MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Curso 2020/2021

HOJA 3

1. La función de coste para cierta compañía que fabrica un producto es $C(x) = 50 + 2x$, y la de ingresos $R(x) = 2x^{3/2}$, siendo x la cantidad, expresada en miles de unidades, de productos manufacturados/vendidos. Encuentra, utilizando dos comandos diferentes de Matlab, la cantidad mínima que se ha de producir para empezar a tener beneficios.
Nota: representar ambas funciones puede ayudarte a elegir el valor inicial cuando necesites uno.

2. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:
i) $f(x) = x \cdot \cos(x)$ en $[-2\pi, 2\pi]$
ii) $g(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24$, y dibuja la recta tangente a la misma en $x = 1.5$
iii) $h(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $\left[\frac{\pi}{80}, \frac{\pi}{30}\right]$
iv) $j(x) = \dfrac{x^2}{3x^2 - 5}$
v) $k(x) = x^3 - 3x^2 - 11x + 27$, y dibuja la recta tangente a la misma en $x = 1.5$
vi) $l(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $[0.1, 3]$

3. Representa la siguiente curva definida a trozos:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + 10, & x < -3 \\ 2x + 7, & -3 \leq x < -1 \\ e^x, & -1 \leq x < 1 \\ 6, & x > 1 \end{cases}$$

4. Halla el polinomio de Taylor de grado $n = 9$ desarrollado alrededor de $x_0 = 0$ para la función $\sqrt[3]{2x+1}$. Úsalo para aproximar el valor de $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Da una cota del error cometido usando la expresión del resto $R = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|$. ¿Podríamos haber tomado $x_0 = 13$?

5. Sean $\{P_i\}_{i=1}^5$ los polinomios de Taylor de grado i de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ desarrollados alrededor del punto $x_0 = 0$. Representa f junto a todos ellos en los intervalos [-0.5,0.5], [-0.9,0.9] y [-1.5,1.5]. Describe lo que observas y explícalo

6. Una persona (X) está tumbada en la arena de una playa de La Manga y ve a otra persona (•) que se está ahogando. Sus posiciones son las mostradas en el dibujo. Sabiendo que X corre sobre la arena a 150 m/min y nada en el mar a 50 m/min, determina el punto en el que X deberá echarse al agua para rescatar a • lo más rápidamente posible.

7. Calcula las siguientes integrales definidas con aplicación físico-geométrica:

i) Área de la región comprendida entre la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$

ii) Centro de masas $\bar{x} = \dfrac{\int_0^l x \cdot \rho(x)\, dx}{\int_0^l \rho(x)\, dx}$ de un bate de béisbol de longitud $l = 30$cm y densidad $\rho(x) = \left(\dfrac{1}{46} + \dfrac{x}{690}\right)^2$

iii) Imagina un cable que cuelga entre dos postes situados en $x = 0, x = 1$ y que toma la forma $f(x) = \dfrac{x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2}{3}$. Calcula su longitud sabiendo que, en general, para $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$, Long$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

iv) Área A de la superficie de revolución engendrada por la curva $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ch}(2x)$, con $x \in [0, 3]$, al girar alrededor del eje OX, sabiendo que para una curva general $y = f(x)$ con $x \in [c, d]$ sería $A = \int_c^d 2\pi \cdot f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

v) Volumen V del cuerpo obtenido al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$, con $x \in [0, 2]$, alrededor del eje OX, sabiendo que para una curva general $y = f(x)$ con $x \in [c, d]$ sería $V = \int_c^d \pi \cdot (f(x))^2\, dx$

8. Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ una variable aleatoria que sigue una distribución normal. Comprueba que:

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx = 0.682689492138$$

para el caso particular $\mu = -1, \sigma = 2, a = \mu - \sigma, b = \mu + \sigma$. Hazlo utilizando:

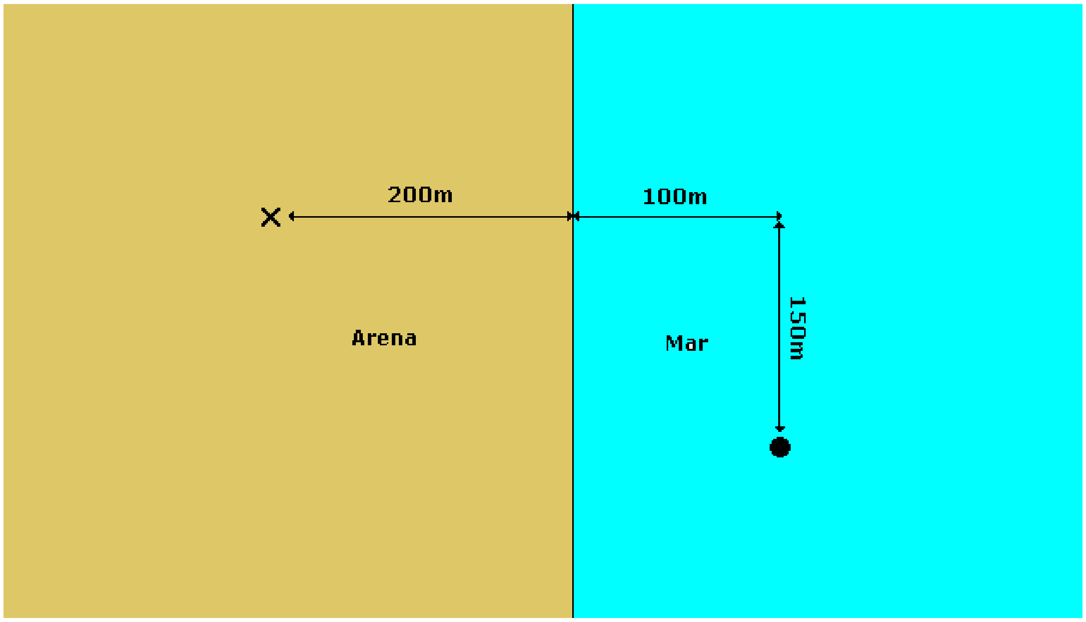
i) la regla de Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1}) + f(b)\right]$$

que habrás de programar, tomando 33 nodos (que corresponde a $2m = 32$ subintervalos), y siendo $h = (b-a)/(2m), x_i = a + (i-1)h$ para $i \in \{1, \ldots, 2m+1\}$

ii) el comando *integral* de Matlab, que consiste en una versión adaptativa del método de Simpson

iii) ¿Qué efecto produce en el resultado de Simpson el aumento de número de nodos de integración?


200m
100m
150m
Arena
Mar