



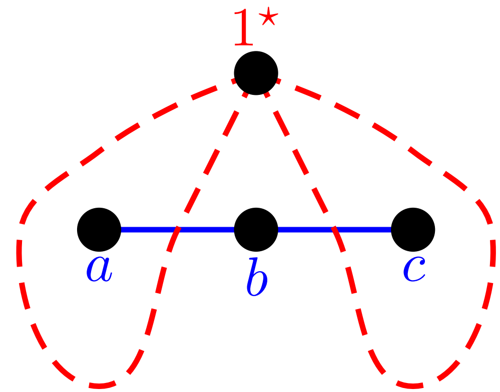
$|R| = 1$

$d(1^\star) = 2$



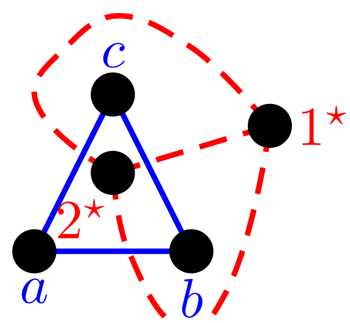
$|R| = 2$

$d(1^\star) = 2$



$|R| = 1$

$d(1^\star) = 4$



$|R| = 2$

$d(1^\star) = 3$

Algunos corolarios

Corolario 57 *Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.*

DEMOSTRACIÓN: $2|E| = \sum_r d(r) \geq 3R$ (3 es el grado mínimo). Según Euler $|V| - |E| + R = 2$, así que $R = 2 - |V| + |E|$ que podemos multiplicar por 3 quedando $3R = 6 - 3|V| + 3|E|$, que podemos sustituir en la primera ecuación quedando $2|E| \geq 6 - 3|V| + 3|E|$ y que simplificamos hasta $|E| =\leq |V| - 6$. $\square$

Aplicación: K_5 no es planar. $|V| = 5; |E| = 10$. Luego, $10 = |E| > 3|V| - 6 = 9$.

Corolario 58 *Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$ y no tiene ciclos de longitud 3, entonces $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Problema 18

Usar el corolario para probar que $K_{3,3}$ no es planar.

Solución: $|V| = 6$ por tanto se cumple que $|V| \geq 3$, no tiene ciclos y es conexo. Si fuese plano $|E| \leq 2|V| - 4$, como $|E| = 9$ vemos que $9 \leq 2 \cdot 4 = 8$, no es cierto, así que por tanto no es plano.

Problema 19

Sean dos grafos G_1 y G_2. G_1 es un grafo plano conexo de 10 vértices y que divide al plano en 3 regiones. G_2 es un grafo de 10 vértices todos ellos de grado mayor o igual que 3. ¿Son isomorfos G_1 y G_2?

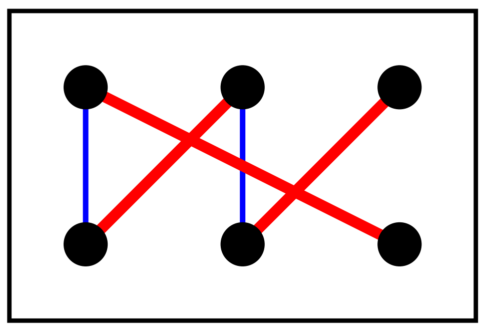
Solución: Para G_1 tenemos que $|V| - |E| + R = 2$, que en este caso es $10 - |E| + 3 = 2$, así que $|E_{G1}| = 11$
Para G_2 tenemos que $2|E| = \sum_i d(i)$, que en nuestros caso es $2|E| \geq 3 \cdot 10$, así que $|E_{G2}| \geq 15$
Como para que sean isomorfos deben tener el mismo número de vértices y aristas como mínimo, como en esta caso el número de aristas es incompatible entonces no son isomorfos.

Definición 59

Un **emparejamiento completo o perfecto** *de un grafo con $2n$ vértices es un subgrafo generador formado por n aristas disjuntas.*

Notas:

- Todos los vértices de G pertenecen al subgrafo.
- Cada vértice de G sólo tiene una arista incidente perteneciente al subgrafo.
- En grafos bipartitos es menos difícil:



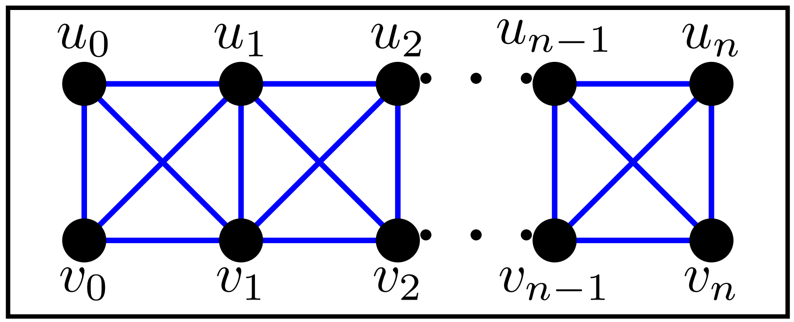
- ¿De cuantas maneras puedo teselar una cuadrícula con fichas de dominó?
- ¿Es posible que en una fiesta todos los participantes que se conozcan bailen simultáneamente?

