atemática Discreta: Teoría de Grafos

Grado de Ingeniería

Asignatura de Matemática Discreta

UDIMA

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

grafos

generales

ción y definiciones básicas

s dirigidos

les. Árbol generador de peso mínimo (algoritmos de Kruskal y Prim)

anos, eulerianos y hamiltonianos

s planos. La fórmula de Euler. El teorema de Kuratowsky

s eulerianos (algoritmo de Fleury)

s hamiltonianos

rejamientos en grafos

nes y Caminos mínimos

raciones en grafos (algoritmo voraz)

nos de longitud mínima (algoritmo de Dijkstra)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

grafos

rácticas:

- os en informática.
- a de datos.
- e circuitos, redes de transporte, redes informáticas, etc.
- r una ruta que nos conduzca a los sitios más interesantes de París sin lles.
- r el vuelo Madrid–Tokio más barato o el más rápido o el que tenga nsbordos.
- n circuito con el menor número de puntos “débiles”.
- na red que maximice la salida de información.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

n

curso se encuentran en una clase 121 alumnos. Demostrar que siempre existe
e conoce a un número par de personas.

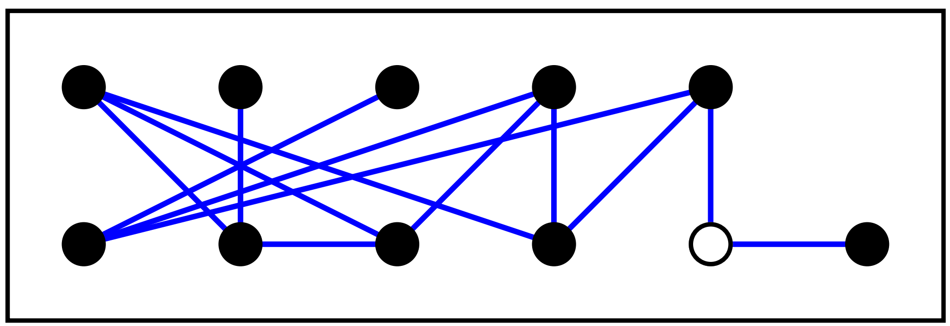
ir eficientemente el problema?

nto:

nos son puntos ●.

miento es mutuo y cero es par.

mnos se conocen trazo una línea entre los correspondientes puntos:



equivalente a probar que en un grafo con $2n + 1$ puntos, existe al menos

n número par de *líneas* que salen de él.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

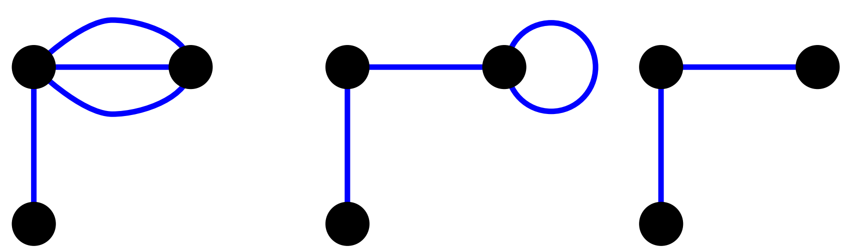
orientados: definición v1

ple $G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V *y un* **istas** E*, que es un conjunto de pares de elementos distintos de* V*.*

ne los vértices (también llamados nodos o puntos) $u, v \in V$, diremos que **centes o vecinos** y que la arista e es **incidente** con u y v.

$G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V*, un* **ristas** E *en el que se permite que haya* **aristas múltiples** *(que son aquellas el mismo par de vértices).*

le *(“loop”) es una arista que une un vértice consigo mismo. Un* **pseudografo** *es un grafo en el que se permiten aristas múltiples y bucles.*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

orientados: definición v2

afo $G = (V, E, \gamma)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V, *e* **aristas** E, *y una función* γ *que asigna a cada arista un par no ordenado de* *(γ codifica las conexiones entre los vértices).*

S ne los vértices $u, v \in V$, (es decir, si $\gamma(e) = \{u, v\}$) diremos que u y v s o vecinos y que la arista e es incidente con u y v.
S aristas distintas e_1, e_2 tales que $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$ diremos que el p ene aristas múltiples.

le $G = (V, E, \gamma)$ *es un pseudografo en el que no se permite que haya aristas* *cles.*
$G = (V, E, \gamma)$ *es un pseudografo en el que se permite que haya aristas* *no bucles.*

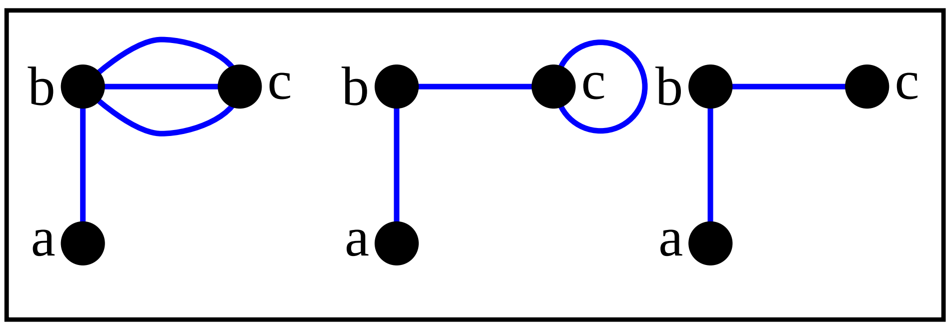
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...es

...aristas incidentes con un vértice v de un grafo G se denomina **grado** o **valencia** ...ota por $d(v)$.

...s contribuyen con dos unidades al grado del vértice correspondiente.

...e grado 1 se denominan **terminales**. Los vértices de grado 0 se denominan ... grafo sin aristas se denomina **trivial**.



(1)	d(a) = 1	d(b) = 4	d(c) = 3
(2)	d(a) = 1	d(b) = 2	d(c) = 3
(3)	d(a) = 1	d(b) = 2	d(c) = 1

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eoremas sencillos

a suma de los grados de los vértices de un grafo $G = (V, E)$ es dos veces el
stas. Es decir:

$$\sum_{i \in V} d(i) \;=\; 2|E|\,.$$

cierto para pseudografos y multigrafos.

En todo grafo G la suma de los grados de sus vértices es par.

El número de vértices de grado impar en un grafo G es par.

: Si V_{par} y V_{impar} son los subconjuntos de vértices con grado par e impar te, entonces el teorema anterior implica que

$$2|E| \;=\; \sum_{i \in V} d(i) \;=\; \sum_{i \in V_{\text{par}}} d(i) + \sum_{i \in V_{\text{impar}}} d(i)\,.$$

$\sum_{V_{\text{par}}} d(i)$ es par, luego $\sum_{i \in V_{\text{impar}}} d(i)$ debe ser par. Por lo tanto, el número de do impar debe ser par. $\square$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eoremas sencillos

En todo grafo G con número impar de vértices hay un número impar de vértices

: El teorema anterior implica que el número de vértices de grado impar
. Si el número total de vértices es también impar, entonces el número de
do par debe ser impar. □

e tipo de grafos habrá, por tanto, al menos un vértice de grado par.
ar precisamente esto al problema número uno que se había planteado.

gular *si todos sus vértices tienen el mismo grado.*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

rafos sencillos

npleto de n vértices K_n.

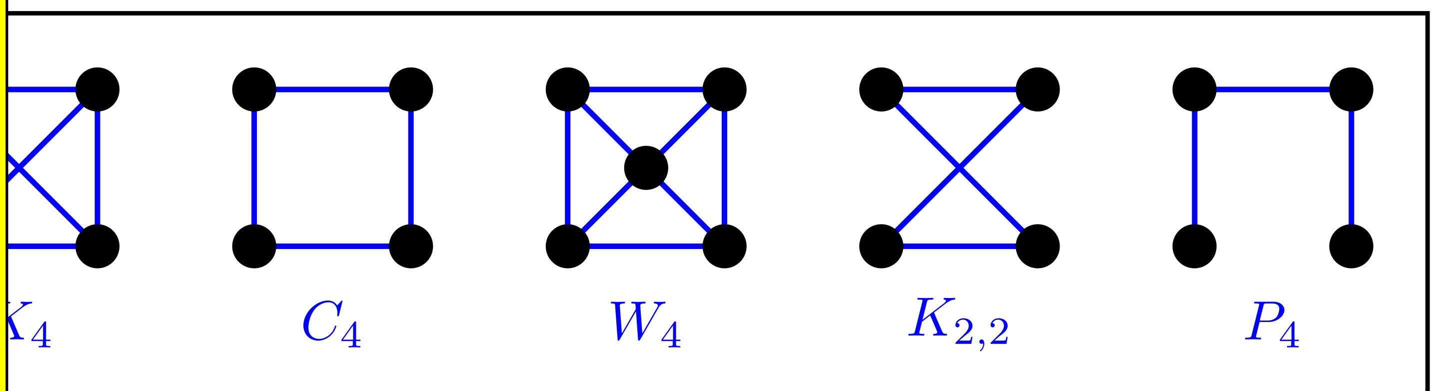
P_n y ciclo C_n de n vértices.

$n+1$ vértices W_n.

$=(V,E)$ *es* **bipartito** *si* V *se puede dividir en dos conjuntos no vacíos y* V_2*, de manera que cada arista* $e \in E$ *conecta un vértice de* V_1 *con otro de*

.

artito completo de n y m vértices $K_{n,m}$ si se une cada n con cada m.

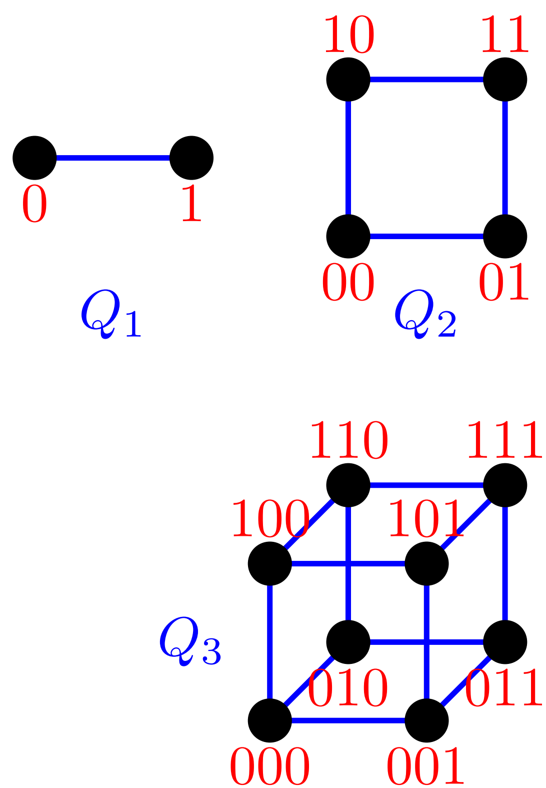


I derecha: completo, ciclo, rueda, completo bipartito y camino.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

rafos sencillos

cúbico) es aquel formado por vértices que representan las cadenas de bits de vértices son adyacentes si y sólo si difieren en exactamente un bit.



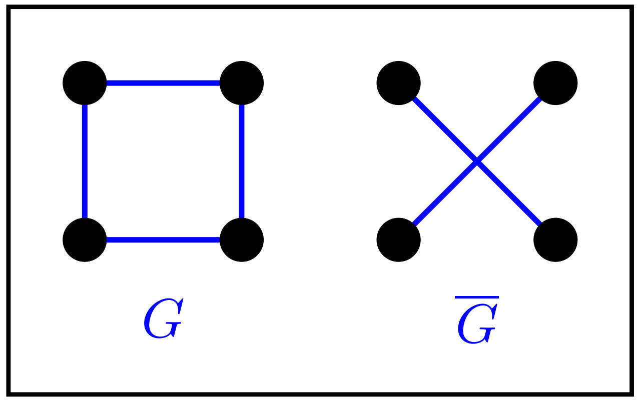
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mplementarios

plementario $\overline{G} = (V, \overline{E})$ de un grafo simple $G = (V, E)$ es aquel formado

conjunto de vértices y tal que dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no

s en G.



$$|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2}.$$

$+ |\overline{E}|$ son todas las aristas posibles entre cada pareja de vértices. Es

mos de dos en dos así que $|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mplementarios

si un grafo simple es autocomplementario $G = \overline{G}$, entonces su número de
últiplo de cuatro ó múltiplo de cuatro más uno.

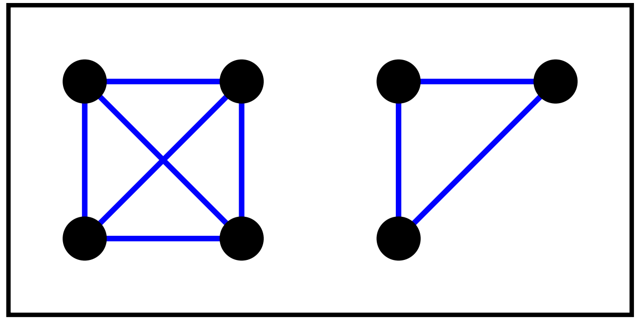
autocomplementario entonces $|E| = |\overline{E}|$. Así que si $|V| = n$ y tenemos
e

$$|E| + |\overline{E}| = \binom{|V|}{2},$$

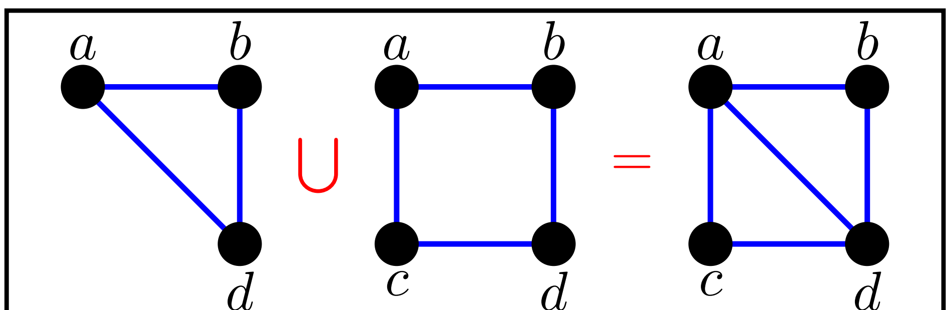
e
2 $+ 1)$ y $4|E| = n(n+1)$ que es múltiplo de 4 al ser cuatro veces algo.
S o de 4 se cumple la igualdad, si $(n+1)$ es múltiplo de $4+1$ también.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(W, F) *es un* **subgrafo** *de* $G = (V, E)$ *si* $W \subseteq V$ *y* $F \subseteq E$.



dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$ *es el grafo simple* $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

completo de n vértices.

