

1.- Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum b_k$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_k/b_k \rightarrow 0$.

a) Demostrar que si $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.

b) Demostrar que si $\sum a_k$ diverge, entonces $\sum b_k$ diverge.

c) Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum b_k$ puede converger o diverger.

d) Demostrar mediante un ejemplo que si $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum a_k$ puede converger o diverger.

2.- Demostrar que las series siguientes divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

3.- Determinar si las siguientes series convergen o divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4-k^3+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{\sqrt{k+1}}.$$

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum \frac{10^k}{k!}$

(b) $\sum \frac{1}{k 2^k}$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$

(d) $\sum \frac{n!}{100^n}$

(e) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$

(f) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$

(g) $\sum k \left(\frac{2}{3}\right)^k$

(h) $\sum \frac{1}{1+\sqrt{k}}$

(i) $\sum \frac{2k+\sqrt{k}}{k^3+2\sqrt{k}}$

(j) $\sum \frac{k!}{10^{4k}}$

(k) $\sum \frac{k^2}{e^k+1}$

(l) $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$

(m) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$

(n) $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\frac{1}{2}}}$

(ñ) $\sum \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$

(o) $\sum \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(p) $\sum \frac{45}{1+100^{-n}}$

(q) $\sum \frac{\log n}{n^2}$

(r) $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(s) $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(t) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

c) Usar el apartado anterior para demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

7.- Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

8.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

9.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

10.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n , $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n a_n$ es convergente.

11.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

The logo for 'Cartagena99' features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a slight shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The entire logo is set against a light blue and white background with a subtle arrow-like shape pointing to the right.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**