Emparejamientos en grafos

Teorema 60 *Si todos los vértices de un grafo bipartito tienen el mismo grado $d \geq 1$, entonces contiene un emparejamiento perfecto.*

Problema 20

Sea el grafo G_n con $2(n+1)$ vértices

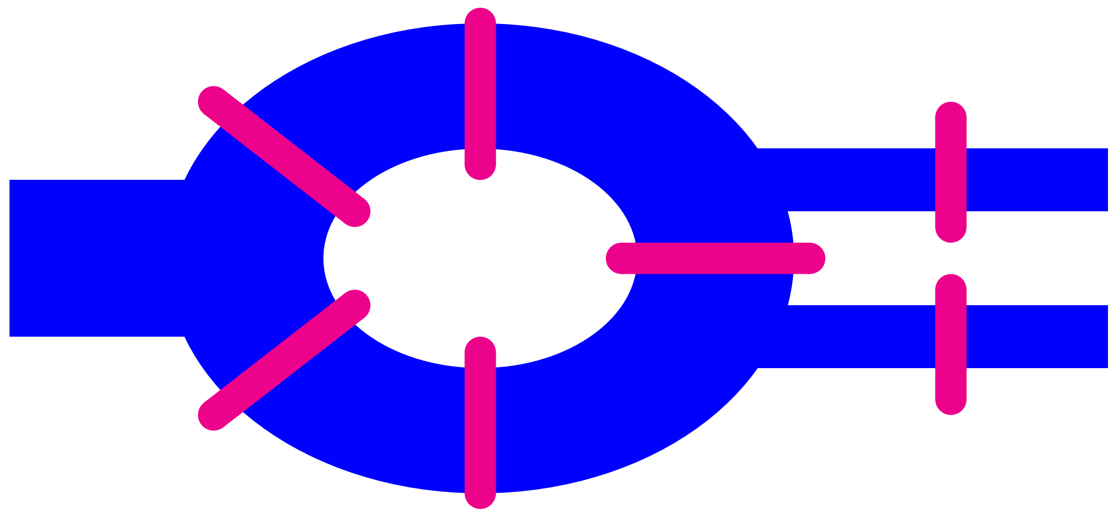


- *¿Es G_n bipartito? ¿Es planar?*
- *Calcular el número de emparejamientos completos de G_n.*
  - *Demostrar que satisface: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$ con $a_1 = 3$ y $a_2 = 5$.*
  - *Resolver la recurrencia y probar que $a_n = \frac{1}{3}\left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right]$.*

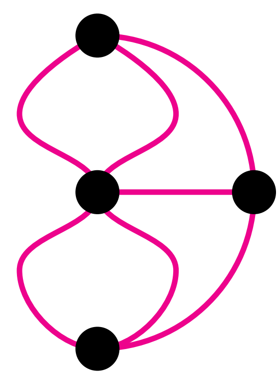
Corolario 61 *Para todo $n \geq 0$, se tiene que $3 \mid \left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right]$.*

Problema 21

En la ciudad de Königsberg (Kaliningrado) hay un río y siete puentes. ¿Es posible dar una vuelta y cruzar cada puente una sola vez?



Representación en término de grafos:



Grafos eulerianos

Problema 22

Dado un grafo $G = (V, E)$, ¿existe un circuito que contenga cada arista $e \in E$? [Al ser circuito debe contener cada arista una sola vez].

Definición 62

Un **circuito euleriano** *es un circuito que contiene a todas las aristas del grafo. Un grafo que admite un circuito euleriano se denomina* **grafo euleriano**.

Un **camino euleriano** *es un camino simple y abierto que contiene todas las aristas del grafo. Un grafo no euleriano que admite un camino euleriano se denomina* **grafo semi-euleriano**.

Teorema 63 *Un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par. Un grafo conexo es semi-euleriano si y sólo si contiene exactamente dos vértices de grado impar.*

Un grafo dirigido conexo es euleriano si y solo si para cualquier vértice el grado interno coincide con el grado externo.

Luego, el problema de los puentes de Königsberg **no** tiene solución: el grafo correspondiente no es ni euleriano ni semi-euleriano.

Problema 23

¿Para qué valores de n son eulerianos los grafos K_n, C_n y Q_n?

Algoritmo de Fleury

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con todos los vértices de grado par:

(1) Paso inicial: Escogemos un vértice v_0 como origen del circuito $C_0 = \{v_0\}$.

(2) Extensión del circuito: Sea el circuito $C_i = \{v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i\}$ donde $v_i \in V$ y $e_i \in E$.

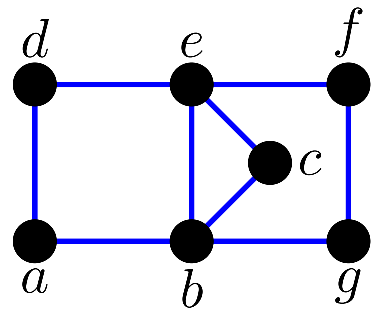
- Si existe una <u>única</u> arista $e_{i+1} = \{v_i, w\} \in E \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$:
  - $C_i \to C_{i+1} = \{v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, w\}$
  - $V \to V \setminus \{v_i\}$
  - $E \to E \setminus \{e_{i+1}\}$
- Si hay varias aristas incidentes con v_i: elegimos cualquiera de ellas con la condición que **no** sea **puente**. Si escogemos $e_{i+1} = \{v_i, w\} \in E \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$:
  - $C_i \to C_{i+1} = \{v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i, e_{i+1}, w\}$
  - $E \to E \setminus \{e_{i+1}\}$

(3) Repetimos el Paso (2) hasta que $E = \emptyset$ ($|E|$ pasos). $C_{|E|}$ es el circuito euleriano buscado.