$_1$, K_2, K_3, K_4 y K_5.

el grado de los vértices de K_n? Solución: $n+1$

aristas tiene K_n? Solución: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

afos complementarios de $K_{3,3}$, C_3, C_4 y C_5.

3 vértices.

vértices.

una arista y dos vértices.

.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...en todo grafo simple sin vértices aislados hay al menos dos vértices del mismo

...ser no trivial $d(i) \geq 1$, pues no tiene vértices aislados. Por ser grafo s... e conectar con todos excepto con él mismo así que $d(i) \leq |V| - 1$. El p... quivalente a $|V| - 1$ cajas y $|V|$ bolas. El principio del palomar garantiza q... n una caja hay 2 bolas, luego al menos 2 vértices tienen el mismos grado.

M... número de vértices de un grafo con 7 aristas si $d(i) \leq 3$ para todo $i \in V$.

S... emos que $|E| = 7$ y $d(i) \leq 3$ para todo vértice. Debe cumplirse que

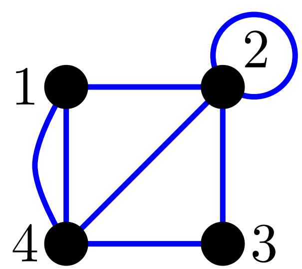
$$\sum_i d(i) = 2|E| = 14,$$

q... podemos escribir a lo más como $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

…ación numérica de un grafo

… $E)$ *un grafo. Consideremos una ordenación* $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ *de los vértices* … **…riz de adyacencia** *de* G *<u>asociada a dicha ordenación</u> es la matriz* $|V| \times |V|$ … *s* A_{ij} *cuentan el número de aristas que unen* v_i *con* v_j.



$$A_G = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

…nétrica.

…mple, $A_{ii} = 0$ y $A_{ij} \in \{0, 1\}$.

…n multigrafo, $A_{ii} = 0$.

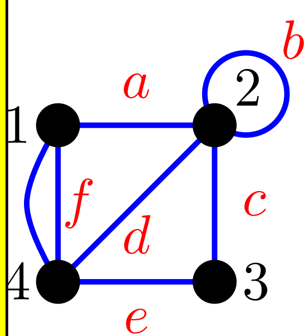
… distinta ordenación nos da una matriz distinta.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ación numérica de un grafo

$E)$ un grafo. Consideremos una ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ de los vértices
denación $e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}$ de las aristas de G. La **matriz de incidencia** de G
has ordenaciones es la matriz $|V| \times |E|$ con entradas

$$I_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } e_j \text{ no es incidente con } v_i \\ 1 & \text{si } e_j \text{ es incidente con } v_i \end{cases}$$



$$I_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

nos

o confundir un grafo con su representación gráfica.

nples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** *si y sólo si existe una va $f: V_1 \to V_2$ con la siguiente propiedad: a y b son adyacentes en G_1 si y $f(b)$ son adyacentes en G_2. Dicha función f se denomina* **isomorfismo***.*

ición necesaria (pero no suficiente) para que dos grafos sean isomorfos $_1| = |V_2|$ y $|E_1| = |E_2|$.

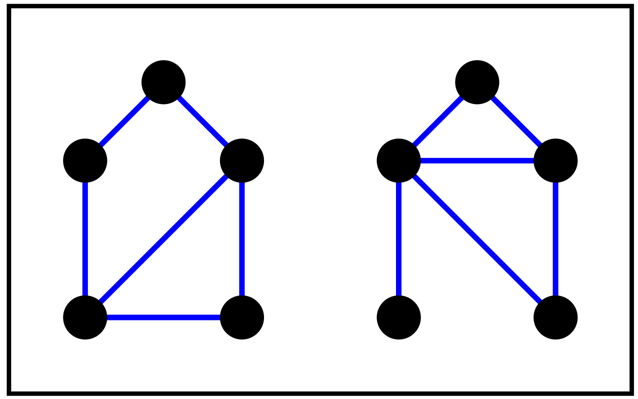
! funciones biyectivas entre dos grafos de n vértices.

s son isomorfos si existen ordenaciones de sus vértices tales que sus de adyacencia sean iguales.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...nos

...norfos los siguientes grafos:



S... o son, pues el segundo tiene un vértice de grado 4, cosa que el primero n...

...omorfismos, todos los grafos simples de cinco vértices y cinco aristas.

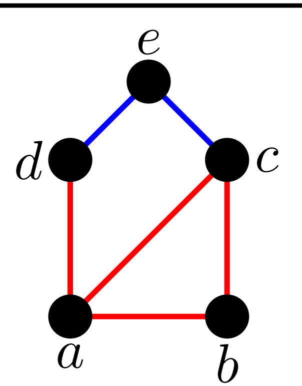
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

en un grafo

cadena) *en un grafo* $G = (V, E)$ *es una secuencia alternada de vértices y* *orma* $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, \{v_{\ell-1}, v_\ell\}, v_\ell$. *La* **longitud** *igual al número de aristas* ℓ *que lo componen. Existe una dirección implícita en* v_0 *es el* **vértice inicial** *y* v_ℓ*, el* **vértice final***.*

fo simple, un camino se puede representar por los vértices que lo n: $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_\ell$.

mino se pueden repetir aristas/vértices.



$\text{Camino} = (d, a, b, c, a, b)$

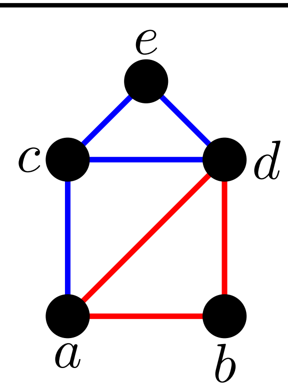
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

en un grafo

el que todas las aristas son distintas se denomina **camino simple**. *Un* **circuito** *simple cerrado ($v_0 = v_\ell$). (se pueden repetir vértices)*

mple en el que todos los vértices $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ son distintos (excepto quizás v_0 y v_ℓ) se denomina **camino elemental**. *Un camino elemental cerrado es un*

mino simple se pueden repetir vértices.



Circuito $= (c, d, a, b, d, e, c)$

Camino elemental $= (a, c, e, d)$

Ciclo $= (a, b, d, a)$

$, c, b, g, g\}$ es circuito pero no ciclo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

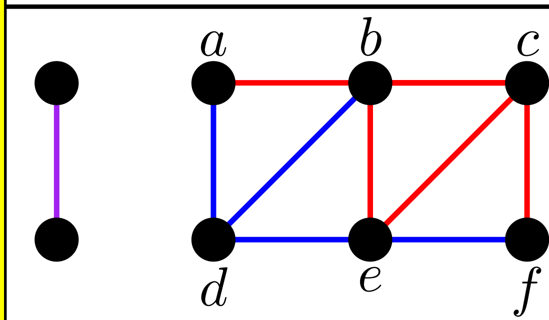
nexos

nexo *si cada par de vértices* $v, w \in V$ *pueden ser conectados por un* *camino*
n grafo no conexo está formado por la unión de varios subgrafos conexos y
s entre sí que se denominan **componentes conexas** *del grafo.*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

értices de un grafo se pueden conectar por un camino, entonces existe un
ntal que los une.

: De todos los caminos que unen dichos extremos a y b tomamos uno de
l $a = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_{\ell-1} \to v_\ell = b$. Éste debe ser un camino
o lo fuese, debería tener al menos dos vértices iguales $v_i = v_j$ con
El camino $a = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{j+1} \to \ldots v_{\ell-1} \to v_\ell = b$
ta a con b y tiene menor longitud que el primitivo, lo que contradice la
tanto, dicho camino de longitud mínima es elemental. $\square$

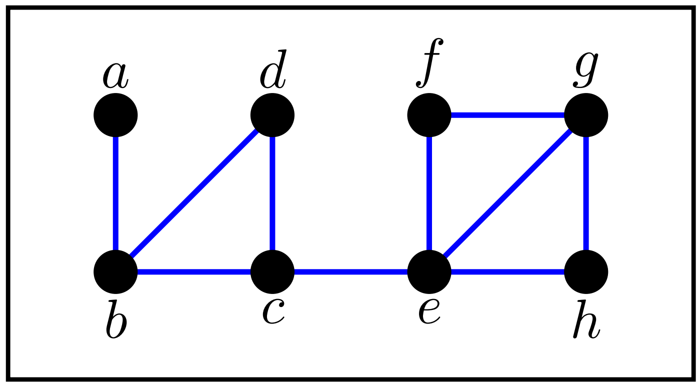


$\text{Camino} = (a, b, c, e, b, c, f)$

nexos

articulación o de corte *de un grafo* G *es un vértice tal que si lo eliminamos* *as las aristas que le son incidentes) obtenemos un subgrafo con más compo-* *s que* G. *Un* **puente** *de un grafo* G *es una arista tal que si la eliminamos (pero* *con los que es incidente) obtenemos un grafo con más componentes conexas*

lo:



articulación: b, c, y e.

las aristas $\{a, b\}$ y $\{c, e\}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

le caminos entre dos vértices

Sea un grafo G con matriz de adyacencia A con respecto al orden
$v_{|V|}\}$. El número de caminos orientados diferentes de longitud $n \geq 1$ que
v_i y acaban en v_j está dado por la entrada (i,j) de la matriz A^n.

Sea G un grafo simple con matriz de adyacencia A, entonces

(i) para todo $1 \leq i \leq |V|$.

$2|E|$.

$6 \times$ Número de triángulos no orientados en G.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tr} A^2 &= 2|E| = 10 \\ \operatorname{tr} A^3 &= 6|T| = 12 \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

…e caminos entre dos vértices

…fo no es simple (multigrafo o pseudografo) el Corolario anterior no …e.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 13 \neq 2|E| = \sum_{i \in V} d(i) = 10$$

$$= 3 \neq (A^2)_{11} = 5$$

$$= 4 \neq (A^2)_{22} = 3$$

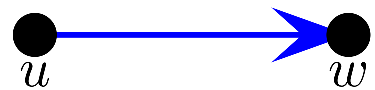
$$= \begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 9 & 9 & 9 \\ 12 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr} A^3 = 19 \neq 6|T| = 12$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

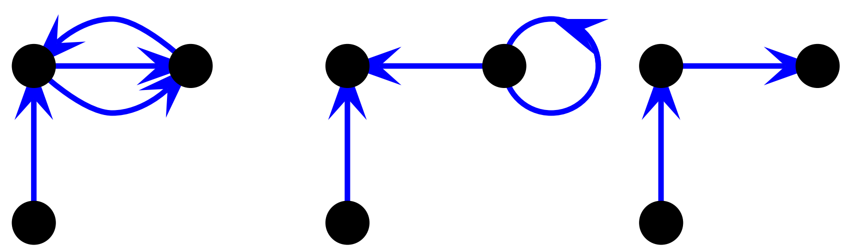
ientados o dirigidos

gido $G = (V, E)$ *está compuesto por un conjunto no vacío de* **vértices** V *y* e **aristas** *(o* **arcos***)* E*, que es un conjunto* *ordenado* *de pares de elementos*

S ntonces una arista $e \in E$ es el par ordenado (u, w), representado por



iciones de multigrafo y pseudografo dirigidos son análogas, no p la contradirección.

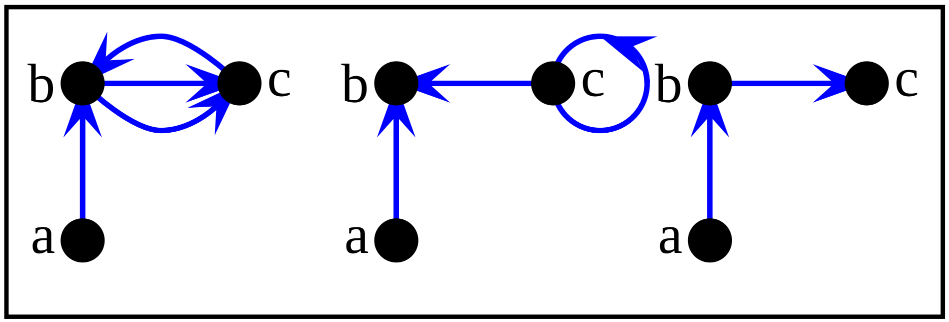


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

un grafo dirigido

rigido los vértices tienen dos tipos de grados:

emigrado) **interno** *de un vértice v de un grafo dirigido G es el número de gan a v. El* **grado (o semigrado) externo** *de un vértice v de un grafo dirigido o de aristas que salen de v.*



$0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 2, \quad d_e(b) = 2, \quad d_i(c) = 2, \quad d_e(c) = 1$

$0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 2, \quad d_e(b) = 0, \quad d_i(c) = 1, \quad d_e(c) = 2$

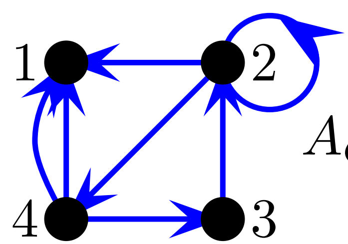
$0, \quad d_e(a) = 1, \quad d_i(b) = 1, \quad d_e(b) = 1, \quad d_i(c) = 1, \quad d_e(c) = 0$

29 *En un grafo dirigido $G = (V, E)$ la suma de los grados internos de los al a la suma de los grados externos.*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ación numérica de un grafo dirigido

*$E)$ un grafo dirigido. Consideremos una ordenación $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ de los . La **matriz de adyacencia** de G <u>asociada a dicha ordenación</u> es la matriz yas entradas A_{ij} cuentan el número de aristas que comienzan en v_i y acaban*



$$A_G = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

es simétrica en general.

mple, $A_{ii} = 0$ y $A_{ij} \in \{0, 1\}$.

n multigrafo, $A_{ii} = 0$.

