MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Curso 2020/2021

HOJA 4

1. Dados la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$, el punto $p = (2, 0, -4)$ y la dirección indicada por el vector $v = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, calcula la derivada de f en la dirección v en el punto p de dos formas: utilizando la definición y a través del gradiente

2. Clasifica todos los puntos estacionarios de las siguientes funciones y representa la primera:
i) $f(x,y) = -120x^3 - 30x^4 + 18x^5 + 5x^6 + 30xy^2$
ii) $g(x,y,z) = x^2z + y^2z + \dfrac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$
iii) $h(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$

3. Calcula la expresión del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^4 + \mathrm{e}^{xy}$ en el punto $x = 1, y = 2$, y representa juntas ambas figuras

4. Optimiza las siguientes funciones sujetas a una restricción:
i) La temperatura sobre una placa viene dada por $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, una alarma térmica se dispara si $T < 20°C$ ó $T > 180°C$. ¿Se disparará en este caso?
ii) El material de la base de una caja abierta cuesta 1.5 euros por cm^2, mientras el material de sus caras laterales cuesta 1 euro por cm^2. Halla las dimensiones de la caja de volumen máximo que podemos construir con un presupuesto de 1000 euros.
iii) Maximizar el número f de unidades producidas en una fábrica, utilizando la función de Cobb-Douglas $f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$, donde x es el número de horas de trabajo, que se pagan a 15 euros/hora, e y son las unidades de capital (maquinaria, edificios,...), cuyo coste es 25 euros/unidad, sujeto a la restricción de que se dispone en total de 50000 euros para todos los gastos.

iv)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiza} & (4x-y)^2 + (y+z-2)^2 + (t-1)^2 + (y-1)^2 \\ \text{sujeta a} & x + 3y = 0 \\ & z + t = 5y \end{array}$$

NOTA: El multiplicador de Lagrange nos indica la variación de la función objetivo cuando se produce una variación de una unidad en el valor de la restricción.

5. Determina el recinto de integración ayudándote, si puedes, de las herramientas de representación gráfica de Matlab, y obtén el volumen de las figuras siguientes :
i) Región limitada por los cilindros $z = x^2, z = 4 - y^2$
ii) Elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ con el cambio de variables:
$\{x = 2r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), y = \sqrt{2}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi), z = (2/\sqrt{3})r\cos(\phi)\}$
iii) Esfera centrada en el origen de radio 5
iv) Región limitada por el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y el paraboloide, $z = x^2 + y^2$, y siendo $y \geq 0$