Ejemplo

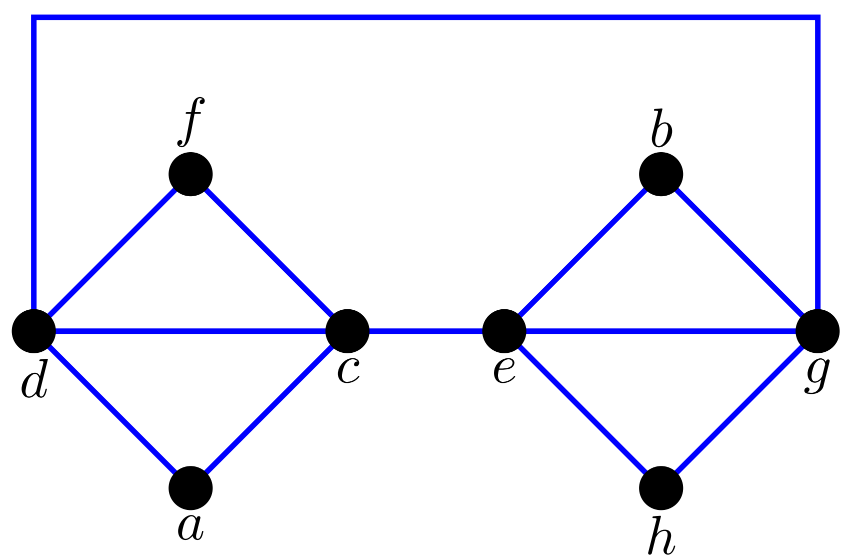
Problema 24

Encontrar un circuito euleriano en el siguiente grafo:



Problema 25

Encontrar un circuito euleriano en el siguiente grafo:



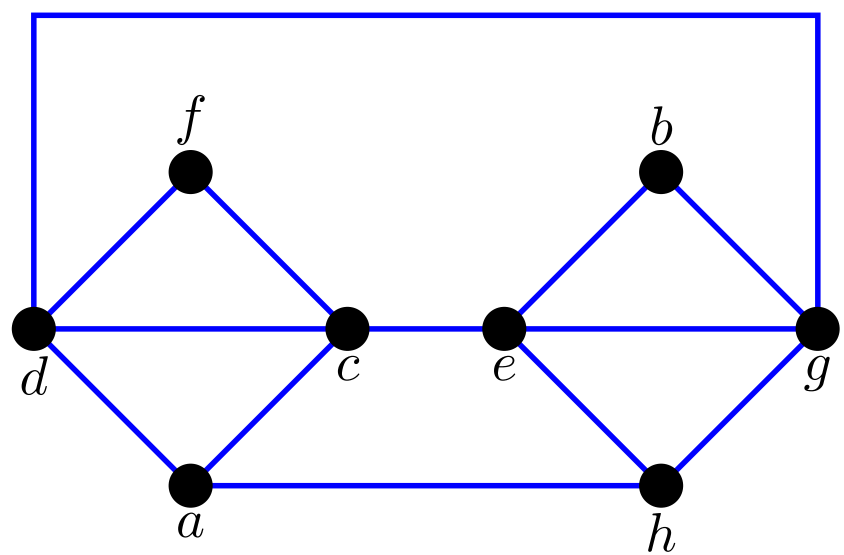
Ejemplo

Problema 26

Diseñar un algoritmo para encontrar un camino euleriano.

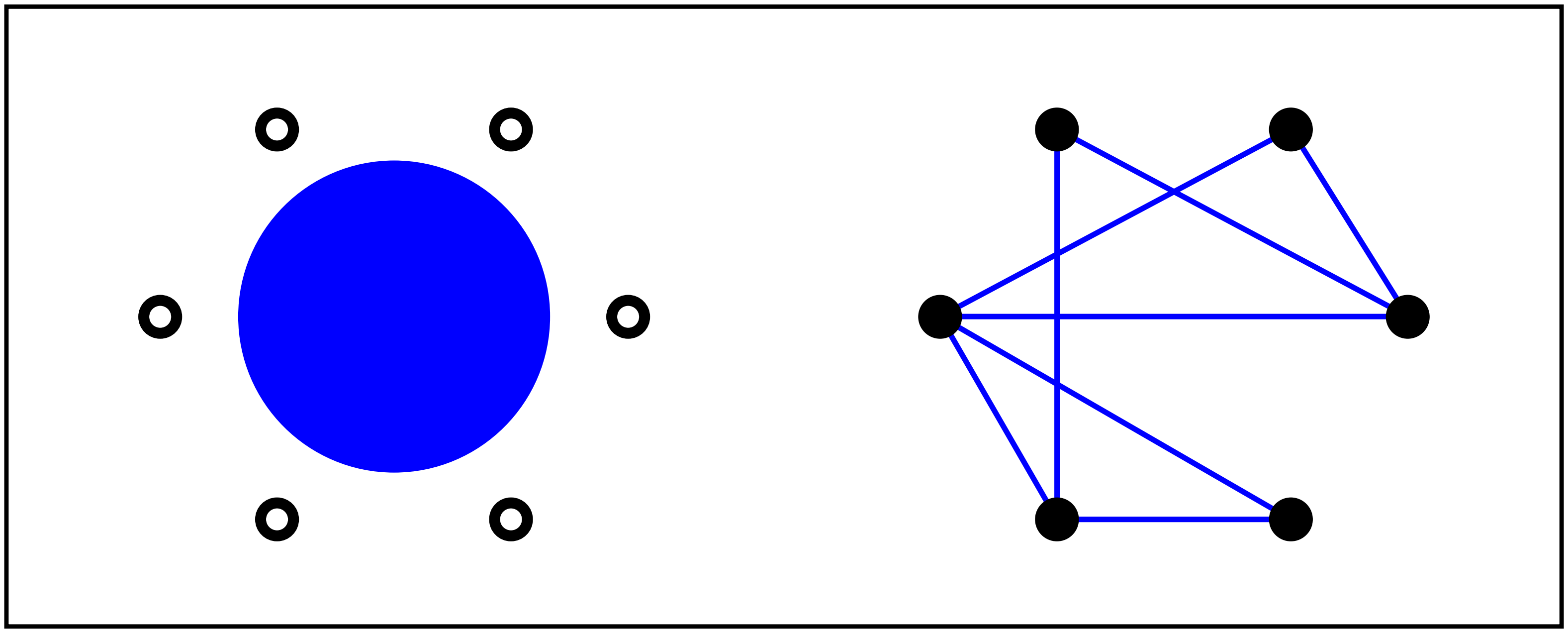
Problema 27

Encontrar un camino euleriano en el siguiente grafo:



Problema 28

En una cena entre diplomáticos hay que tener cuidado de sentar juntos a diplomáticos de países amigos y sentar separados a diplomáticos de países enemigos. ¿Es posible hacer ésto con n diplomáticos?