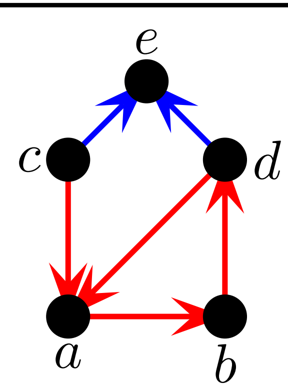
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

en un grafo dirigido

n un grafo dirigido $G = (V, E)$ es una sucesión de aristas de la forma $v_2), \ldots, (v_{\ell-1}, v_\ell)$.

ue todas las aristas del camino tienen la misma dirección.

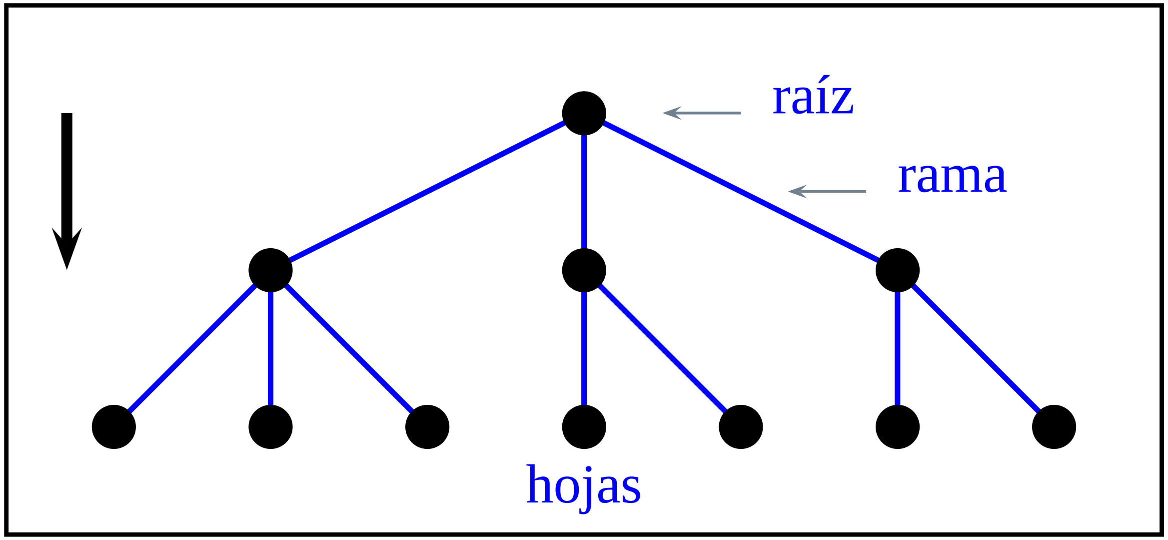
iciones de camino elemental, camino simple, circuito y ciclo para grafos son análogas.



Camino $= (c, a, b, d, a, b)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

n grafo simple y conexo que no contiene ciclos. Un **bosque** es un grafo simple ne ciclos. Cada componente conexa de un bosque es un árbol.*



nealógico.

directorios de un ordenador.

ama de una empresa.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(a) El grafo G es un árbol si y sólo si es conexo y al borrar cualquier arista se
un grafo disconexo.
G es un árbol si y sólo si no contiene ciclos y al añadir cualquier arista se crea

: Parte (a): $\Rightarrow$) Si G es un árbol entonces es conexo por definición.
ue al borrar la arista $e = \{u, v\}$ el grafo que obtenemos G' sigue siendo
G' contiene un camino elemental P que conecta u y v. Pero si ponemos
ta $e = \{u, v\}$, ésta junto con P forman un ciclo, lo que contradice la
e G sea un árbol.
ueda demostrar que G no contiene ningún ciclo. Supongamos por el
G contiene un ciclo C. Si borramos una arista de C, el grafo resultante
o conexo, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Sea G un grafo conexo tal que contenga un ciclo C. Entonces al borrar
de C el grafo resultante es conexo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...les de los árboles

...Un grafo $G = (V, E)$ es un árbol si y sólo si existe un único camino elemental ... ni aristas ni vértices) entre cualquier par de vértices.

...: $\Rightarrow$) Existe al menos un camino al ser G conexo. Si dicho camino no ...ntonces dos de esos caminos formarían un ciclo, lo que contradice que G s...

... vértices existe un único camino elemental que los une, luego G es ...ás si hubiese un ciclo que los conectase, existirían dos caminos e...tre dichos vértices, lo que contradice la hipótesis. □

...Todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos vértices de grado uno.

...: Tomamos un vértice cualquiera y seguimos un camino elemental hasta e...rá un vértice de grado 1. Como el grafo es finito, si ésto no ocurre, ...itar un vértice ya visitado; pero esto implicaría la existencia de un ciclo, ...ce que sea un árbol. Comenzamos ahora otro camino elemental a partir ... de grado 1. Por el mismo argumento deberíamos acabar en otro vértice ...

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

les de los árboles

ara hacer crecer un árbol:

con $G = (\{r\}, \emptyset)$, dónde r es el nodo raíz.

$= (V, E)$, añadir un nuevo vértice u y una nueva arista $\{u, v\}$ donde $v \in V$.

Todo grafo obtenido por este procedimiento es un árbol y todo árbol se puede ste modo.

: Sea G_n un grafo que se pueda obtener vía dicho procedimiento con n un árbol y supongamos que todos los grafos G_k con $k \leq n$ son árboles. n nuevo vértice v y una arista $\{v, u\}$, el nuevo grafo es también un árbol: que G_n lo es) y no tiene ciclos (ya que G_n no los tenía y $d(v) = 1$). s por inducción que todo grafo de n vértices se puede construir de esta un árbol. Supongamos que todos los árboles con $n - 1$ vértices se r por este procedimiento. Si G es un árbol con $n \geq 2$ vértices, entonces te v de grado 1 (Teorema 36). Si lo borramos obtenemos el subgrafo G' ices. G' es conexo (ya que G lo era y $d(v) = 1$) y no contiene ningún G' es un árbol. $\square$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

les de los árboles

Todo árbol de n vértices tiene $n-1$ aristas.

: El árbol con $n=1$ no tiene aristas. El Teorema 38 nos garantiza que ruir un árbol añadiendo un vértice y una arista en cada paso. Pero así no a diferencia entre $|E|$ y $|V|$. $\square$

Si G es un grafo de n vértices, entonces las siguientes afirmaciones son equi-

árbol.

nexo y tiene $n-1$ aristas.

$n-1$ aristas y no tiene ciclos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

les de los árboles

as parafinas $C_n\, H_{2n+2}$ tienen moléculas de tipo árbol.

carbonos (vértices) tiene cuatro enlaces (4 aristas adyacentes) y los
rtices) uno (una arista adyacente). Así que tendremos $4n$ grados para los
rados para los hidrógenos que no están en los extremos y queda 2 para
Así que

$$\sum_i d(i) = 4n + 2n + 2.$$

$$\sum_i d(i) = 2|E|,$$

que $|E| = 3n + 1$. Por otro lado, de la fórmula química deducimos que
$+ 2) = 3n + 2$ y comparando concluimos que $|E| + 1 = |V|$. Como el
o (sólo un molécula) y el número de aristas es sólo una menos que el
tices podemos afirmar que es árbol.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

s árboles (salvo isomorfismos) de cuatro y cinco vértices.

es tiene un bosque de 62 vértices y 51 aristas?

enunciado $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = 51$ y $V_1 + V_2 + \cdots + V_k = 62$. Como
e $V - 1$, así que
$+ 1 + \cdots + E_k + 1 = E_1 + E_2 + \cdots + E_k + k = 62.$
sta última expresión con la primera $51 + k = 62$, luego $k = 11$

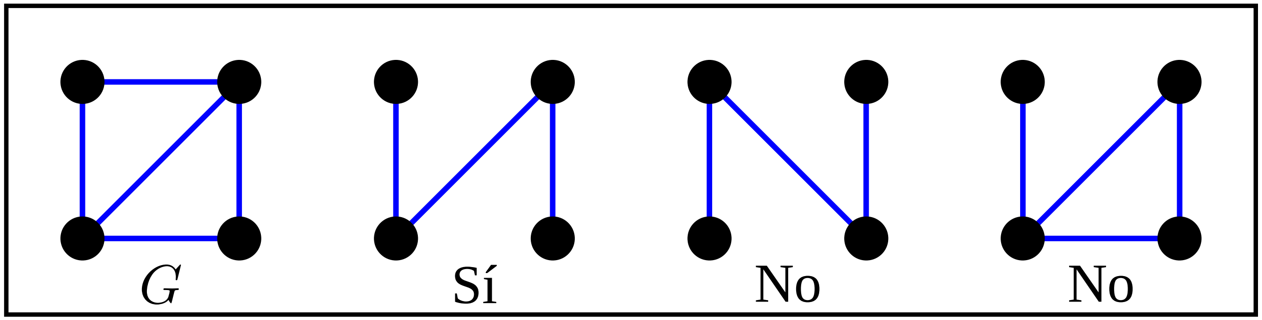
si en un árbol todos los vértices que no son hojas tienen grado tres, entonces el
úmero par de vértices.

ojas tiene grado 1 (impar) y los demás tiene grado 3 (impar). Todos los
grado impar. Y según un teorema ya visto el número de vértices de grado
n este caso) en un grafo G es par.

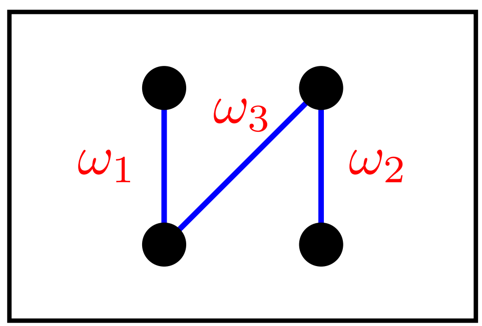
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eneradores

erador o recubridor *de un grafo* *conexo* G *es un árbol que contiene todos los* *y es subgrafo de* G*.*



derado $G = (V, E, \omega)$ *es un grafo en el que a cada arista* $e \in E$ *se le asocia* $\in \mathbb{R}$*.*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eneradores mínimos

erador mínimo *de un grafo conexo ponderado es un árbol generador tal que la esos de sus aristas es la más pequeña posible.*

línea telefónica (o un sistema de autopistas) entre una serie de ciudades sea mínimo y todas estén conectadas.

árboles con n vértices crece muy rápidamente con n.

voraz *es aquel que en cada paso toma la elección óptima.*

tima en cada paso intermedio no garantiza una solución óptima para todo in embargo, en el caso del árbol generador de peso mínimo los races) de Prim y Kruskal sí funcionan.
recubridor de peso mínimo no tiene por qué ser único.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...o de Prim, 1957

...lgoritmo de Prim)

(G: grafo ponderado conexo con n vértices)

...peso mínimo

...$- 2$

...peso mínimo incidente con un vértice de T

...o forme un ciclo si se le añade a T

...arista e añadida

...e puede no ser única.

...generador de peso mínimo puede no ser único

...do es un árbol con n vértices, luego tiene que tener $n-1$ aristas.

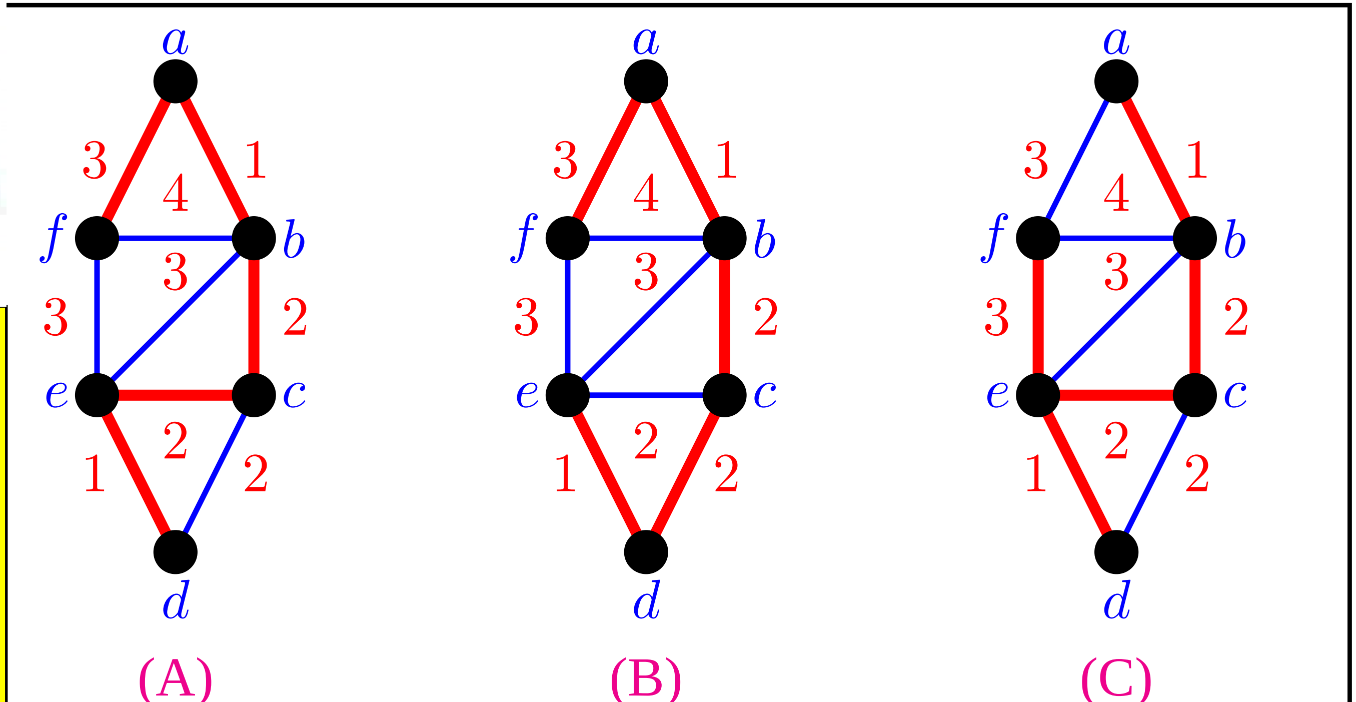
...ado un grafo conexo ponderado G, el algoritmo de Prim produce un árbol

...no de G.

