Universidad Rey Juan Carlos

Estructuras Algebraicas
Grados con Matemáticas
Curso 2015-16

Hoja 11: Grupos

1. Escribe los siguientes elementos de S_9 como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. Determina si son pares o impares. Determina su orden.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

   d) $(1\ 4)(2\ 7)(5\ 2\ 3)(3\ 4)(1\ 4\ 7\ 2)$

   e) $(7\ 2\ 3\ 6)(8\ 5)(5\ 7\ 1)(1\ 5\ 3\ 7)(4\ 8\ 6)$

2. Enumera todos los elementos de los grupos S_3, D_3 y A_3. Calcula sus órdenes. ¿Son estos grupos conmutativos?

3. *a*) Enumera todos los elementos de $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)^*$. Calcula sus órdenes. ¿Es este grupo conmutativo?

   b) Enumera todos los elementos de $(\mathbb{Z}_{10})^*$. Calcula sus órdenes.

   c) ¿Son los dos grupos anteriores isomorfos?

4. Enumera todos los elementos de $D_5 \cap A_5$ y de $D_6 \cap A_6$. ¿Puedes extraer alguna conclusión general sobre $D_n \cap A_n$?

5. Sean G un grupo y $a, b \in G$ de orden finito que conmutan, es decir, tales que $ab = ba$. Demuestra que el $ord(ab)$ divide a $m.c.m.(ord(a), ord(b))$. Demuestra que si $a, b \in S_n$ son ciclos disjuntos, se tiene la igualdad, es decir, $ord(ab) = m.c.m.(ord(a), ord(b))$.

6. Considera en $GL_2(\mathbb{R})$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = A \cdot B$$

   Demuestra que A tiene orden 3, B orden 4 y C orden infinito. Este ejercicio demuestra dos cosas: el producto de elementos de orden finito puede tener orden

7. Pon ejemplos de grupos no abelianos de orden 12, 16, 30 y 48.

   Pista: Los grupos no abelianos finitos que conoces son los de permutaciones y los diedrales. Úsalos para construir productos cartesianos con el número de elementos adecuado.

8. Un subgrupo H de un grupo G es **trivial** si $H = \{e_G\}$ o $H = G$. Todo grupo siempre tiene estos dos subgrupos triviales.

   Encuentra una familia infinita de ejemplos de grupos no conmutativos que poseen subgrupos no triviales conmutativos.

9. Consideramos en D_n dos elementos, σ es el giro de ángulo $2\pi/n$ y τ es una simetría cualquiera. Demuestra que:

   a) $\sigma\tau = \tau\sigma^{n-1}$

   b) Para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$ se cumple $\sigma^j\tau = \tau\sigma^{n-j}$

10. Consideramos en D_n dos elementos, σ es el giro de ángulo $2\pi/n$ y τ es una simetría cualquiera. Demuestra que:

$$D_n = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$$

   Nota: Se dice que D_n *está generado* por σ y τ, ya que todo elemento de D_n se puede escribir como potencias y productos de estos dos elementos.

11. Dados G y H grupos, llamamos **representación** de G en H a un homomorfismo $f : G \longrightarrow H$ que sea inyectivo (algunas veces también recibe el nombre de representación fiel para remarcar que es inyectivo).

    Encuentra una representación matricial del grupo $G = D_4$ como matrices 2×2 con coeficientes reales, es decir, una representación en $H = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})^* = GL_2(\mathbb{R})$.

    Pista: Lleva cada elemento de D_4 a la matriz 2×2 que induce el movimiento adecuado.

    Repite el ejercicio para D_6.

    Pista: Puedes usar el ejercicio 10