Problema 29

¿Es posible encontrar un ciclo en G tal que pase por cada vértice una sola vez?

Este tipo de problemas son equivalentes a que su grafo sea hamiltoniano.

Grafos hamiltonianos

Definición 64
Un **ciclo hamiltoniano** *es un ciclo que contiene a todos los vértice del grafo. Un grafo que admite un ciclo hamiltoniano se denomina* **grafo hamiltoniano***.*
Un **camino hamiltoniano** *es un camino elemental y abierto que contiene todos los vértices del grafo. Un grafo no hamiltoniano que admite un camino hamiltoniano se denomina* **grafo semi-hamiltoniano***.*

Nota: El problema de decidir si un grafo G arbitrario tiene un ciclo hamiltoniano es mucho más difícil que decidir si tiene un circuito euleriano. El problema no tiene solución general, aunque existen condiciones suficientes del estilo siguiente:

Teorema 65 (Dirac, 1950) *Si G es un grafo simple con n vértices y cada vértice tiene un grado $\geq n/2$, entonces G es hamiltoniano.*

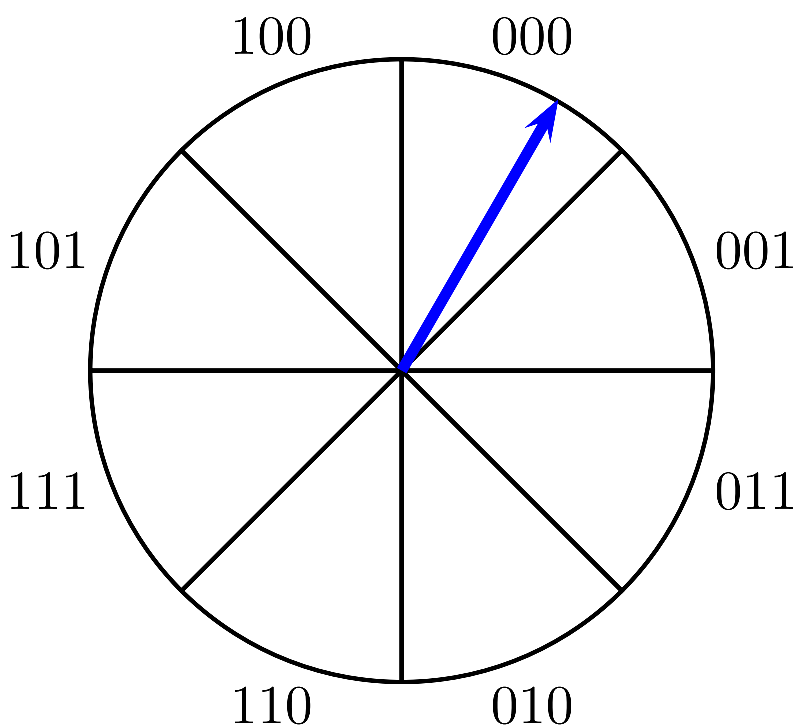
Problemas:

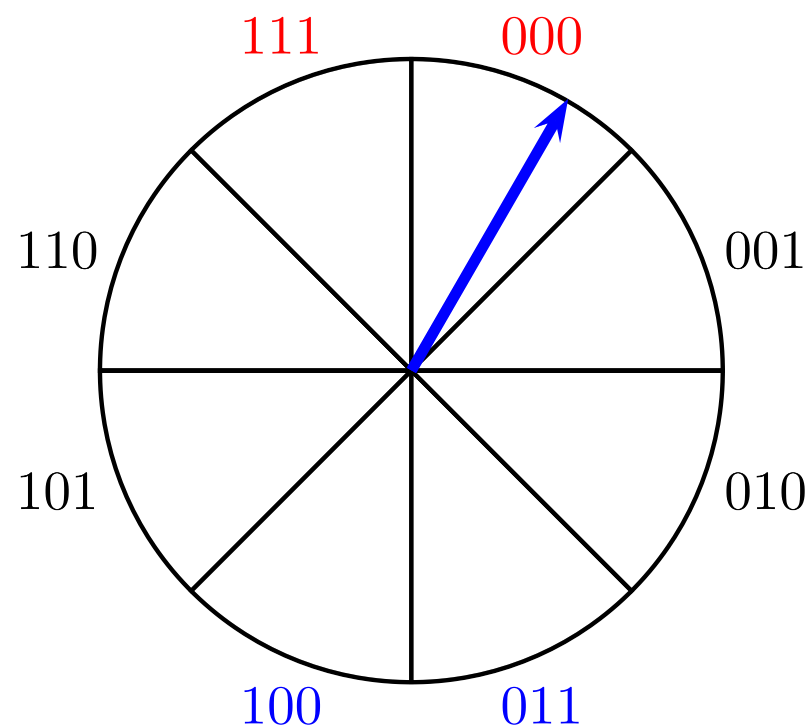
- Demostrar que K_n es hamiltoniano para todo $n \geq 3$.
  El grado de cada vértice es $d(i) = n - 1$. Según el teorema de Dirac si $n - 1 \geq n/2$ es hamiltoniano, caso que se cumple cuando $n \geq 3$, pues $2 \geq 3/2$
- Demostrar que $K_{n,m}$ es hamiltoniano si y sólo si $n = m \geq 2$.
  Los grados de los vértices son o bien n (el más pequeño) o bien m, así que $|V| = m + n$. Según el teorema de Dirac y eligiendo el caso más conflictivo $n \geq \frac{n+m}{2}$, que se cumple si sólo si $n = m$.