...aso es necesaria la incidencia.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

de Prim



($\underline{\{e, c\}} \cup \{c, b\} \cup \{b, a\} \cup \underline{\{a, f\}}$

($\underline{\{d, c\}} \cup \{c, b\} \cup \{b, a\} \cup \underline{\{a, f\}}$

($\underline{\{b, c\}} \cup \{c, e\} \cup \{e, d\} \cup \underline{\{e, f\}}$

$$\boxed{\sum_{e \in E(T)} \omega(e) = 9}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

) de Kruskal, 1957

lgoritmo de Kruskal)

kal(G: grafo ponderado conexo con n vértices)

$- 1$

peso mínimo que no forme un ciclo si se le añade a T

arista e añadida

e puede no ser única.

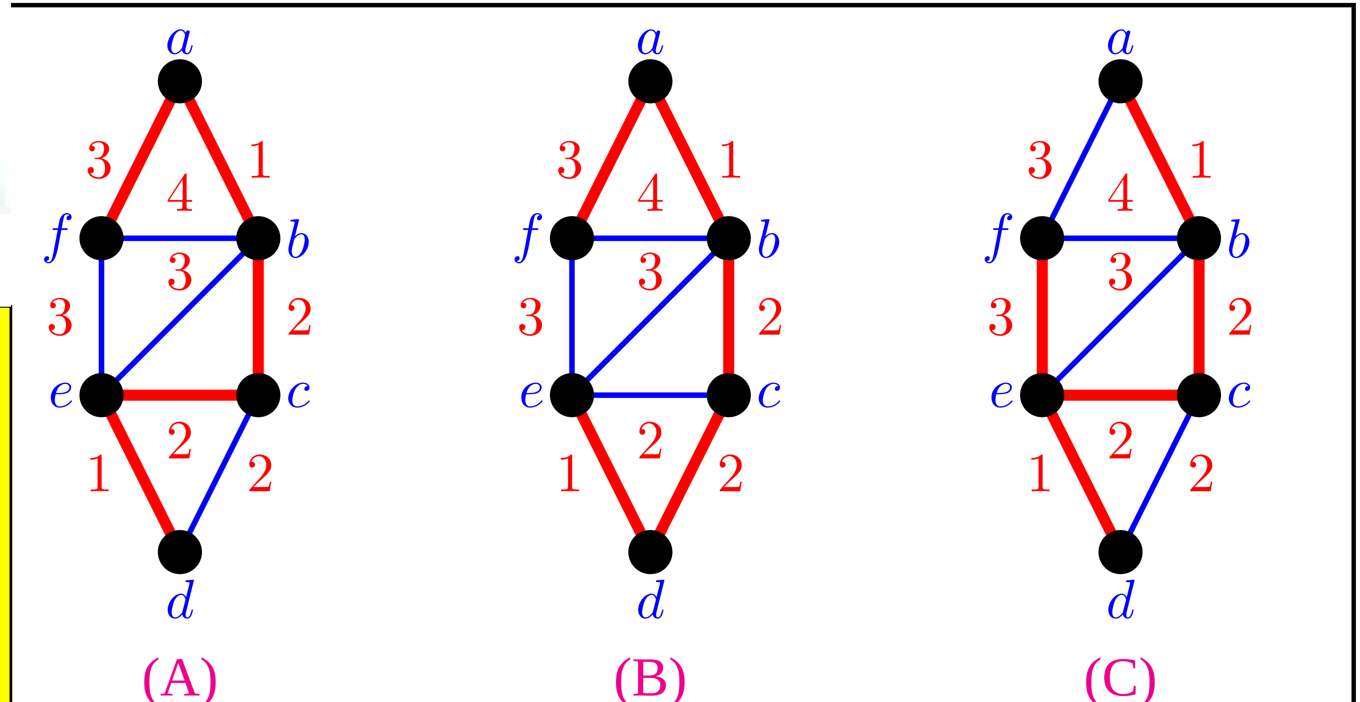
e puede no ser incidente con ningún vértice en T.

ado un grafo conexo ponderado G, el algoritmo de Kruskal produce un árbol
no de G.

aso la incidencia no es necesaria.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

… de Kruskal



(… $\{a,b\} \cup \{e,c\} \cup \{c,b\} \cup \{a,f\}$

(… $\{a,b\} \cup \{c,b\} \cup \{c,d\} \cup \{a,f\}$

(… $\{e,d\} \cup \{e,c\} \cup \{c,b\} \cup \{e,f\}$

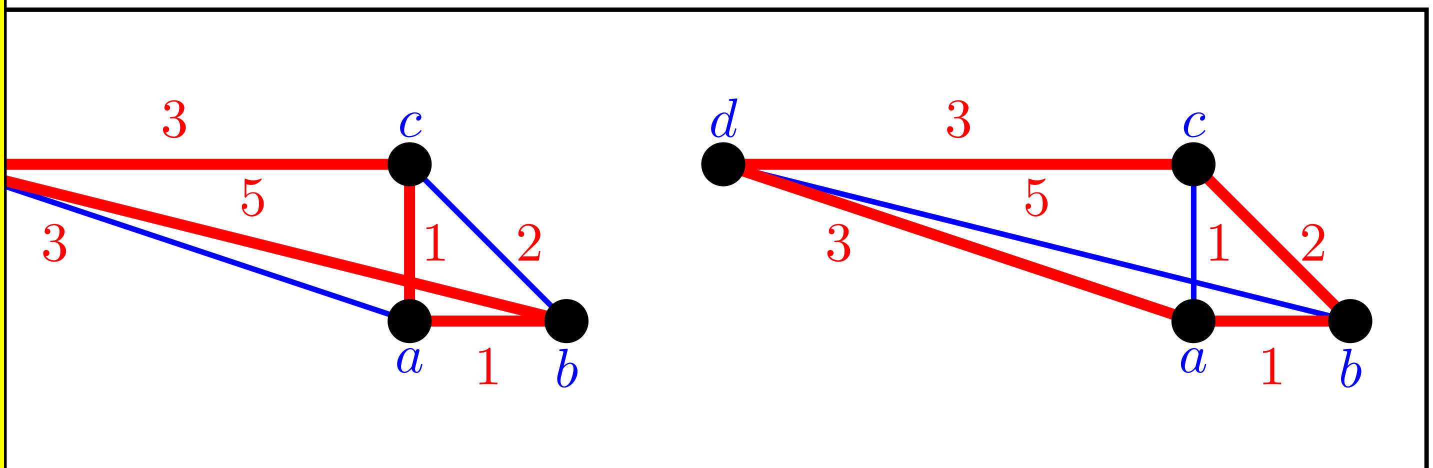
$$\boxed{\sum_{e \in E(T)} \omega(e) = 9}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...goritmos se pueden usar para obtener un árbol generador de un grafo ...o ponderado] $G = (V, E)$.

...itmos voraces pueden fallar en problemas parecidos.

...lo que pase por todos los vértices de un grafo y minimice la suma de los pesos ...rrespondientes.



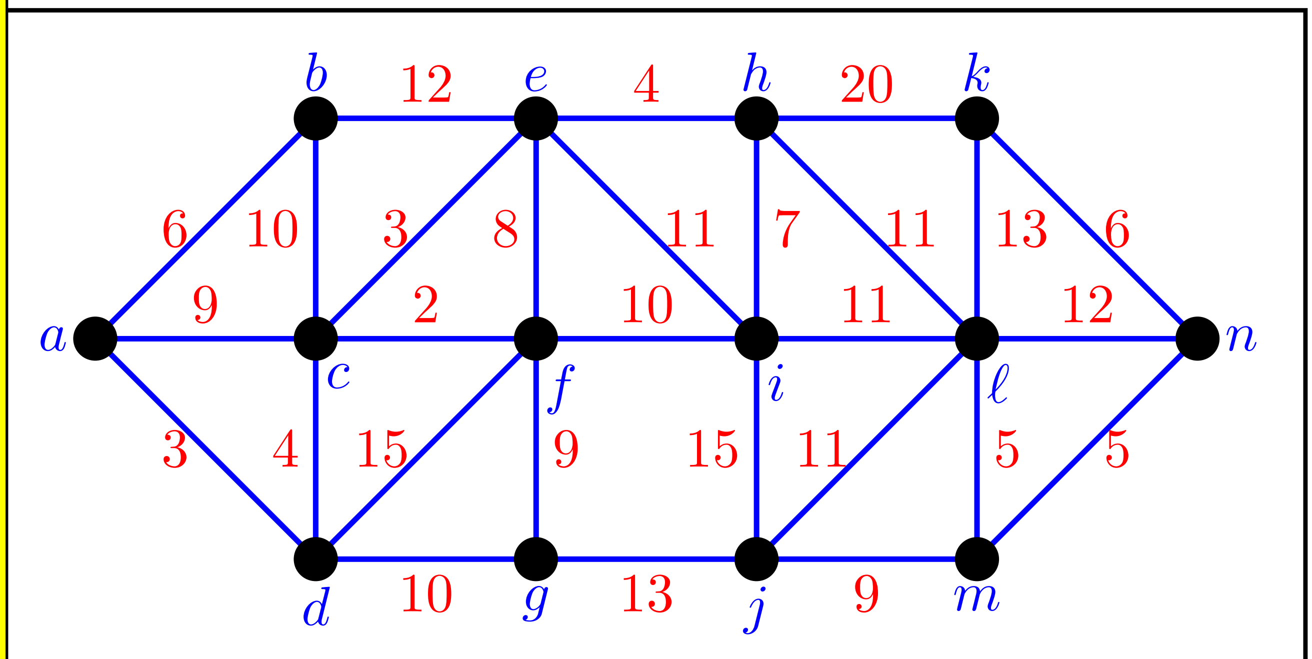
...o voraz: $\{a,b\} \cup \{a,c\} \cup \{c,d\} \cup \{d,a\} \Rightarrow \sum_e \omega(e) = 10$.

...imo: $\{a,b\} \cup \{b,c\} \cup \{c,d\} \cup \{d,a\} \Rightarrow \sum_e \omega(e) = 9$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Diseño de una red telefónica local

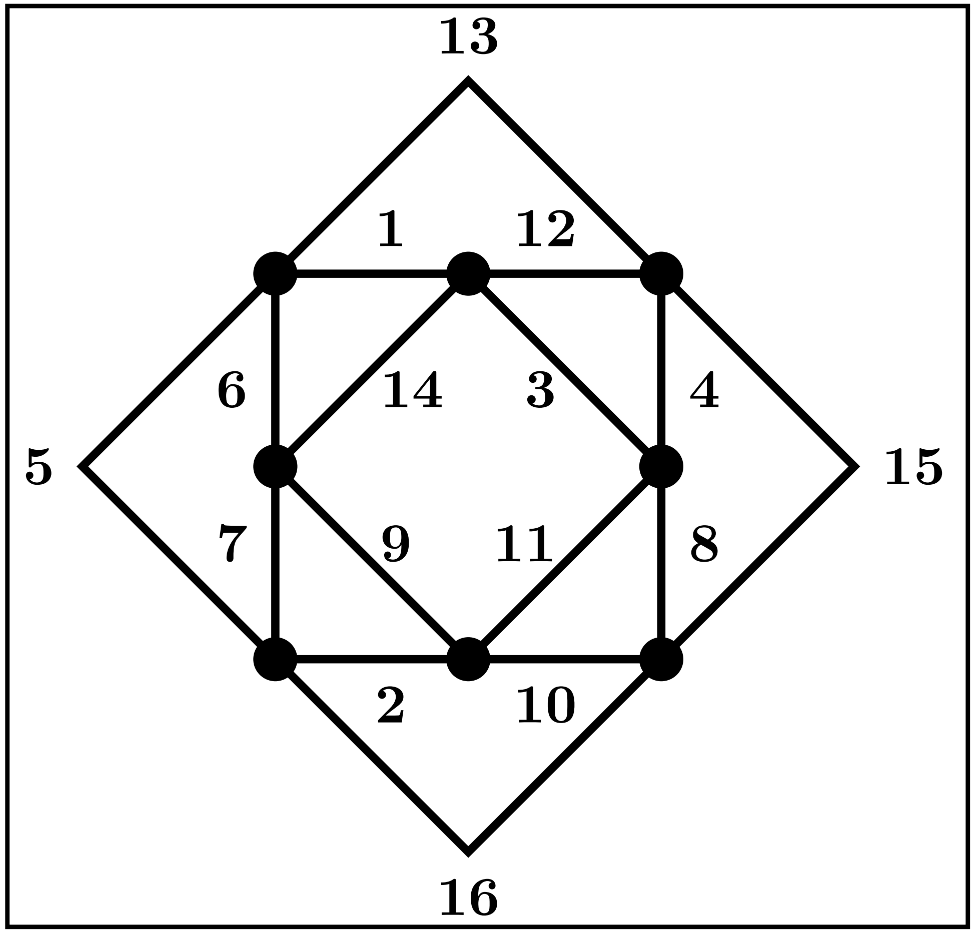
…a los puntos de conexión y las posibles líneas telefónicas en una urbanización. …á comunicada cuando dos puntos cualquiera estén conectados. En rojo está …o de cada línea en miles de euros. Calcular el diseño de la red más barata que



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

plos

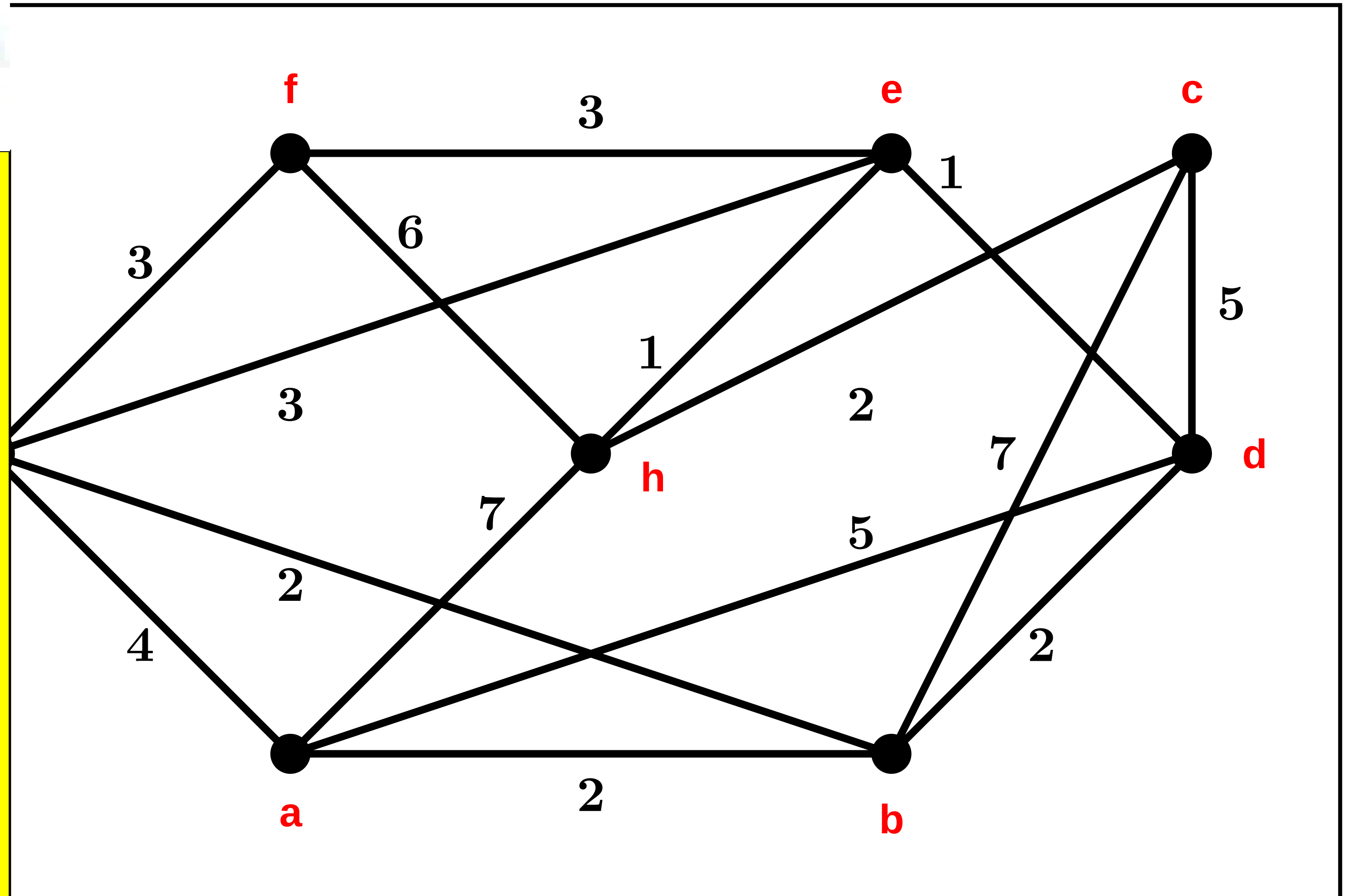
te el algoritmo de Kruskal un árbol generador mínimo del grafo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

plos

uiente grafo admite un árbol generador de peso menor o igual que 12:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

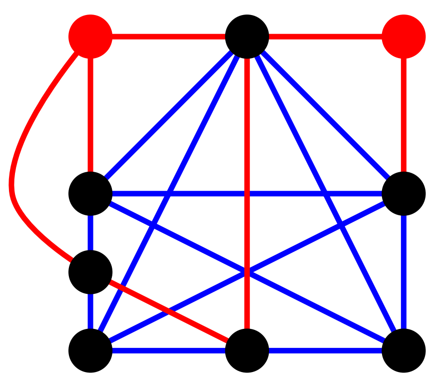
anares

lanar *si puede ser dibujado en el plano sin que sus aristas se crucen. Una* *n de un grafo planar en la que las aristas no se crucen se denomina* **grafo**

s planar; pero K_5 y $K_{3,3}$ no lo son.

Kuratowsky, 1930) *Un grafo es planar si y sólo si no contiene como subgrafo* *división de K_5 ni de $K_{3,3}$.*

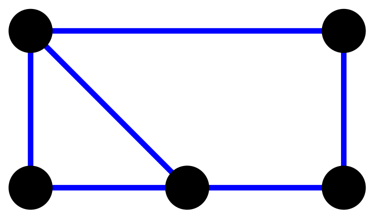
evo vértice en una arista de un grafo se denomina **subdividir** *dicha arista. La* *una o más aristas de un grafo G da lugar a una* **subdivisión** *de G.*



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

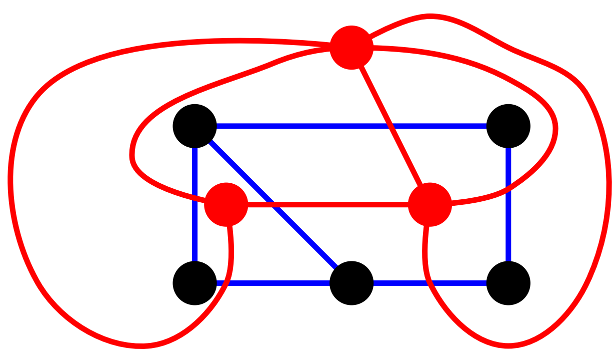
anares y grafos duales

Fórmula de Euler, 1752) *Un grafo* $G = (V, E)$ *plano y conexo divide al plano de manera que* $|V| - |E| + R \; = \; 2\,.$



$$R = 2 + |E| - |V| = 2 + 6 - 5 = 3$$

$G = (V, E)$ plano, podemos construir su **grafo dual** *$G^\star = (V^\star, E^\star)$ de la era: introducimos un vértice del grafo dual $r \in V^\star$ por cada región r en la que ano. Los vértices $r_1, r_2 \in V^\star$ tienen tantas aristas incidentes $e \in E^\star$ como rten las regiones r_1, r_2 definidas por el grafo G.*



$$\begin{aligned} |E^\star| &= |E| \\ |V^\star| &= R \\ R^\star &= |V| \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ales

na región r *de un grafo plano se define como el grado del vértice correspon-*
en el grafo dual.

En un grafo plano y conexo se cumple que

$$2|E| \;=\; \textit{Suma de los grados de las regiones}\,.$$

: Sabemos que $2|E| = \sum_{i\in V} d(i)$. Aplicamos esta fórmula al grafo dual
)

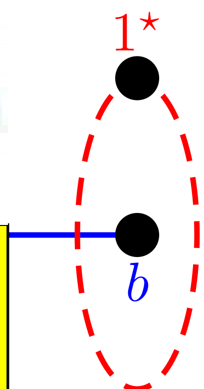
$$2|E^\star| \;=\; \sum_{i\in V^\star} d(i) \;=\; \sum_{r\in R} d(r)$$

$E^\star|$ el teorema está demostrado. $\square$

Teorema de los cuatro colores, v2) *Todo mapa (en una esfera) puede ser*
a lo sumo cuatro colores.

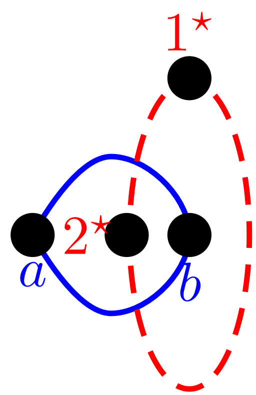
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

jemplos



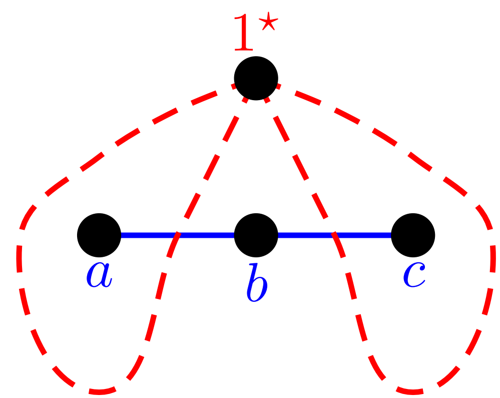
$R| = 1$

$(1^\star) = 2$



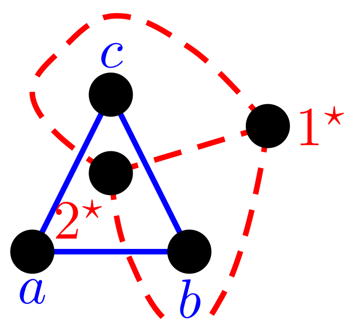
$|R| = 2$

$d(1^\star) = 2$



$|R| = 1$

$d(1^\star) = 4$



$|R| = 2$

$d(1^\star) = 3$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

orolarios

Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq$

: $2|E| = \sum_r d(r) \geq 3R$ (3 es el grado mínimo). Según Euler
$= 2$, así que $R = 2 - |V| + |E|$ que podemos multiplicar por 3
$= 6 - 3|V| + 3|E|$, que podemos sustituir en la primera ecuación
$\geq 6 - 3|V| + 3|E|$ y que simplificamos hasta $|E| =\leq |V| - 6$. $\square$

$_5$ no es planar. $|V| = 5; |E| = 10$. Luego, $10 = |E| > 3|V| - 6 = 9$.

Si G es un grafo simple, conexo y plano con $|V| \geq 3$ y no tiene ciclos de
onces $|E| \leq 2|V| - 4$.

para probar que $K_{3,3}$ no es planar.

$= 6$ por tanto se cumple que $|V| \geq 3$, no tiene ciclos y es conexo. Si
$| \leq 2|V| - 4$, como $|E| = 9$ vemos que $9 \leq 2 \cdot 4 = 8$, no es cierto, así
o es plano.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

orolarios

G_1 y G_2. G_1 es un grafo plano conexo de 10 vértices y que divide al plano en
es un grafo de 10 vértices todos ellos de grado mayor o igual que 3. ¿Son
G_2?

G_1 tenemos que $|V| - |E| + R = 2$, que en este caso es
$= 2$, así que $|E_{G1}| = 11$
os que $2|E| = \sum_i d(i)$, que en nuestros caso es $2|E| \geq 3 \cdot 10$, así que

sean isomorfos deben tener el mismo número de vértices y aristas como
en esta caso el número de aristas es incompatible entonces no son

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

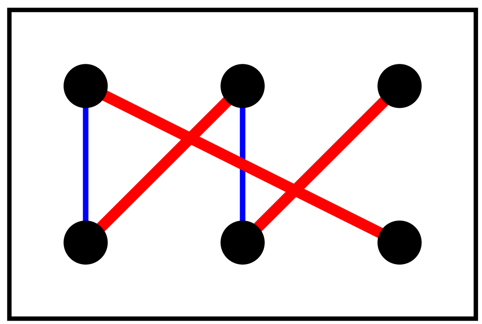
mientos en grafos

miento completo o perfecto *de un grafo con $2n$ vértices es un subgrafo gene-* *por n aristas disjuntas.*

vértices de G pertenecen al subgrafo.

tice de G sólo tiene una arista incidente perteneciente al subgrafo.

bipartitos es menos difícil:



tas maneras puedo teselar una cuadrícula con fichas de dominó?

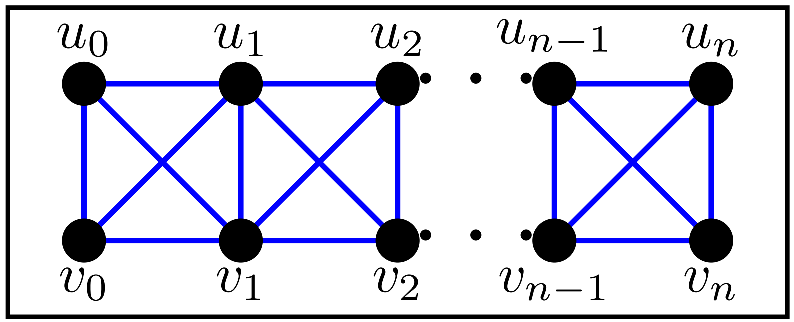
le que en una fiesta todos los participantes que se conozcan bailen amente?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mientos en grafos

Si todos los vértices de un grafo bipartito *tienen el mismo grado $d \geq 1$, en-*
e un emparejamiento perfecto.

con $2(n+1)$ vértices



ipartito? ¿Es planar?

l número de emparejamientos completos de G_n.

strar que satisface: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$ con $a_1 = 3$ y $a_2 = 5$.