Aplicación: códigos de Gray, 1940

Definición 66

Un **código de Gray de orden n** *es una cadena cíclica formada por 2^n secuencias binarias de longitud n con la propiedad de que cualquier par de secuencias adyacentes difieren únicamente en un bit.*





Los códigos de Gray permiten reducir el error al leer la posición angular de una aguja en una rueda.

Problema 30
Un viajante tiene que cubrir n ciudades interconectadas todas entre sí. Su objetivo es salir de su casa, visitarlas todas una sola vez y volver a su casa al finalizar de manera que la distancia recorrida sea mínima.

Este problema consiste en encontrar entre todos los ciclos hamiltonianos del grafo ponderado $K_n = (V_n, E_n, \omega)$ uno C que minimice la función

$$E(C) = \sum_{e \in V(C)} \omega_e \,.$$

Este problema es muy difícil y no se conocen algoritmos *polinómicos* que lo resuelvan.

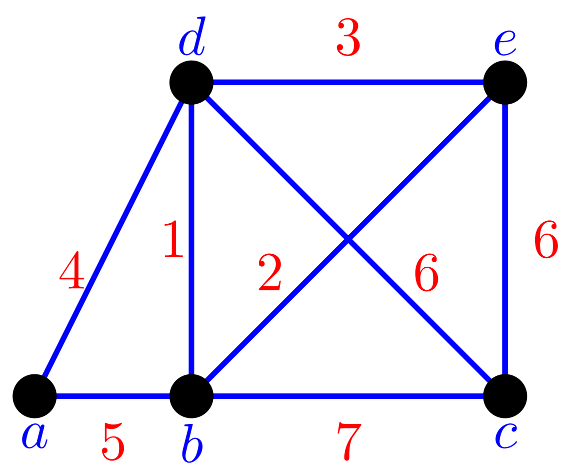
Problema 31

Demostrar que el número de ciclos hamiltonianos <u>*no dirigidos*</u> *que tiene* K_n *con* $n \geq 3$ *es* $(n-1)!/2$.

Solución: Al principio hay $(n-1)$ a elegir, luego $(n-2)$ y así sucesivamente por lo que $(n-1)(n-2)(n-3)\cdots = (n-1)!$. Como no es dirigido estamos contando el doble así que el numero de ciclos es $1/2(n-1)!$

Problema 32

Encontrar los árboles generadores de menor y mayor peso en el siguiente grafo ponderado:



Solución: se hace por Kruskal, eligiendo la arista de mayor peso, luego la segunda de mayor peso y así sucesivamente.

Problemas

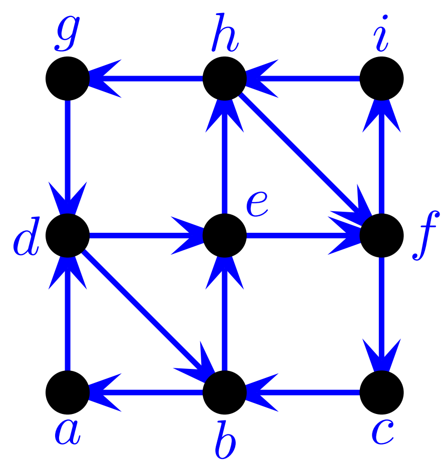
Problema 33

¿Existe algún grafo simple de n vértices y m aristas y tal que su matriz de adyacencia satisfaga tr $A^3 = (2n+1)(2m+1)$?

Solución: Sabemos que $TrA^3 = 6T$, pero como $2(n+1)$ y $(2m+1)$ son impares su producto es impar que no puede ser 6 veces algo, que es par.

Problema 34

Encontrar un circuito euleriano en el siguiente grafo orientado:



Solución: Un posible circuito es $(a, e, f, i, h, f, c, b, e, h, g, d, b, a)$

Coloraciones propias de un grafo

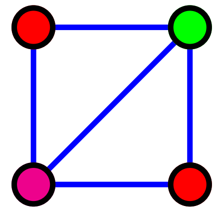
Problema 35
En el congreso Lattice'06 hay seis conferencias de una hora programadas para el día inaugural $\{c_1, c_2, \ldots, c_6\}$. Entre la audiencia hay quienes quieren escuchar los pares de conferencias $\{c_1, c_2\}$, $\{c_1, c_4\}$, $\{c_3, c_5\}$, $\{c_2, c_6\}$, $\{c_4, c_5\}$, $\{c_5, c_6\}$ y $\{c_1, c_6\}$. ¿Cuántas horas son necesarias para poder dar todas las conferencias sin solaparse?

Definición 67
Una **coloración propia** *(con q colores) de un grafo $G = (V, E)$ es una función $c : V \to \{1, 2, \ldots, q\}$ tal que $c(u) \neq c(w)$ siempre que u y w sean adyacentes.*

Notas:

- Dado un grafo $G = (V, E)$ el número total de coloraciones (propias y no propias) con q colores es $q^{|V|}$.
- En todo lo que sigue consideraremos sólo **coloraciones propias**.
- En la definición coloreamos los vértices de G. También se pueden colorear las aristas de G con la siguiente condición: si $e, f \in E$, $c(e) \neq c(f)$ siempre que e, f sean incidentes con el mismo vértice.

Coloraciones propias de un grafo



Dos preguntas difíciles:

1. ¿Cuántas coloraciones con q colores $P_G(q)$ se pueden conseguir sobre G?
2. ¿Cuántos colores q necesito cómo mínimo para poder colorear G?

Definición 68
El **número cromático** $\chi(G)$ *de un grafo* G *es el menor entero* q *tal que existe una coloración de* G *con* q *colores; es decir,* $P_G(q) > 0$ *para todo* $q \geq \chi(G) \in \mathbb{N}$.

Notas:

- El número cromático del grafo anterior es $\chi(G) = 3$.
- No hay algoritmos *polinómicos* para calcular $P_G(q)$ ó $\chi(G)$.