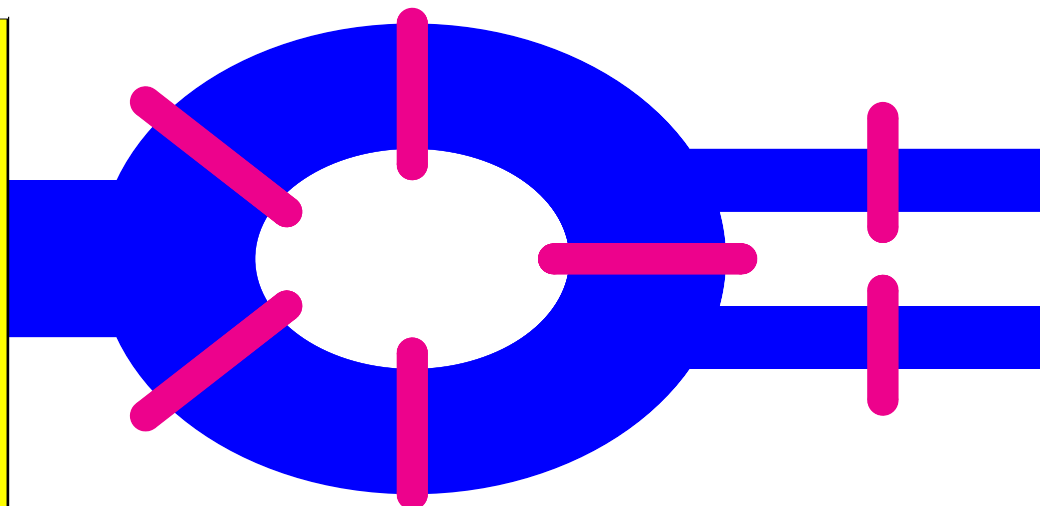
ver la recurrencia y probar que $a_n = \frac{1}{3}\left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right]$.

ara todo $n \geq 0$, se tiene que $3 \mid \left[2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right]$.

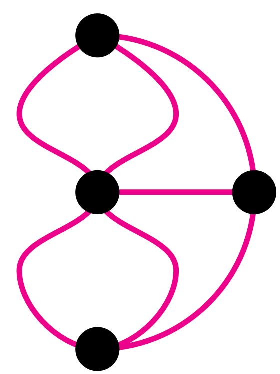
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

lerianos

Königsberg (Kaliningrado) hay un río y siete puentes. ¿Es posible dar una vuelta
ıente una sola vez?



presentación en término de grafos:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

lerianos

$\mathcal{G} = (V, E)$, *¿existe un* *circuito* *que contenga cada arista* $e \in E$*? [Al ser* *ntener cada arista una sola vez].*

leriano *es un circuito que contiene a todas las aristas del grafo. Un grafo que* *uito euleriano se denomina* **grafo euleriano***.*
leriano *es un camino simple y abierto que contiene todas las aristas del grafo.* *leriano que admite un camino euleriano se denomina* **grafo semi-euleriano***.*

Un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par. *xo es semi-euleriano si y sólo si contiene exactamente dos vértices de grado*

do conexo es euleriano si y solo si para cualquier vértice el grado interno coin- *do externo.*

lema de los puentes de Königsberg **no** tiene solución: el grafo e no es ni euleriano ni semi-euleriano.

es de n *son eulerianos los grafos* K_n*,* C_n *y* Q_n*?*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

o de Fleury

) un grafo conexo con todos los vértices de grado par:

ial: Escogemos un vértice v_0 como origen del circuito $C_0 = \{v_0\}$.

n del circuito: Sea el circuito $C_i = \{v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i\}$ donde $v_i \in V$

iste una <u>única</u> arista $e_{i+1} = \{v_i, w\} \in E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$:

$\to C_{i+1} = \{v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, w\}$

$\to V \setminus \{v_i\}$

$\to E \setminus \{e_{i+1}\}$

y varias aristas incidentes con v_i: elegimos cualquiera de ellas con la

ción que **no** sea **puente**. Si escogemos

$= \{v_i, w\} \in E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$:

$\to C_{i+1} = \{v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, w\}$

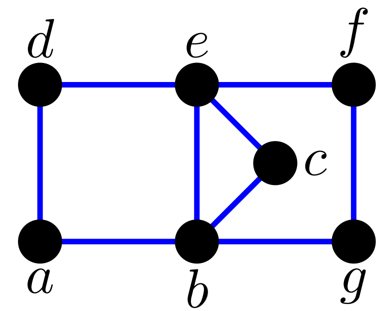
$\to E \setminus \{e_{i+1}\}$

s el Paso (2) hasta que $E = \emptyset$ ($|E|$ pasos).

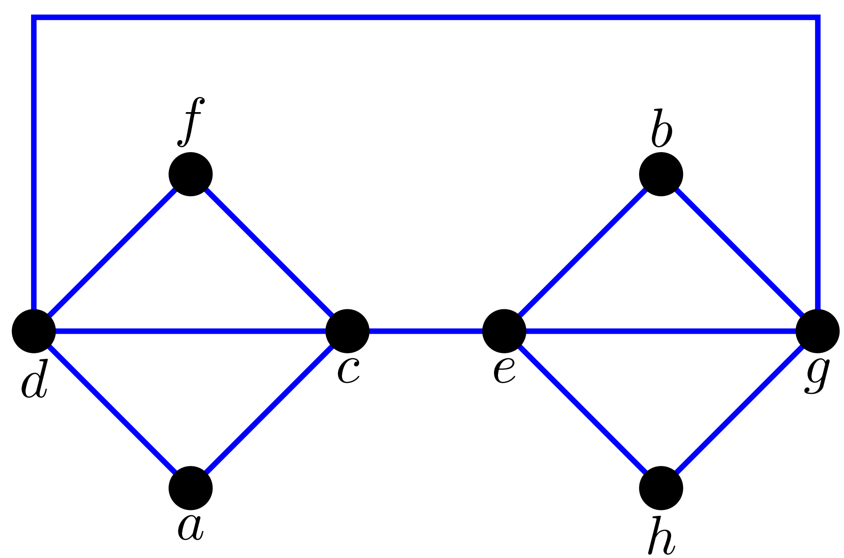
l circuito euleriano buscado.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

…cuito euleriano en el siguiente grafo:



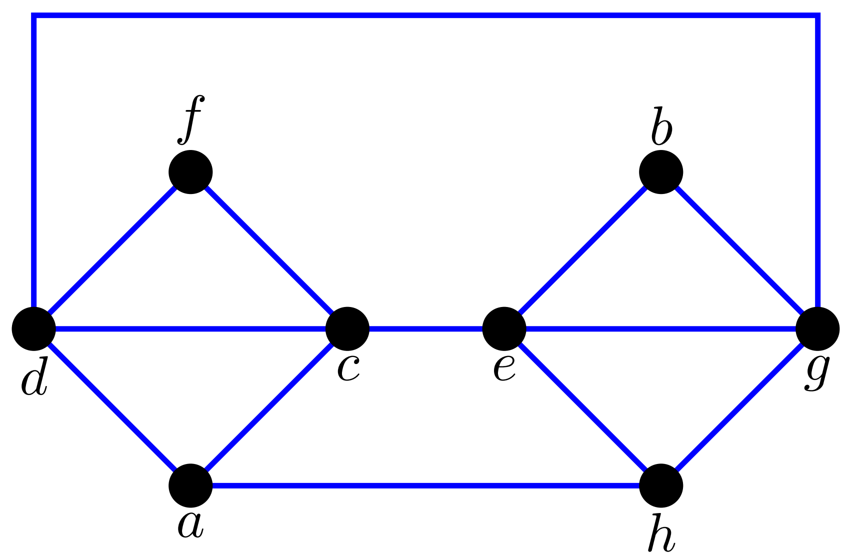
…cuito euleriano en el siguiente grafo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

ritmo para encontrar un camino euleriano.

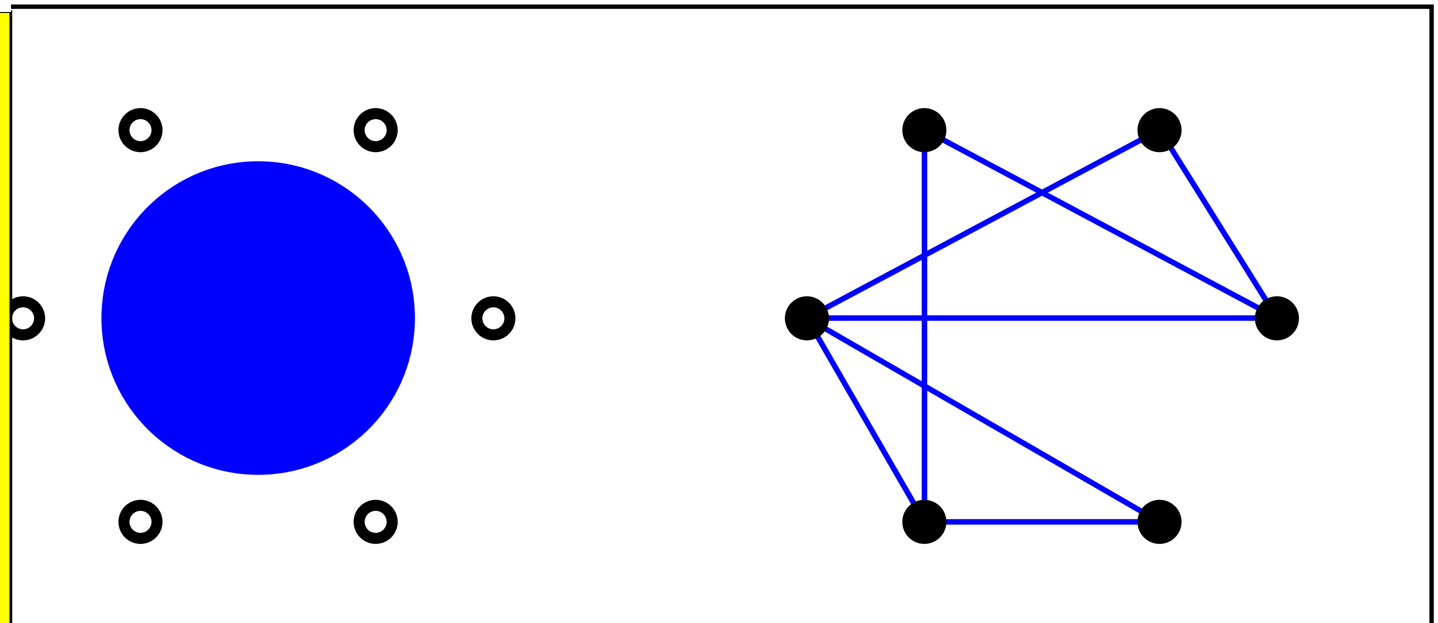
mino euleriano en el siguiente grafo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

miltonianos

tre diplomáticos hay que tener cuidado de sentar juntos a diplomáticos de países separados a diplomáticos de países enemigos. ¿Es posible hacer ésto con n



ontrar un ciclo en G tal que pase por cada vértice una sola vez?

oblemas son equivalentes a que su grafo sea hamiltoniano.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

miltonianos

…iltonianos **…iltoniano** *es un ciclo que contiene a todos los vértice del grafo. Un grafo que …o hamiltoniano se denomina* **grafo hamiltoniano**.

…amiltoniano *es un camino elemental y abierto que contiene todos los vértices … grafo no hamiltoniano que admite un camino hamiltoniano se denomina* **grafo …niano**.