Algoritmo voraz para colorear un grafo

Algoritmo 69 (Algoritmo voraz)

procedure *(G: grafo simple conexo con* n *vértices)*

Ordenamos los vértices de V*:* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$c(v_1) = 1$

for $i = 2$ **to** n

begin

$S_i = \{q \mid c(v_k) = q$ *, para todo* v_k *vecino de* v_i *con* $k < i\}$

$c(v_i) =$ *color más pequeño que no esté en* S_i

end

Notas:

- No calculamos $\chi(G)$, sino una cota superior (muy) dependiente de la ordenación usada.
- Para calcular $\chi(G)$ habría que considerar las $n!$ ordenaciones posibles de los vértices (tiempo exponencial).

Problema 36

Aplicar el algoritmo voraz al problema de la conferencia con las siguientes ordenaciones:

(a) $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ *y (b)* $\{c_1, c_2, c_6, c_4, c_5, c_3\}$.

Problema 37
Calcular el número de coloraciones con q colores que puedo obtener con el grafo K_n.

Teorema 70 *Si G es un grafo con grado máximo k, entonces $\chi(G) \leq k+1$.*

Teorema 71 (Brooks, 1941) *Si G es un grafo no completo, conexo y con grado máximo $k \geq 3$, entonces $\chi(G) \leq k$.*

Ejemplos:

- K_4 es regular con grado 3 y $\chi(K_4) = 4$.
- C_{2n+1} es regular con grado 2 y $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

Proposición 72 *Un grafo G es bipartito si y sólo si $\chi(G) = 2$.*

Teorema 73 *Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Corolario 74 *Todos los árboles son bipartitos*

El teorema de los cuatro colores

Teorema 75 (Appel y Haken, 1976) $P_G(4) > 0$ *para todo grafo planar* G.

Bastan cuatro colores para colorear un mapa de tal modo que los países vecinos tengan colores distintos.

Notas:

- Fue conjeturado en 1852.
- En 1879 Kempe publicó una prueba errónea; pero encontró las ideas fundamentales.
- Heawood (1890) encontró el error en la prueba de Kempe y demostró el teorema de los cinco colores.
- La prueba original fue *asistida* por ordenador (¡más de 1200 horas de CPU!).
- No existe aún una prueba analítica.
- No existe un teorema de los tres colores: existen grafos planares con número cromático $\chi(G) = 4$: e.g. K_4.

Problemas de camino mínimo

Problema 38
Encontrar el camino de longitud mínima que une un vértice inicial s y un vértice final t en un grafo $G = (V, E)$ conexo, simple y ponderado con todos los pesos positivos ($\omega_i > 0$ para todo $i \in E$).

Solución: El algoritmo de Dijkstra (1959).

Teorema 76 *El algoritmo de Dijkstra encuentra la longitud del camino más corto entre dos vértices de un grafo conexo, simple y ponderado con todos los pesos positivos.*

Proposición 77 *El algoritmo de Dijkstra, aplicado sobre un grafo conexo, simple y ponderado con todos los pesos positivos y con n vértices, realiza $O(n^2)$ operaciones (sumas y comparaciones).*

El algoritmo de Dijkstra

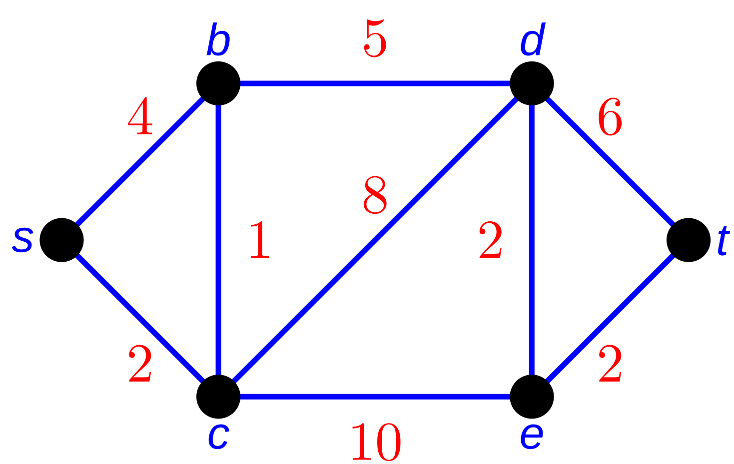
Idea:
En cada iteración a cada vértice j se le asignan dos etiquetas que pueden ser o bien temporales (δ_j, P_j) o bien permanentes $\boxed{(\delta_j, P_j)}$.

- La etiqueta δ_j es una estimación de la longitud del camino mínimo desde el vértice inicial s hasta el vértice actual j.
- La etiqueta P_j es una estimación del predecesor del vértice j en dicho camino.

Denotaremos $\omega_{ij} > 0$ al peso de la arista $\{i, j\} \in E$.

Problema 39

Calcular el camino de menor longitud entre s y t en el siguiente grafo:



El algoritmo de Dijkstra (2)

(1) Paso inicial: Marcamos el origen s con la etiqueta permanente $\boxed{(0, s)}$.

El resto de los vértices $j \in V$ ($j \neq s$) se marcan temporalmente:

- Si $\{j, s\} \in E$, se marca con $(\omega_{s,j}, s)$.
- Si $\{j, s\} \notin E$, se marca con $(\infty, -)$.

(2) Sea $v \in V$ el último vértice que se ha vuelto permanente. Examinamos cada vértice temporal j comparando δ_j con el valor de $\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j}$.