…ema de decidir si un grafo G arbitrario tiene un ciclo hamiltoniano es …ícil que decidir si tiene un circuito euleriano. El problema no tiene …al, aunque existen condiciones suficientes del estilo siguiente:

…Dirac, 1950) *Si G es un grafo simple con n vértices y cada vértice tiene un … entonces G es hamiltoniano.*

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

miltonianos

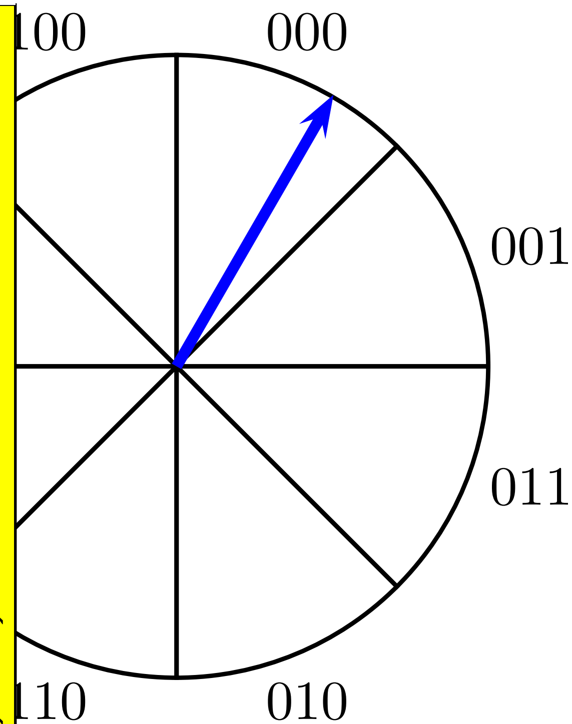
ar que K_n es hamiltoniano para todo $n \geq 3$.
de cada vértice es $d(i) = n - 1$. Según el teorema de Dirac si
$n/2$ es hamiltoniano, caso que se cumple cuando $n \geq 3$, pues $2 \geq 3/2$

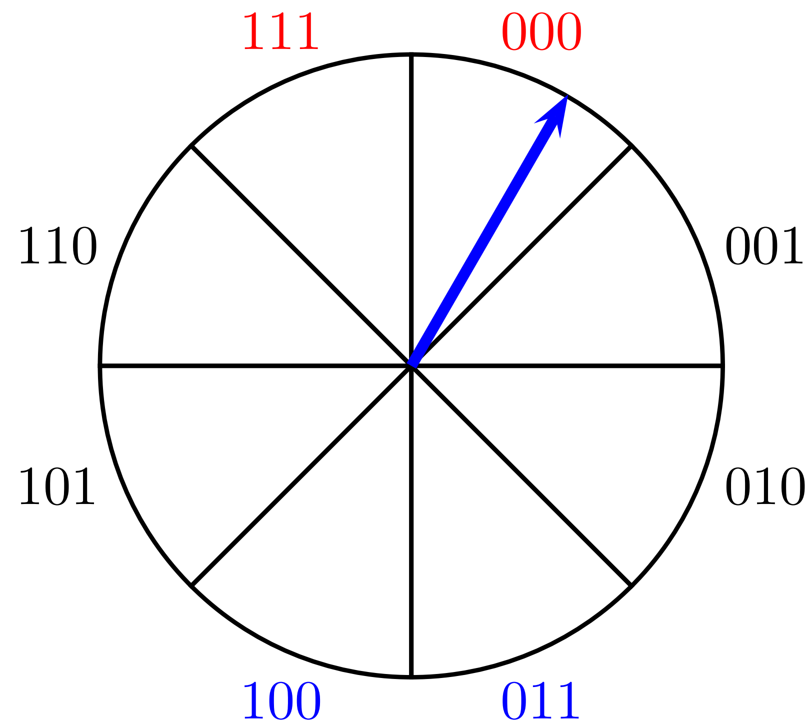
ar que $K_{n,m}$ es hamiltoniano si y sólo si $n = m \geq 2$.
os de los vértices son o bien n (el más pequeño) o bien m, así que
$+ n$. Según el teorema de Dirac y eligiendo el caso más conflictivo
, que se cumple si sólo si $n = m$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

n: códigos de Gray, 1940

ray de orden n *es una cadena cíclica formada por* 2^n *secuencias binarias de*
a propiedad de que cualquier par de secuencias adyacentes difieren únicamente





L e Gray permiten reducir el error al leer la posición angular de una aguja

e

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

na del viajante

e que cubrir n ciudades interconectadas todas entre sí. Su objetivo es salir de as todas una sola vez y volver a su casa al finalizar de manera que la distancia nima.

consiste en encontrar entre todos los ciclos hamiltonianos del grafo $= (V_n, E_n, \omega)$ uno C que minimice la función

$$E(C) = \sum_{e \in V(C)} \omega_e \,.$$

es muy difícil y no se conocen algoritmos *polinómicos* que lo resuelvan.

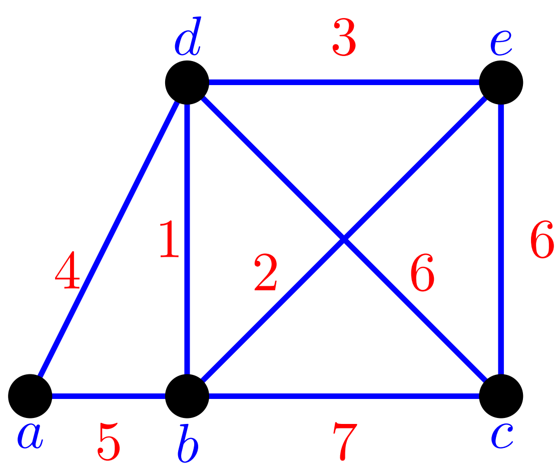
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

s

...el número de ciclos hamiltonianos no dirigidos que tiene K_n con $n \geq 3$ es

...rincipio hay $(n-1)$ a elegir, luego $(n-2)$ y así sucesivamente por lo ... $-2)(n-3)\cdots = (n-1)!$. Como no es dirigido estamos contando el ... l numero de ciclos es $1/2(n-1)!$

...boles generadores de menor y mayor peso en el siguiente grafo ponderado:



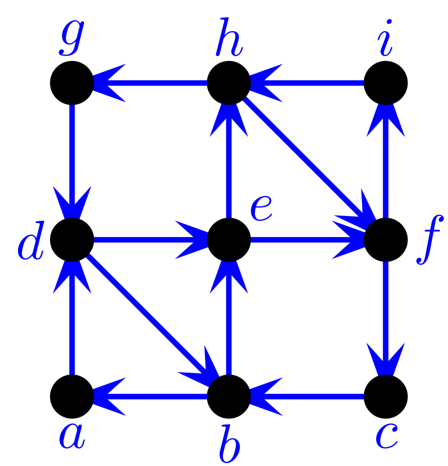
...ace por Kruskal, eligiendo la arista de mayor peso, luego la segunda de ... así sucesivamente.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...afo simple de n vértices y m aristas y tal que su matriz de adyacencia satisfaga
...$1)(2m+1)$?

...emos que $TrA^3 = 6T$, pero como $2(n+1)$ y $(2m+1)$ son impares su
p... par que no puede ser 6 veces algo, que es par.

...cuito euleriano en el siguiente grafo orientado:



S... posible circuito es $(a, e, f, i, h, f, c, b, e, h, g, d, b, a)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

nes propias de un grafo

Lattice'06 hay seis conferencias de una hora programadas para el día inaugural

$\}$. *Entre la audiencia hay quienes quieren escuchar los pares de conferencias*

$_4\}$, $\{c_3, c_5\}$, $\{c_2, c_6\}$, $\{c_4, c_5\}$, $\{c_5, c_6\}$ *y* $\{c_1, c_6\}$. *¿Cuántas horas son*

poder dar todas las conferencias sin solaparse?

n propia *(con q colores) de un grafo $G = (V, E)$ es una función $c: V \to$*

tal que $c(u) \neq c(w)$ siempre que u y w sean adyacentes.

grafo $G = (V, E)$ el número total de coloraciones (propias y no propias)

ores es $q^{|V|}$.

o que sigue consideraremos sólo **coloraciones propias**.

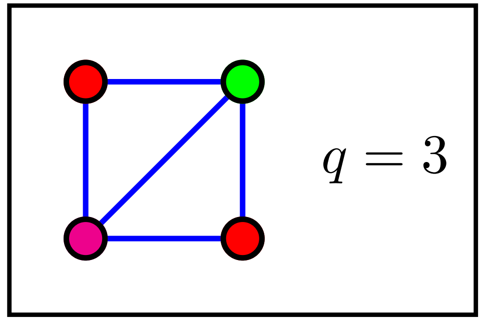
nición coloreamos los vértices de G. También se pueden

as aristas de G con la siguiente condición: si $e, f \in E$, $c(e) \neq c(f)$

ue e, f sean incidentes con el mismo vértice.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...nes propias de un grafo



... difíciles:

... coloraciones con q colores $P_G(q)$ se pueden conseguir sobre G?

... colores q necesito cómo mínimo para poder colorear G?

...**omático** $\chi(G)$ *de un grafo* G *es el menor entero* q *tal que existe una coloración* ...*lores; es decir,* $P_G(q) > 0$ *para todo* $q \geq \chi(G) \in \mathbb{N}$.

...o cromático del grafo anterior es $\chi(G) = 3$.

...goritmos *polinómicos* para calcular $P_G(q)$ ó $\chi(G)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

voraz para colorear un grafo

lgoritmo voraz)

rafo simple conexo con n vértices)

vértices de V: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$v_k) = q$ *, para todo v_k vecino de v_i con $k < i\}$*

más pequeño que no esté en S_i

amos $\chi(G)$, sino una cota superior (muy) dependiente de la ordenación

ular $\chi(G)$ habría que considerar las $n!$ ordenaciones posibles de los tiempo exponencial).

mo voraz al problema de la conferencia con las siguientes ordenaciones:

$c_4, c_5, c_6\}$ *y (b)* $\{c_1, c_2, c_6, c_4, c_5, c_3\}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

eoremas

ero de coloraciones con q colores que puedo obtener con el grafo K_n.

Si G es un grafo con grado máximo k, entonces $\chi(G) \leq k+1$.

Brooks, 1941) *Si G es un grafo no completo, conexo y con grado máximo es $\chi(G) \leq k$.*

ular con grado 3 y $\chi(K_4) = 4$.

regular con grado 2 y $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

72 *Un grafo G es bipartito si y sólo si $\chi(G) = 2$.*

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Todos los árboles son bipartitos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

a de los cuatro colores

Appel y Haken, 1976) $P_G(4) > 0$ *para todo grafo planar* G.

colores para colorear un mapa de tal modo que los países vecinos tengan
os.

cturado en 1852.

Kempe publicó una prueba errónea; pero encontró las ideas
ntales.

(1890) encontró el error en la prueba de Kempe y demostró el teorema
co colores.

a original fue *asistida* por ordenador (¡más de 1200 horas de CPU!).

aún una prueba analítica.

un teorema de los tres colores: existen grafos planares con número
o $\chi(G) = 4$: e.g. K_4.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

s de camino mínimo

nino de longitud mínima que une un vértice inicial s y un vértice final t en un $E)$ conexo, simple y ponderado con todos los pesos positivos ($\omega_i > 0$ para todo

goritmo de Dijkstra (1959).

algoritmo de Dijkstra encuentra la longitud del camino más corto entre dos rafo conexo, simple y ponderado con todos los pesos positivos.

El algoritmo de Dijkstra, aplicado sobre un grafo conexo, simple y ponderado sos positivos y con n vértices, realiza $O(n^2)$ operaciones (sumas y .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mo de Dijkstra

ón a cada vértice j se le asignan dos etiquetas que pueden ser o bien

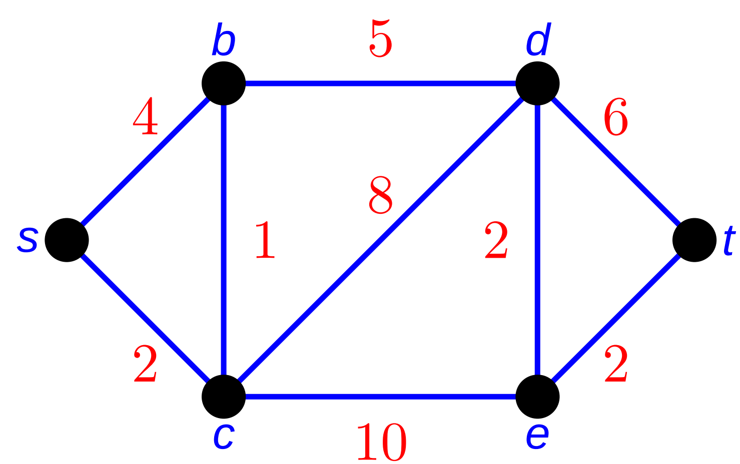
, $P_j)$ o bien permanentes $\boxed{(\delta_j, P_j)}$.

ta δ_j es una estimación de la longitud del camino mínimo desde el icial s hasta el vértice actual j.

ta P_j es una estimación del predecesor del vértice j en dicho camino.

$\omega_{ij} > 0$ al peso de la arista $\{i, j\} \in E$.

no de menor longitud entre s y t en el siguiente grafo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

…mo de Dijkstra (2)

…ial: Marcamos el origen s con la etiqueta permanente $\boxed{(0, s)}$.

…e los vértices $j \in V$ ($j \neq s$) se marcan temporalmente:

…$, s\} \in E$, se marca con $(\omega_{s,j}, s)$.

…$, s\} \notin E$, se marca con $(\infty, -)$.

…V el último vértice que se ha vuelto permanente. Examinamos cada …mporal j comparando δ_j con el valor de $\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j}$.

… $+ \omega_{v,j} < \delta_j$, cambiamos (δ_j, P_j) por $(\boxed{\delta_v} + \omega_{v,j}, v)$.

… $+ \omega_{v,j} \geq \delta_j$, no hacemos nada.

…todos los vértices temporales j examinados, elegimos aquél cuya δ_j sea …min.

…in $= \infty$ el algoritmo termina: no hay camino entre s y t.

…in $< \infty$, marcamos dicho vértice con etiqueta permanente.

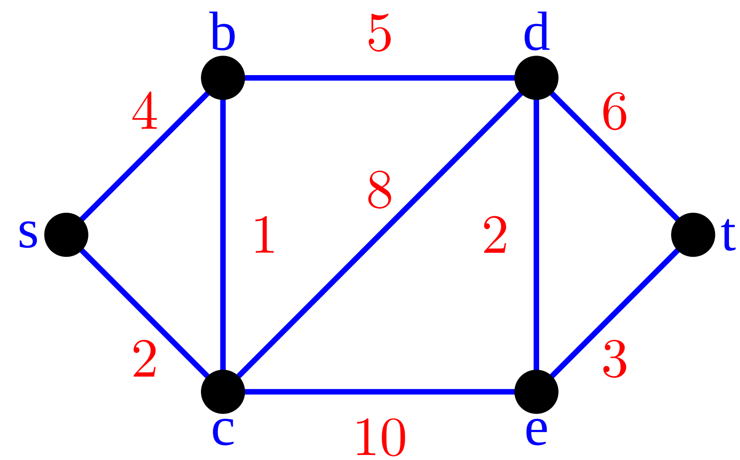
… estimación sólo puede empeorar porque $\omega_{ij} > 0$).

…ce marcado es t, el algoritmo termina: el camino más corto entre s y t se …guiendo las etiquetas permanentes.

…, volver al paso (2).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

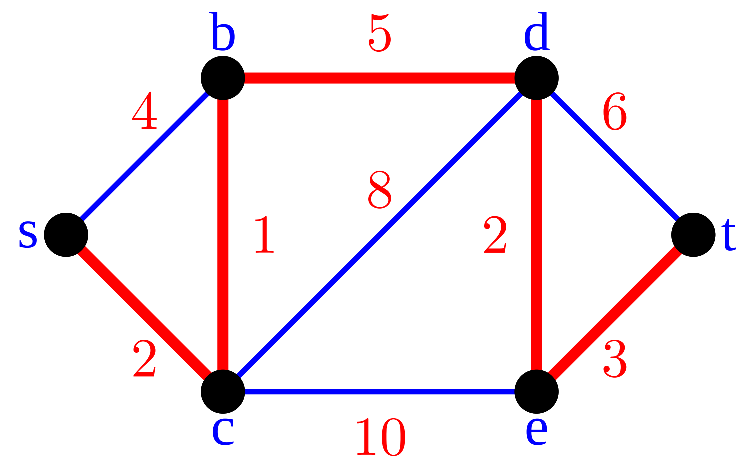
mo de Dijkstra: Ejemplo



e	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(4, s)$	$(3, c)$	$\boxed{(3, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(10, c)$	$(8, b)$	$\boxed{(8, b)}$	$\star$	$\star$
	∞	$(12, c)$	$(12, c)$	$(10, d)$	$\boxed{(10, d)}$	$\star$
	∞	∞	∞	$(14, d)$	$(13, e)$	$\boxed{(13, e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mo de Dijkstra: Ejemplo

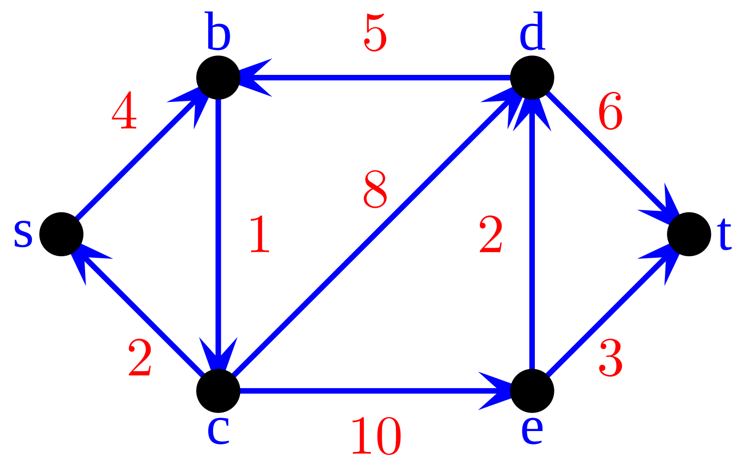


e	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(4, s)$	$(3, c)$	$\boxed{(3, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(10, c)$	$(8, b)$	$\boxed{(8, b)}$	$\star$	$\star$
	∞	$(12, c)$	$(12, c)$	$(10, d)$	$\boxed{(10, d)}$	$\star$
	∞	∞	∞	$(14, d)$	$(13, e)$	$\boxed{(13, e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

mo de Dijkstra: Ejemplo con grafos dirigidos

e Dijkstra permite, con las variaciones obvias, obtener el camino más
fo dirigido

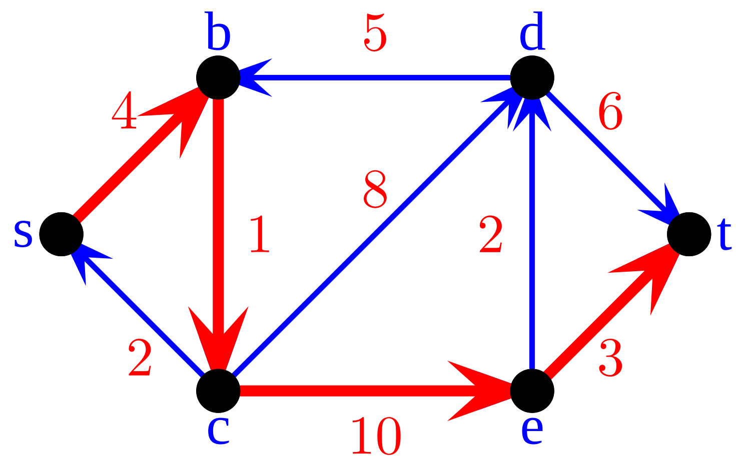


e	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(4, s)$	$\boxed{(4, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(5, b)$	$\boxed{(5, b)}$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	∞	$(13, c)$	$\boxed{(13, c)}$	$\star$	$\star$
	∞	∞	$(15, c)$	$(15, c)$	$\boxed{(15, c)}$	$\star$
	∞	∞	∞	$(19, d)$	$(18, e)$	$\boxed{(18, e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

...mo de Dijkstra: Ejemplo con grafos dirigidos

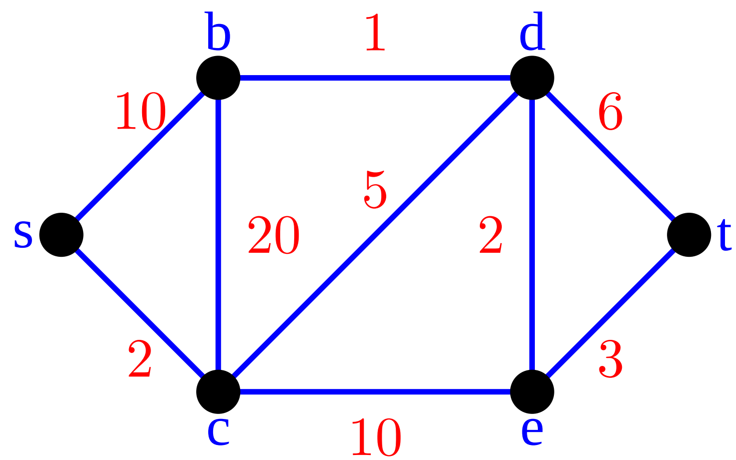
...e Dijkstra permite, con las variaciones obvias, obtener el camino más ...fo dirigido



...e	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
	$\boxed{(0,s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(4,s)$	$\boxed{(4,s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(5,b)$	$\boxed{(5,b)}$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	∞	$(13,c)$	$\boxed{(13,c)}$	$\star$	$\star$
	∞	∞	$(15,c)$	$(15,c)$	$\boxed{(15,c)}$	$\star$
	∞	∞	∞	$(19,d)$	$(18,e)$	$\boxed{(18,e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

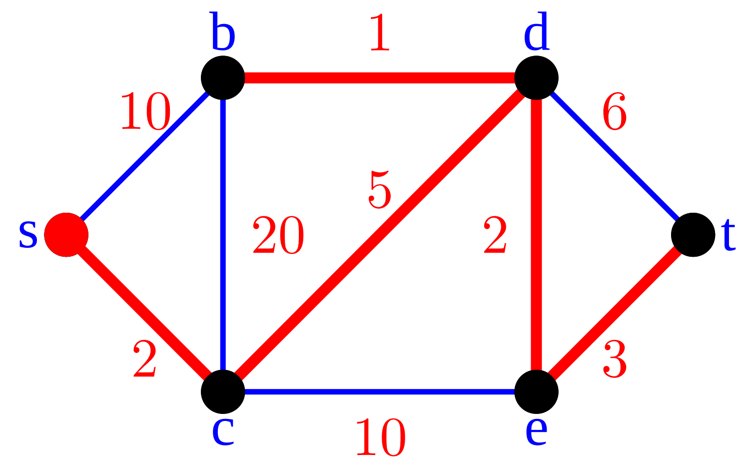
plos: distancia entre s y b



te	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
	$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	$(10, s)$	$(10, s)$	$(8, d)$	$\boxed{(8, d)}$	$\star$	$\star$
	$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(7, c)$	$\boxed{(7, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
	∞	$(12, c)$	$(9, d)$	$(9, d)$	$\boxed{(9, d)}$	$\star$
	∞	∞	$(13, d)$	$(13, e)$	$(12, e)$	$\boxed{(12, e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

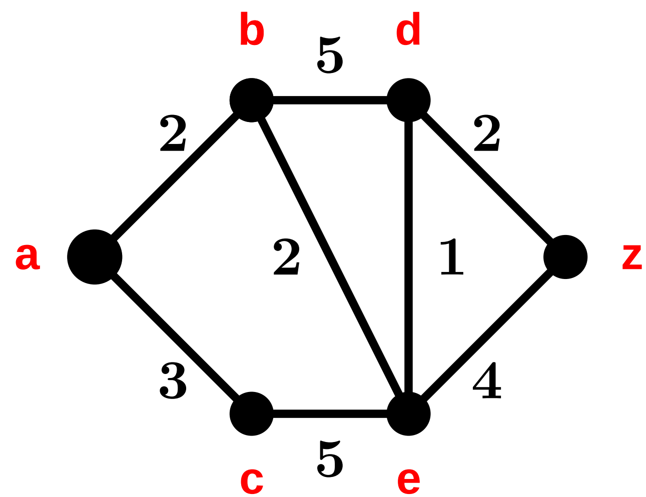
plos: distancia entre s y b



Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
$\boxed{(0, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$(10, s)$	$(10, s)$	$(8, d)$	$\boxed{(8, d)}$	$\star$	$\star$
$(2, s)$	$\boxed{(2, s)}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
∞	$(7, c)$	$\boxed{(7, c)}$	$\star$	$\star$	$\star$
∞	$(12, c)$	$(9, d)$	$(9, d)$	$\boxed{(9, d)}$	$\star$
∞	∞	$(13, d)$	$(13, e)$	$(12, e)$	$\boxed{(12, e)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

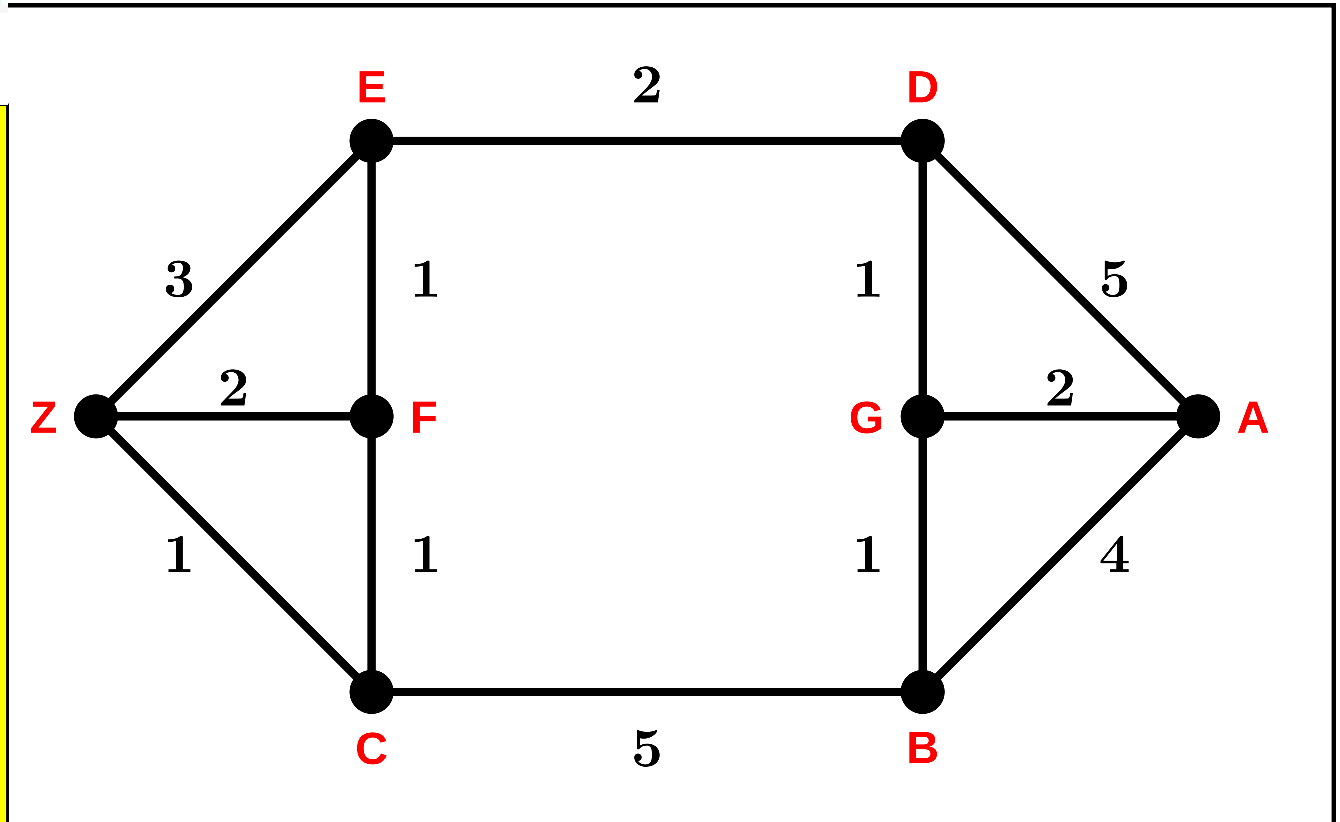
o de longitud mínima entre los vértices a y z del grafo siguiente. Hallar también (a, a), $d(a, z)$, $d(b, z)$ y $d(c, z)$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

s

...mo de Dijkstra para determinar en el grafo ponderado siguiente un camino de ... entre los vértices Z y A.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70