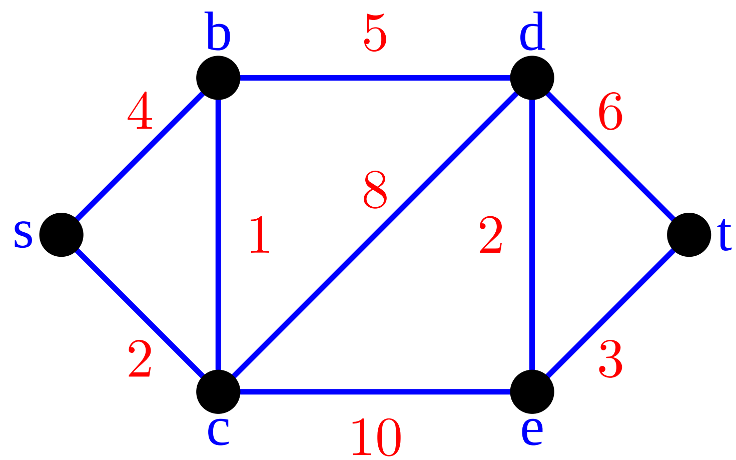
- Si $\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j} < \delta_j$, cambiamos (δ_j, P_j) por $(\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j}, v)$.
- Si $\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j} \geq \delta_j$, no hacemos nada.

(3) De entre todos los vértices temporales j examinados, elegimos aquél cuya δ_j sea mínima δ_{min}.

- Si $\delta_{\text{min}} = \infty$ el algoritmo termina: no hay camino entre s y t.
- Si $\delta_{\text{min}} < \infty$, marcamos dicho vértice con etiqueta permanente. (Esta estimación sólo puede empeorar porque $\omega_{ij} > 0$).

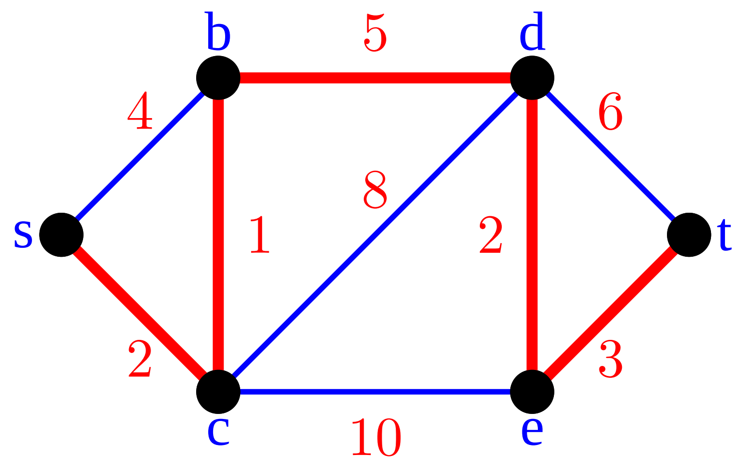
(4) Si el vértice marcado es t, el algoritmo termina: el camino más corto entre s y t se obtiene siguiendo las etiquetas permanentes.
Si no es t, volver al paso (2).

El algoritmo de Dijkstra: Ejemplo



Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(4, s)$	$(3, c)$	$\boxed{(3, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
c	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	$(10, c)$	$(8, b)$	$\boxed{(8, b)}$	$\star$	$\star$
e	∞	$(12, c)$	$(12, c)$	$(10, d)$	$\boxed{(10, d)}$	$\star$
t	∞	∞	∞	$(14, d)$	$(13, e)$	$\boxed{(13, e)}$

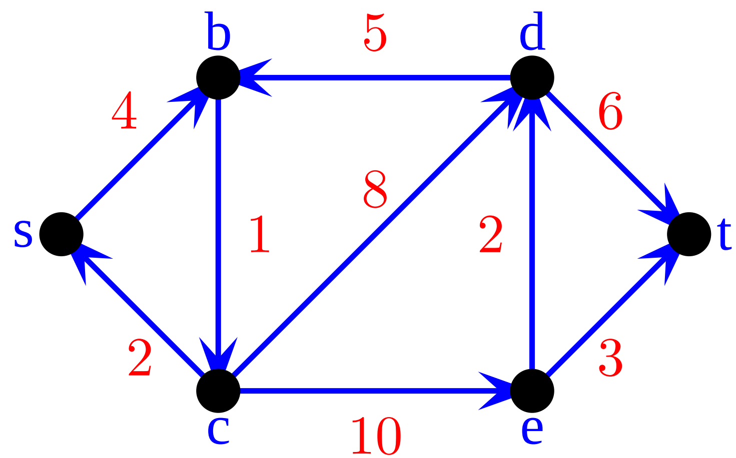
El algoritmo de Dijkstra: Ejemplo



Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(4, s)$	$(3, c)$	$\boxed{(3, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
c	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	$(10, c)$	$(8, b)$	$\boxed{(8, b)}$	$\star$	$\star$
e	∞	$(12, c)$	$(12, c)$	$(10, d)$	$\boxed{(10, d)}$	$\star$
t	∞	∞	∞	$(14, d)$	$(13, e)$	$\boxed{(13, e)}$

El algoritmo de Dijkstra: Ejemplo con grafos dirigidos

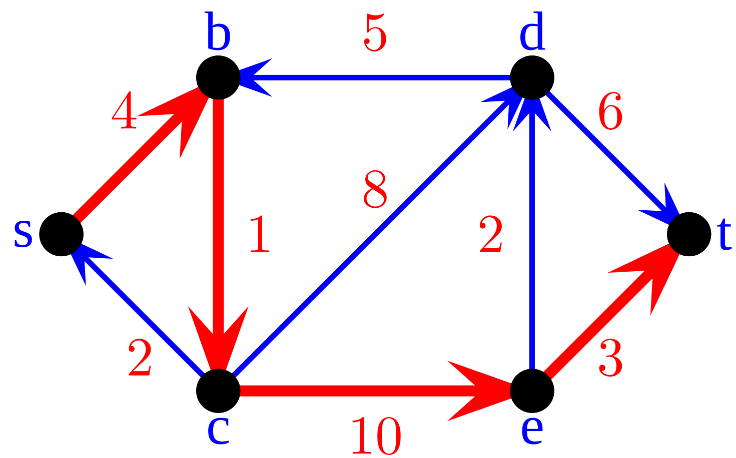
El algoritmo de Dijkstra permite, con las variaciones obvias, obtener el camino más corto en un grafo dirigido



Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(4, s)$	$\boxed{(4, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
c	∞	$(5, b)$	$\boxed{(5, b)}$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	∞	$(13, c)$	$\boxed{(13, c)}$	$\star$	$\star$
e	∞	∞	$(15, c)$	$(15, c)$	$\boxed{(15, c)}$	$\star$
t	∞	∞	∞	$(19, d)$	$(18, e)$	$\boxed{(18, e)}$

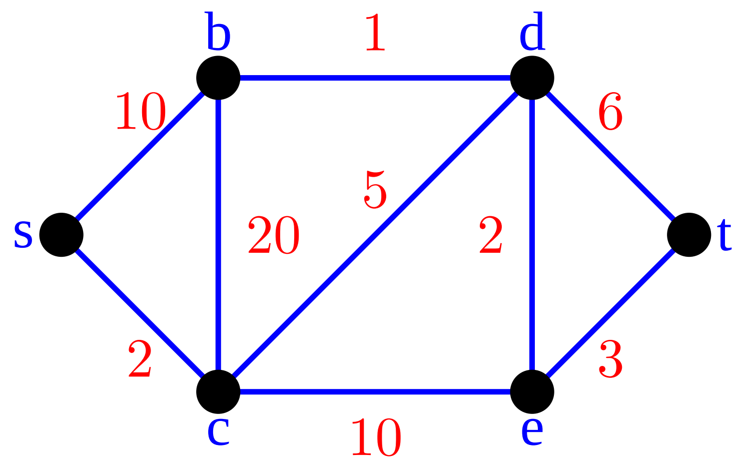
El algoritmo de Dijkstra: Ejemplo con grafos dirigidos

El algoritmo de Dijkstra permite, con las variaciones obvias, obtener el camino más corto en un grafo dirigido



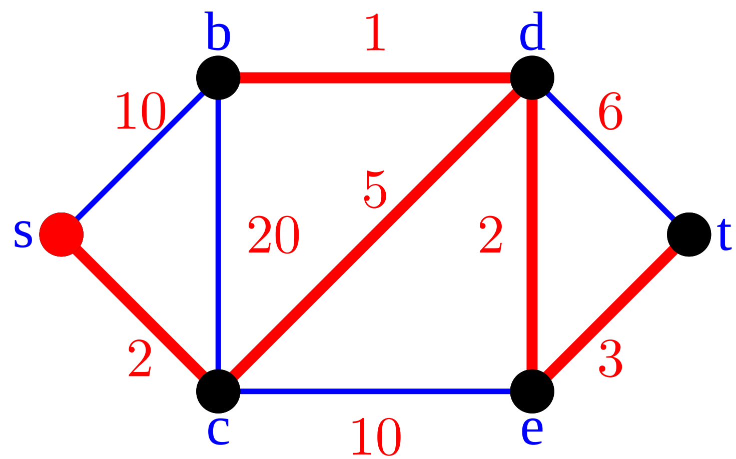
Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(4, s)$	$\boxed{(4, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
c	∞	$(5, b)$	$\boxed{(5, b)}$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	∞	$(13, c)$	$\boxed{(13, c)}$	$\star$	$\star$
e	∞	∞	$(15, c)$	$(15, c)$	$\boxed{(15, c)}$	$\star$
t	∞	∞	∞	$(19, d)$	$(18, e)$	$\boxed{(18, e)}$

Más ejemplos: distancia entre s y b



Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(10, s)$	$(10, s)$	$(8, d)$	$\boxed{(8, d)}$	$\star$	$\star$
c	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	$(7, c)$	$\boxed{(7, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
e	∞	$(12, c)$	$(9, d)$	$(9, d)$	$\boxed{(9, d)}$	$\star$
t	∞	∞	$(13, d)$	$(13, e)$	$(12, e)$	$\boxed{(12, e)}$

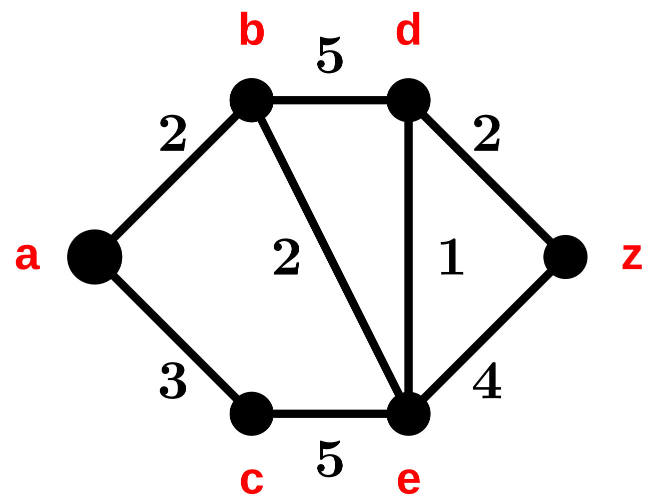
Más ejemplos: distancia entre s y b



Vértice	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
s	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
b	$(10, s)$	$(10, s)$	$(8, d)$	$\boxed{(8, d)}$	$\star$	$\star$
c	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
d	∞	$(7, c)$	$\boxed{(7, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
e	∞	$(12, c)$	$(9, d)$	$(9, d)$	$\boxed{(9, d)}$	$\star$
t	∞	∞	$(13, d)$	$(13, e)$	$(12, e)$	$\boxed{(12, e)}$

Problema 40

Hallar un camino de longitud mínima entre los vértices a y z del grafo siguiente. Hallar también las distancias $d(a,a)$, $d(a,z)$, $d(b,z)$ y $d(c,z)$.



Problemas

Problema 41

Utilizar el algoritmo de Dijkstra para determinar en el grafo ponderado siguiente un camino de longitud mínima entre los vértices Z y A.